УДК 330.1:519

Є. О. ЯКОВЕНКО (Державна податкова адміністрація у Дніпропетровській області)

МОДЕЛЬ ОПЦІОННОГО КОНТРАКТУ ЗІ ЗМІННИМ ТЕРМІНОМ ДІЇ

Розроблено економіко-математичну модель, яка може бути використана для вдосконалення механізму хеджування вкладень на фінансовому ринку з метою отримання прибутку від діяльності з сучасними видами фінансових інструментів.

Разработана экономико-математическая модель, которая может быть использована для совершенствования механизма хеджирования вложений на финансовом рынке с целью получения прибыли от деятельности с современными видами финансовых инструментов.

An economic and mathematical model has been developed which can be used for improvement of the mechanism of hedging investments on the financial market with the aim of drawing an economic profit while using modern types of monetary instruments.

Торгівля терміновими контрактами у теперішній час є характерною особливістю потужних та стабільних фінансових ринків. Тому формування портфелів, які складені з фондових активів і термінових контрактів є важливою задачею для учасників ринку, де використовуються похідні фінансових інструментів.

У роботах [1–3] наведені приклади опціонів, які дістали поширення у даний час. Слід зазначити, що для валютних та відсоткових опціонів, а також опціонів на реально існуючі облігації, акції, товар, ф’ючерси, опціони, свопопціони, індексні опціони важливим є період, протягом якого вони можуть бути виконані. Крім того, за правилами виконання опціони поділяються на американські, європейські і бермудські.

Для американського опціону характерним є можливість купівлі або продажу його в будь-який момент часу між датою укладення договору і датою його закінчення. Якщо опціон європейський, то майно може бути куплено чи продано тільки у момент закінчення договору.

Для бермудського опціону період, протягом якого він може бути виконаний, повинен бути більшим, ніж для європейського, але меншим, ніж для американського опціону з тими ж датами початку і закінчення договору. Крім того, опціони бувають як позабіржові, так і біржові, ліквідність яких забезпечується стандартним договором.

Для побудови моделі опціонного контракту в умовах ідеального ринку передбачимо, що: цінні папери є абсолютно ліквідними і є нескінченно діленими, відсутні витрати і податки, пов’язанні з купівлею та продажем цінних паперів, жоден з учасників ринку своїми діями не може вплинути на ціни активів.

Слід зазначити, що в прийнятих умовах не має значення чи була зроблена реальна передача акцій чи була передана відповідна сума грошей.

Окрім відомих факторів, від яких залежить ціна опціону моменту часу і терміну закінчення опціону, поточної ціни акції, ціни виконання, виплачуваних дивідендів, термінової структури відсоткової ставки у фіксований момент часу, характеру зміни ціни акції з часом, виду опціону) будемо враховувати залежність поточної ціни акції від часу.

У роботі [6] було показано, що на ідеалізованому ринку інвестори можуть фактично дублювати потік платежів опціону-колл, керуючи портфелем, що містить тільки акцію та облігацію. Володіння цим портфелем еквівалентно володінню опціоном-колл і ринкова вартість складових його цінних паперів у початковий момент часу є вартість опціону.

Опціон локально відтворюється без ризиковими облігаціями та акціями. Його вартість визначається у роботі формулою, яка ґрунтується на ринкових показниках, що спостерігаються, та визначає вартість опціону незалежно від ринкових переваг інвесторів. Для оцінки опціонів застосовують біноміальні моделі, метод Монте-Карло, стохастичне диференціальне рівняння, яке ґрунтується на лемі Іто.

Для визначення ціни опціону у роботі [7] наведено таке стохастичне диференціальне рівняння:

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = rW - \frac{1}{2}\delta^2 x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - (r - \gamma) x \frac{\partial W}{\partial x}, \quad (1)$$

де W – ціна опціону; x – ціна акції; δ – волатильність ціни акції; r – неперервно нарахована миттєва ставка без ризику; γ – ставка неперервно нарахованого дивіденду.

Визначимо розв'язок цього рівняння в області

$$D = \{\tau_0 < \tau < T, 0 < x < \xi(\tau)\}.$$

Крайові умови для рівняння (1) запишемо у достатньо загальному вигляді

$$W(\tau_0, x) = \Psi(x), \quad 0 < x < \xi(\tau), \qquad (2)$$

$$\frac{\partial W(\tau,0)}{\partial x} = \Psi_1(\tau),$$

$$\frac{\partial W[\tau,\xi(\tau)]}{\partial x} = \Psi_2(\tau),$$

де $\xi(\tau)$ – змінна межа ціни акції.

Для розв'язку задачі застосуємо метод розроблений у роботах [4; 5], який ґрунтуються на спільному застосуванні методу скінченно-інтегральних перетворень та алгоритму Рунге-Кутта. Відповідно до вимог метода введемо нову функцію $V(\tau, x)$, відносно якої задані граничні умови будуть перетворені до однорідних:

$$V(\tau,x) = W(\tau,x) - \Psi_1(\tau) - \left[\Psi_2(\tau) - \Psi_1(\tau)\right]\frac{X}{\xi(\tau)}$$

Тоді вихідна задача має вигляд

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = rV - \frac{1}{2}\delta^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - (r-\gamma)x\frac{\partial V}{\partial x} + q(\tau,x), \quad \tau > \tau_0, 0 < x < \xi(\tau);$$

$$V(\tau_0, x) = \Omega(x), \quad 0 < x < \xi(\tau);$$

$$\frac{\partial V(\tau,0)}{\partial x} = \frac{\partial V[\tau,\xi(\tau)]}{\partial x} = 0, \quad \tau > 0,$$

де

$$q(\tau,x) = \dot{\Psi}_1 x\left(\frac{x}{2\xi} - 1\right) + \frac{x^2(\Psi_1 - \Psi_2)}{2\xi} - \frac{\dot{\Psi}_2 x^2}{2\xi} - r\left[\Psi_1 x\left(-\frac{x}{2\xi} + 1\right) + \frac{\dot{\Psi}_2 x^2}{2\xi}\right] - \frac{1}{2\xi}\delta^2 x^2\left[\Psi_2 - \Psi_1\right] - x(r-\gamma)\left[\Psi_1 - \frac{x}{\xi}(\Psi_1 - \Psi_2)\right],$$

$$\Omega(x) = \Psi(x) - \Psi_1(\tau_0)\left(\frac{x}{2\xi(\tau_0)} - 1\right) - \frac{x}{\xi(\tau_0)} \cdot \frac{\Psi_2(\tau_0)x^2}{2\xi(\tau_0)}.$$

Відповідно до граничних умов задачі, введено скінченноінтегральне перетворення

$$\alpha_n(\tau) = \int_0^{\xi(\tau)} V(\tau,x)\cos\frac{n\pi x}{\xi(\tau)}dx$$

та формулу обернення

$$V(\tau,x) = \frac{2}{\xi(\tau)}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(\tau)\cos\frac{n\pi x}{\xi(\tau)}dx.$$

Для визначення коефіцієнтів розкладання $\alpha_n(\tau)$ запишемо задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\frac{d\alpha_n}{d\tau} = r\alpha_n + \frac{\dot{\xi}}{\xi}\sum_{m=0}^{\infty}\omega_{nm}\alpha_m + \delta^2\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m\beta_m{}^2\gamma_{nm} + (r-\gamma)\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m\beta_m\chi_{nm} + q_1(\tau),$$

$$\alpha_n(\tau_0) = \int_0^{\xi(\tau_0)}\Omega(x)\cos\frac{n\pi x}{\xi(\tau_0)}dx,$$

де

$$\omega_{nm} = \frac{2(-1)^{n+m}nm}{m^2 - n^2}, \quad n \neq m;$$

$$\omega_{nm} = \frac{1}{2}, \quad n = m;$$

$$\gamma_{nm} = \frac{(-1)^{n+m}2\beta_m}{\beta_n^2 - \beta_m^2}, \quad n \neq m;$$

$$\gamma_{mn} = \frac{\xi^2}{6} + \frac{(-1)^m}{4\beta_{m^2}}, \quad n = m;$$

$$\chi_{nm} = -\frac{\xi}{\beta_n}, \quad n = m;$$

$$\chi_{nm} = \frac{2(-1)^{n+m}\beta_m}{\beta_m^2 - \beta_n^2}, \quad n \neq m;$$

$$\beta_i = i\pi/\xi, \quad q_1(\tau) = \int_0^{\xi} q(\tau,x)\cos\beta_n x dx.$$

Визначив значення коефіцієнтів $\alpha_n(\tau)$, остаточно ціна опціону, яка враховує залежність від часу ціну акції, обчислюється за формулою

$$W(\tau,x)=\frac{2}{\xi(\tau)}\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_n(\tau)\cos\beta_n x+\frac{\Psi_2 x^2}{2\xi}-$$

$$-\Psi_1 x\left(\frac{x}{2\xi}-1\right).$$

Слід зазначити, що функціональний ряд в області D збігається абсолютно і рівномірно.

Для розробки програмного продукту було використано мову програмування Visual Basic for Applications (VBA).

Структуру програмного продукту можна умовно поділити на три суттєві етапи:

– введення даних;
– розв’язування задачі;
– відображення результатів числового та графічного розв’язку задачі.

Програмний продукт, що був спеціально розроблений для цієї моделі, має гнучкий характер використання. При будь-якому доповненні чи зміні початкової інформації щодо котирувань акцій, алгоритм та програма автоматично враховує її. Використовуючи вхідні дані, які наведені в роботі [4] щодо визначення вартості опціону АТ «Днепрошина», можна навести такий графік (рисунок).

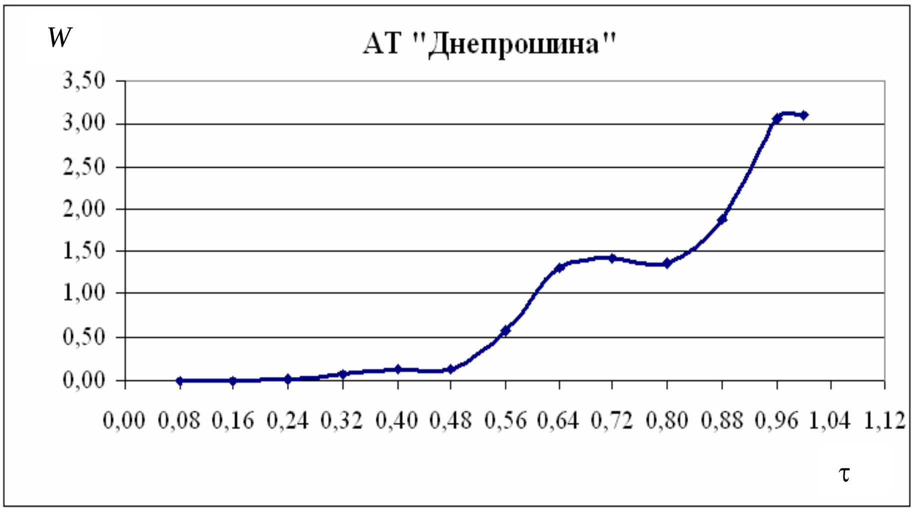

Рис.

Таким чином, розроблена математична модель може бути використана для вдосконалення механізму хеджування вкладень на фінансовому та фондовому ринку з метою отримання прибутку від діяльності з сучасними видами фінансових інструментів.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Шведов А. С. О математических методах, используемых при работе с опционами // Экономический журнал ВШЕ. – 1998. – № 3. – С. 385–409.
2. Николаев Л. К. О циклах экономической активности в процессе роста капитала // Экономика и математические методы, – 2003, – № 1, – С. 33–42.
3. Коркунов А. В. Оценка опционов и дельта-хеджирования применительно к фьючерсным контрактам на российском рынке // Экономический журнал ВШЕ – 1999 – № 2 – С. 173–185.
4. Яковенко Є. О. Модель оцінки опціону на фінансовому та фондовому ринках // Сучасний етап та проблеми розвитку підприємництва в регіоні: Матеріали міжнародної науково-практичної конференції 10–11 листопада 2005 року м. Жовті Води, т.3, Наука і освіта – С. 26–28.
5. Яковенко Е. А. Модель циклических колебаний темпа прироста капитала в экономике / Е. А. Яковенко, А. Г. Яковенко // Науковий вісник НГУ. – 2005. – №2. – С. 94–96.
6. Black F. and Sholes M. S., The Prising of Options and Corporate Liabilities. – Journal of Political Economy 81, 1973, – P. 637–659.
7. Merton R. C., Theory of Rational option Pricing – Bell Journal of Economics and Management Science, 1973 – P. 141–183.

Надійшла до редколегії 16.05.2006.