

А. И. ЯЛОВОЙ (ОАО «Завод точного литья»)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СПЕЦИАЛИЗИРОВАННОЙ ПЛАТФОРМЫ

Наведено математичну модель просторових коливань залізничної шестивісної спеціалізованої платформи для перевезення скрапу. Модель застосовується для визначення динамічних показників спеціалізованої платформи на стадії проектування.

Приведена математическая модель пространственных колебаний железнодорожной шестиосной специализированной платформы для перевозки скрапа. Модель применяется для определения динамических показателей специализированной платформы на стадии проектирования.

The paper presents a mathematical model of spatial oscillations of six-axle specialized railway platform for transportation of scrap. The model is used for determination of dynamical indices of the specialized platform at the design stage.

Вновь создаваемые рельсовые экипажи целесообразно оценивать по их динамическим качествам еще на стадии проектирования для отработки конструкции и обоснования принятых технических решений.

Оригинальную конструкцию шестиосной специализированной платформы для перевозки скрапа [1; 2] целесообразно проверить с точки зрения динамической нагруженности перед серийным изготовлением. Для этого разработаем математическую модель про-

странственных колебаний этой платформы в классической постановке задачи.

При исследовании пространственных колебаний платформы кузов, соединительная балка четырехосной тележки, наддресорные балки, боковые рамы, колесные пары рассматриваются как твердые тела в соответствии с [3]. Платформа представляет собой механическую систему, состоящую из 17 твердых тел.

На рис. 1 изображена расчетная схема специализированной платформы.

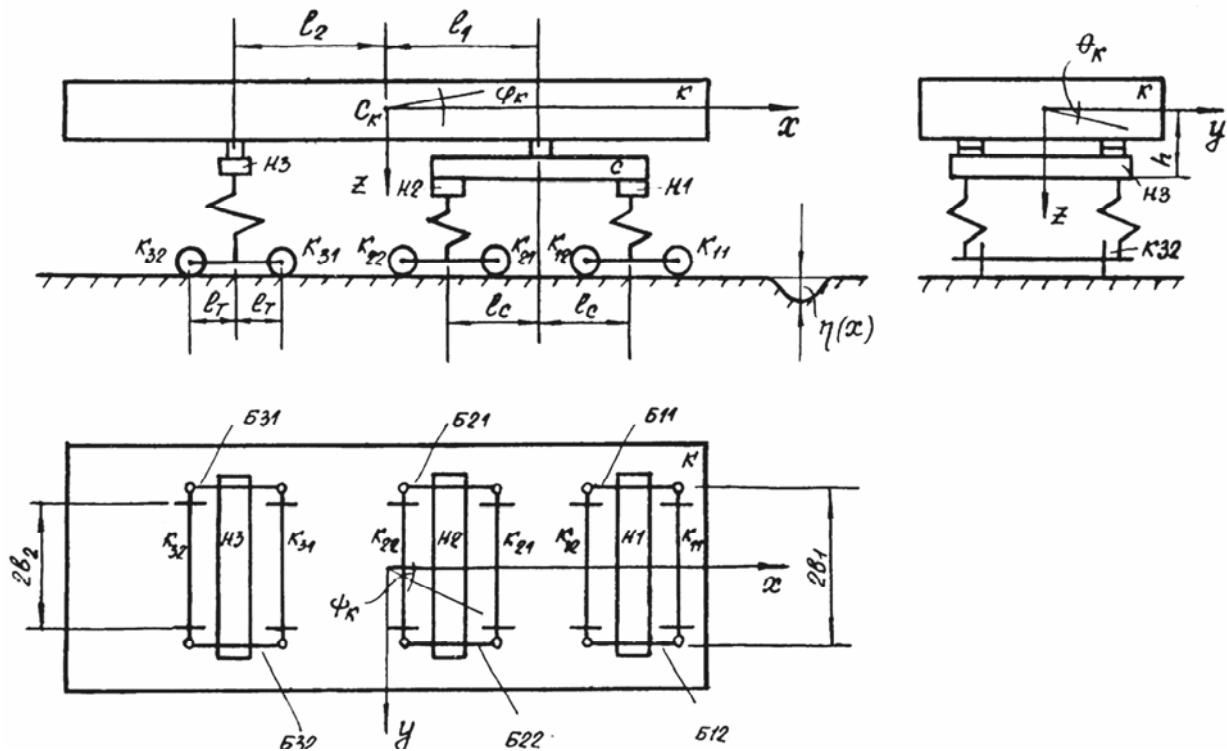


Рис. 1. Расчетная схема платформы

Обозначения на этом рисунке следующие: κ – кузов; c – соединительная балка; n_i – наддрессорные балки ($i = \overline{1,3}$ – номер тележки); \bar{b}_i – боковые рамы; κ_{ij} – колесные пары ($j = \overline{1,2}$ – номер колесной пары в тележке); l_1, l_2 – расстояния от центра масс кузова (точка C_κ) до центров масс передней и задней (по ходу) тележек; $2l_c$ – расстояние между осями рессорных комплектов четырехосной тележки в продольном направлении; $2l_T$ – база двухосной тележки; v – скорость движения; $\eta(x)$ – неровность пути.

Обозначения боковых рам имеют вид: бик ($\kappa = 1$ – левая, $\kappa = 2$ – правая сторона платформы); $2b_1, 2b_2$ – расстояние в поперечном направлении соответственно между рессорными комплектами и между кругами катания колес; h – высота центра масс кузова над плоскостью опирания наддрессорных балок на рессорные комплекты. Неровности пути будут рассматриваться двух типов: вертикальные $\eta_{в,i,j,\kappa}(x)$ и горизонтальные $\eta_{г,i,j,\kappa}(x)$. Перемещения букс и колес имеют индексы ijk .

При исследовании пространственных колебаний каждое тело имеет 6 степеней свободы, которые обозначены так: x – подергивание; y – боковой относ; z – подпрыгивание; θ – боковая качка; φ – продольная качка; ψ – виливание. Положительные направления всех поступательных перемещений – вдоль соответствующих осей, всех линейных перемещений – против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления соответствующей оси (эти направления показаны на рис. 1).

Таким образом, 17 твердых тел имеют 102 координаты. Рассмотрим связи, наложенные на систему:

- перемещения всех тел кроме боковых рам вдоль оси x одинаковы

$$\left. \begin{aligned} x_\kappa &= x_c = x_{n,i} = x_{\kappa,ij}, \\ x_{\bar{b},i1} &= x_{n,i} + b_1 \psi_{n,i}, \\ x_{\bar{b},i2} &= x_{n,i} - b_1 \psi_{n,i}; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

- боковая качка кузова и тележек одинаковы (зазорами между скользунами, изображенными на рис. 1, пренебрегаем)

$$\theta_\kappa = \theta_c = \theta_{n,1} = \theta_{n,2} = \theta_{n,3}; \quad (2)$$

- продольной качкой наддрессорных балок пренебрегаем

$$\varphi_{n,1} = \varphi_{n,2} = \varphi_{n,3} = 0;$$

- кузов не отрывается от тележек

$$z_c = z_\kappa - l_1 \varphi_\kappa, \quad z_{n,3} = z_\kappa + l_2 \varphi_\kappa; \quad (3)$$

- соединительная балка не отрывается от наддрессорных балок

$$z_{n,1} = z_c - l_c \varphi_c, \quad z_{n,2} = z_c + l_c \varphi_c; \quad (4)$$

- зазорами между пятой и подпятником в поперечном направлении пренебрегаем

$$\left. \begin{aligned} y_c &= y_\kappa + l_1 \psi_\kappa - h \theta_\kappa, \\ y_{n,1} &= y_c + l_c \psi_c, \\ y_{n,2} &= y_c - l_c \psi_c, \\ y_{n,3} &= y_\kappa - l_2 \psi_\kappa - h \theta_\kappa; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

- предполагаем, что влияние наддрессорных балок и колесных пар одинаково

$$\left. \begin{aligned} \psi_{n,1} &= \psi_{\kappa,11} = \psi_{\kappa,12}, \\ \psi_{n,2} &= \psi_{\kappa,21} = \psi_{\kappa,22}, \\ \psi_{n,3} &= \psi_{\kappa,31} = \psi_{\kappa,32}; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

- предполагаем, что взаимные поступательные перемещения боковых рам и колесных пар отсутствуют

$$\left. \begin{aligned} \psi_{\bar{b},11} &= \psi_{\bar{b},12}, \quad \psi_{\bar{b},21} = \psi_{\bar{b},22}, \quad \psi_{\bar{b},31} = \psi_{\bar{b},32}, \\ y_{\bar{b},11} &= y_{\bar{b},12}, \quad y_{\bar{b},21} = y_{\bar{b},22}, \quad y_{\bar{b},31} = y_{\bar{b},32}; \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

- боковой качкой боковых рам пренебрегаем

$$\theta_{\bar{b},i\kappa} = 0;$$

- колесные пары движутся без проскальзываний

$$\varphi_{\kappa,i,j} = \frac{x_{\kappa,i,j}}{r}; \quad (8)$$

- боковой относ колесных пар определяется перемещениями боковых рам

$$\left. \begin{aligned} y_{\kappa i1} &= y_{\bar{b}i1} + l_m \psi_{\bar{b}i1}, \\ y_{\kappa i2} &= y_{\bar{b}i1} - l_m \psi_{\bar{b}i1}; \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

- путь предполагается жестким в вертикальном и горизонтальном направлениях

$$z_{\kappa,i,j} = \frac{1}{2} (\eta_{b,i,j1} + \eta_{b,i,j2}),$$

$$z_{\kappa,i,j} = \frac{1}{2} (\eta_{b,i,j1} + \eta_{b,i,j2}),$$

$$\theta_{k,i,j} = \frac{1}{2b_2}(\eta_{b,i,j2} - \eta_{b,i,j1}),$$

$$z_{\bar{6}ik} = \frac{1}{2}(\eta_{b,i,1k} + \eta_{b,i,2k}),$$

$$\varphi_{\bar{6}ik} = \frac{1}{2l_T}(\eta_{b,i,1k} - \eta_{b,i,2k}).$$

Взаимодействие платформы с упругим и упруговязким путем может быть рассмотрено с использованием моделей пути [4; 5], но в данной задаче ограничимся принятыми допущениями. Наложено 85 уравнений связей. Поэтому система имеет $102 - 85 = 17$ степеней свободы. В качестве обобщенных координат выберем следующие перемещения:

$$z_k = q_1, \quad \varphi_k = q_2, \quad \varphi_c = q_3, \quad y_k = q_4,$$

$$\psi_k = q_5, \quad \theta_k = q_6, \quad \psi_c = q_7, \quad \psi_{н.1} = q_8,$$

$$\psi_{н.2} = q_9, \quad \psi_{н.3} = q_{10}, \quad y_{\bar{6}.11} = q_{11},$$

$$y_{\bar{6}.21} = q_{12}, \quad y_{\bar{6}.31} = q_{13}, \quad \psi_{\bar{6}.11} = q_{14},$$

$$\psi_{\bar{6}.21} = q_{15}, \quad \psi_{\bar{6}.31} = q_{16}, \quad \alpha = q_{17}.$$

Запишем взаимные перемещения тел системы:

- между кузовом и соединительной или наддрессорной балкой при вилянии

$$\Delta_{\psi,c} = \psi_k - \psi_c = q_5 - q_7,$$

$$\Delta_{\psi,3} = \psi_k - \psi_{н.3} = q_5 - q_{10};$$

- между соединительной балкой и наддрессорными балками четырехосной тележки при вилянии

$$\Delta_{\psi,1} = \psi_c - \psi_{н.1} = q_7 - q_8,$$

$$\Delta_{\psi,2} = \psi_c - \psi_{н.2} = q_7 - q_9;$$

- между наддрессорными балками и боковыми рамами при перемещениях в вертикальном направлении

$$\Delta_{z11} = z_{н.1} - b_1\theta_{н.1} - z_{\bar{6}.11} = q_1 - l_1q_2 -$$

$$-l_cq_3 - b_1q_6 - \frac{1}{2}(\eta_{b111} + \eta_{b121}),$$

$$\Delta_{z12} = z_{н.1} + b_1\theta_{н.1} - z_{\bar{6}.12} = q_1 - l_1q_2 -$$

$$-l_cq_3 + b_1q_6 - \frac{1}{2}(\eta_{b112} + \eta_{b122}),$$

$$\Delta_{z21} = z_{н.2} - b_1\theta_{н.2} - z_{\bar{6}.21} = q_1 - l_1q_2 + l_cq_3 -$$

$$-b_1q_6 - \frac{1}{2}(\eta_{b211} + \eta_{b221}),$$

$$\Delta_{z22} = z_{н.2} + b_1\theta_{н.2} - z_{\bar{6}.22} = q_1 - l_1q_2 + l_cq_3 +$$

$$+b_1q_6 - \frac{1}{2}(\eta_{b212} + \eta_{b222}),$$

$$\Delta_{z31} = z_{н.3} - b_1\theta_{н.3} - z_{\bar{6}.31} = q_1 + l_2q_2 -$$

$$-b_1q_6 - \frac{1}{2}(\eta_{b311} + \eta_{b321}),$$

$$\Delta_{z32} = z_{н.3} + b_1\theta_{н.3} - z_{\bar{6}.32} = q_1 + l_2q_2 -$$

$$-b_1q_6 - \frac{1}{2}(\eta_{b312} + \eta_{b322});$$

- при перемещениях в горизонтальном поперечном направлении

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{y11} = \Delta_{y12} = y_{н1} - y_{\bar{6}11} = \\ = q_4 + l_1q_5 - hq_6 + l_cq_7 - q_{11}, \\ \Delta_{y21} = \Delta_{y22} = y_{н2} - y_{\bar{6}21} = \\ = q_4 + l_1q_5 - hq_6 - l_cq_7 - q_{12}, \\ \Delta_{y31} = \Delta_{y32} = y_{н3} - y_{\bar{6}31} = \\ = q_4 - l_2q_5 - hq_6 - q_{13}; \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

и при вилянии

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{\psi11} = \Delta_{\psi12} = \psi_{н1} - \psi_{\bar{6}11} = q_8 - q_{14}, \\ \Delta_{\psi21} = \Delta_{\psi22} = \psi_{н2} - \psi_{\bar{6}21} = q_9 - q_{15}, \\ \Delta_{\psi31} = \Delta_{\psi32} = \psi_{н3} - \psi_{\bar{6}31} = q_{10} - q_{16}; \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

- между боковыми рамами и колесными рамами при вилянии

$$\Delta_{\psi111} = \Delta_{\psi112} = \Delta_{\psi121} = \Delta_{\psi122} =$$

$$= \psi_{к11} - \psi_{\bar{6}11} = q_8 - q_{14} = \Delta_{\psi11},$$

$$\Delta_{\psi211} = \Delta_{\psi212} = \Delta_{\psi221} = \Delta_{\psi222} =$$

$$= \psi_{к21} - \psi_{\bar{6}21} = q_9 - q_{15} = \Delta_{\psi21},$$

$$\Delta_{\psi311} = \Delta_{\psi312} = \Delta_{\psi321} = \Delta_{\psi322} =$$

$$= \psi_{к31} - \psi_{\bar{6}31} = q_{10} - q_{16} = \Delta_{\psi31};$$

- между колесами и рельсами в горизонтальном поперечном направлении

$$y_{111} = y_{112} = y_{к11} - \eta_{e11} = q_{11} + l_mq_{14} - \eta_{e11},$$

$$y_{121} = y_{122} = y_{к12} - \eta_{e12} = q_{11} - l_mq_{14} - \eta_{e12},$$

$$y_{211} = y_{212} = y_{к21} - \eta_{e21} = q_{12} + l_mq_{15} - \eta_{e21},$$

$$y_{221} = y_{222} = y_{к22} - \eta_{e22} = q_{12} - l_mq_{15} - \eta_{e22},$$

$$y_{311} = y_{312} = y_{\kappa 31} - \eta_{\varepsilon 31} = q_{13} + l_m q_{16} - \eta_{\varepsilon 31},$$

$$y_{321} = y_{322} = y_{\kappa 32} - \eta_{\varepsilon 32} = q_{13} - l_m q_{16} - \eta_{\varepsilon 32}.$$

Введем обозначения: 2δ – зазор в рельсовой колее; $\mu_0 = 0,05$ – коничность поверхности катания колес. При перемещениях (19) происходит изменение радиуса поверхности катания колеса Δr_{ijk} , которое определим так [6]:

$$\Delta r_{ij1} = f(y_{ij1}) = \begin{cases} -0,06 \cdot 10^6 (y_{ij1} + \delta)^3 - 0,05 y_{ij1}, & \text{если } y_{ij1} + \delta < 0, \\ -0,5 y_{ij1}, & \text{если } y_{ij1} + \delta \geq 0; \end{cases} \quad (12)$$

$$\Delta r_{ij2} = f(y_{ij2}) = \begin{cases} 0,05 y_{ij2}, & \text{если } y_{ij2} - \delta \leq 0, \\ 0,06 \cdot 10^6 (y_{ij2} - \delta)^3 + 0,05 y_{ij2}, & \text{если } y_{ij2} - \delta > 0. \end{cases}$$

В дальнейшем понадобятся также производные от выражений (12) по перемещениям $y_{ij\bar{\varepsilon}}$, то есть тангенсы углов наклона поверхности катания колес к горизонтали

$$f'(y_{ij1}) = \begin{cases} -0,18 \cdot 10^6 (y_{ij1} + \delta)^2 - 0,05, & \text{если } y_{ij1} + \delta < 0, \\ -0,5, & \text{если } y_{ij1} + \delta \geq 0; \end{cases}$$

$$f'(y_{ij2}) = \begin{cases} 0,05, & \text{если } y_{ij2} - \delta \leq 0, \\ 0,18 \cdot 10^6 (y_{ij2} - \delta)^2 + 0,05, & \text{если } y_{ij2} - \delta > 0. \end{cases}$$

Запишем выражения для сил, действующих в системе:

- моменты сил трения при взаимном влиянии кузова и соединительной балки, кузова и наддрессорной балки, соединительной и наддрессорных балок (в пяте и на скользунах)

$$\left. \begin{aligned} M_{\Psi c} &= M_0 \text{sign} \dot{\Delta}_{\Psi c}, \\ M_{\Psi i} &= M_{0i} \text{sign} \dot{\Delta}_{\Psi i}, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

- моменты сил упругости и трения при взаимном влиянии наддрессорных балок и боковых рам, колесных пар и боковых рам

$$M_{\Psi ik} = \kappa_{\Psi} \Delta_{\Psi ik} + M_{\mu 0} \text{sign} \dot{\Delta}_{\Psi ik},$$

$$M_{\Psi ijk} = \kappa_{\delta \Psi} \Delta_{\Psi ijk} + M_{\delta 0} \text{sign} \dot{\Delta}_{\Psi ijk},$$

где M_0 , M_{0i} , $M_{\mu 0}$, $M_{\delta 0}$ – амплитудные значения моментов; κ_{Ψ} , $\kappa_{\delta \Psi}$ – угловые жесткости;

- силы в центральном подвешивании тележек вертикальные

$$S_{zik} = \kappa_z \Delta_{zik} + S_{z0i} \text{sign} \dot{\Delta}_{zik} \quad (14)$$

и горизонтальные поперечные

$$S_{yik} = \kappa_y \Delta_{yik} + S_{y0i} \text{sign} \dot{\Delta}_{yik}, \quad (15)$$

где κ_z , κ_y – жесткости рессорных комплектов соответственно в вертикальном и горизонтальном поперечном направлениях; S_{z0i} , S_{y0i} – амплитудные значения сил сухого трения демпферов в соответствующих направлениях, причем S_{z0i} определяется следующим образом:

$$S_{z0i} = \frac{1}{2} \varphi S_{cmi},$$

а S_{y0i} – принято равным $S_{y0i} = S_{z0i} / 2$, S_{cmi} – статическое давление на тележку;

- реакции рельсов

$$R_{ijk} = f'(y_{ijk}) S_{ijk},$$

- давление колеса на рельс

$$S_{i1k} = S_{i2k} = S_{cm.i1} + \frac{1}{2} S_{zik},$$

- силы трения между колесами и рельсами, определяемые по теории псевдоскольжения [3] соответственно в направлении вдоль и поперек оси пути

$$\left. \begin{aligned} X_{ijk} &= -F_{ijk} \varepsilon_{xijk}, \\ Y_{ijk} &= -F_{ijk} \varepsilon_{yijk}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

проскальзывания колес равны

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xij1} = -\varepsilon_{xij2} &= b_2 \frac{\dot{\Psi}_{kij}}{v} + \frac{\Delta r_{ij}}{r}, \\ \Delta r_{ij} &= \frac{1}{2} (\Delta r_{ij2} - \Delta r_{ij1}), \\ \varepsilon_{yij1} = -\varepsilon_{yij2} &= \frac{1}{v} \dot{y}_{kij} - \Psi_{kij}, \\ \varepsilon_{ij}^2 &= \varepsilon_{xij}^2 + \varepsilon_{yij}^2, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

коэффициент псевдоскольжения равен

$$F_{ij1} = F_{ij2} = \frac{235 \cdot S_{cm.ij} - 2,4 S_{cm.ij}^2 + 0,01 S_{cm.ij}^3}{\sqrt{1 + 4,33(235 - 2,4 S_{cm.ij} + 0,01 S_{cm.ij}^2)^2 \varepsilon_{ij}^2}}, \quad (18)$$

где статическое давление колеса на рельс

$$S_{cm.i1} = S_{cm.i2} = \frac{1}{4} S_{cm.i} + \frac{1}{2} (m_{\delta} + m_o) g.$$

Составим дифференциальные уравнения колебаний вагона, применив принцип Даламбера. Прикладываем перечисленные выше силы и моменты к соответствующим телам и составляем уравнение равновесия для всей платформы:

$$\begin{aligned} & -m_{\kappa}\ddot{x}_{\kappa} - m_c\ddot{x}_c - m_n(\ddot{x}_{n1} + \ddot{x}_{n2} + \ddot{x}_{n3}) - \\ & -m_{\bar{o}}(\ddot{x}_{\bar{o}11} + \ddot{x}_{\bar{o}12} + \ddot{x}_{\bar{o}21} + \ddot{x}_{\bar{o}22} + \ddot{x}_{\bar{o}31} + \ddot{x}_{\bar{o}32}) - \\ & -m_o(\ddot{x}_{\kappa11} + \ddot{x}_{\kappa12} + \ddot{x}_{\kappa21} + \ddot{x}_{\kappa22} + \ddot{x}_{\kappa31} + \ddot{x}_{\kappa32}) - \\ & -\frac{I_o}{r}(\ddot{\phi}_{\kappa11} + \ddot{\phi}_{\kappa12} + \ddot{\phi}_{\kappa21} + \ddot{\phi}_{\kappa22} + \ddot{\phi}_{\kappa31} + \ddot{\phi}_{\kappa32}) + \\ & +X_{111} + X_{112} + X_{121} + X_{122} + X_{211} + X_{212} + \\ & +X_{221} + X_{222} + X_{311} + X_{312} + X_{321} + X_{322} = 0. \end{aligned}$$

Здесь обозначено: m_{κ} , m_c , m_n , $m_{\bar{o}}$, m_o – массы кузова платформы, соединительной и наддрессорной балки, боковой рамы и колесной пары.

Рассмотрим в этом уравнении слагаемые

$$X_{111} + X_{112} = -F_{111}\varepsilon_{111} - F_{112}\varepsilon_{112} = 0.$$

Следовательно, сумма всех проекций сил псевдоскольжения на ось равна нулю. Учтем уравнения связей (1) и (8), в результате получим следующее уравнение, определяющее циклическую координату:

$$a_0\ddot{q}_0 = 0, \quad (19)$$

где a_0 – инерционный коэффициент, определяющийся как

$$a_0 = m_{\kappa} + m_c + 3m_n + 6m_o + 6\frac{I_o}{r^2};$$

I_i – момент инерции колесной пары относительно главных центральных осей, перпендикулярных плоскости чертежа.

Сумма проекций на ось z всех сил, действующих на кузов, соединительную и наддрессорные балки включает также силы (14):

$$\begin{aligned} & -m_{\kappa}\ddot{z}_{\kappa} - m_c\ddot{z}_c - m_n(\ddot{z}_{n1} + \ddot{z}_{n2} + \ddot{z}_{n3}) - \\ & -S_{z11} - S_{z12} - S_{z21} - S_{z22} - S_{z31} - S_{z32} = 0, \end{aligned}$$

или с учетом уравнений (3), (4)

$$\left. \begin{aligned} & a_{11}\ddot{q}_1 - a_{12}\ddot{q}_2 = Q_1, \\ & Q_1 = -\sum_{i=1}^3 \sum_{\kappa=1}^2 S_{zi\kappa}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Составим уравнения, описывающие колебания продольной качки кузова и соединительной балки:

$$\begin{aligned} & -I_{y\kappa}\ddot{\phi}_{\kappa} + m_c\ddot{z}_cl_1 - m_n\ddot{z}_{n3}l_2 + m_n\ddot{z}_{n1}l_1 + m_n\ddot{z}_{n2}l_1 + \\ & +l_1(S_{z11} + S_{z12} + S_{z21} + S_{z22}) - l_2(S_{z31} + S_{z32}) = 0, \\ & -I_{yc}\ddot{\phi}_c + m_n\ddot{z}_{n2}l_c - m_n\ddot{z}_{n1}l_c + \\ & +l_c(S_{z11} + S_{z12} - S_{z21} - S_{z22}) = 0, \end{aligned}$$

где $I_{y\kappa}$, I_{yc} – моменты инерции кузова и соединительной балки относительно главных центральных осей, перпендикулярных оси пути. После подстановки в эти уравнения выражений (3), (4) получим

$$\left. \begin{aligned} & a_{22}\ddot{q}_2 - a_{12}\ddot{q}_1 = Q_2, \\ & Q_2 = l_1 \sum_{i=1}^2 \sum_{\kappa=1}^2 S_{zi\kappa} - l_2 \sum_{\kappa=1}^2 S_{z3\kappa}, \\ & a_{33}\ddot{q}_3 = Q_3, \quad Q_3 = l_c \sum_{\kappa=1}^2 (S_{z1\kappa} - S_{z2\kappa}). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Составим уравнения для бокового отбоя кузова, то есть сумму проекций на ось o всех сил, действующих на кузов, соединительную и наддрессорные балки; сюда войдут помимо сил инерции также силы S_{yik} (15)

$$\begin{aligned} & -m_{\kappa}\ddot{y}_{\kappa} - m_c\ddot{y}_c - m_n(\ddot{y}_{n1} + \ddot{y}_{n2} + \ddot{y}_{n3}) - \\ & -S_{y11} - S_{y12} - S_{y21} - S_{y22} - S_{y31} - S_{y32} = 0. \end{aligned}$$

Подставим в это уравнение выражения (5) и получим, учитывая (10),

$$\left. \begin{aligned} & a_{44}\ddot{q}_4 + a_{45}\ddot{q}_5 - a_{46}\ddot{q}_6 = Q_4, \\ & Q_4 = -2 \sum_{i=1}^3 S_{yi1}, \\ & a_{44} = m_{\kappa} + m_c + 3m_n, \\ & a_{45} = m_cl_1 + 2m_nl_1 - m_nl_2, \\ & a_{46} = m_ch + 3m_nh. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Для уравнения влияния кузова необходимо учесть также моменты сил трения $M_{\psi c}$, $M_{\psi 3}$ (19):

$$\begin{aligned} & -I_{z\kappa}\ddot{\psi}_{\kappa} - m_c\ddot{y}_cl_1 - m_n\ddot{y}_{n1}l_1 - m_n\ddot{y}_{n2}l_1 + \\ & +m_n\ddot{y}_{n3}l_2 - l_1(S_{y11} + S_{y12} + S_{y21} + S_{y22}) + \\ & +l_2(S_{y31} + S_{y32}) - M_{\psi c} - M_{\psi 3} = 0. \end{aligned}$$

После подстановки в это уравнение (5) преобразуем его к такому виду

$$\left. \begin{aligned} a_{55}\ddot{q}_5 + a_{45}\ddot{q}_4 - a_{56}\ddot{q}_6 &= Q_5, \\ Q_5 &= -2l_1 \sum_{i=1}^2 S_{yi1} + 2l_2 S_{y31} - M_{\psi c} - M_{\psi 3}, \\ a_{55} &= I_{z_k} + m_c l_1^2 + 2m_n l_1^2 + m_n l_2^2, \\ a_{56} &= h(m_c l_1 + 2m_n l_1 - m_n l_2), \end{aligned} \right\} (23)$$

где I_{z_k} – момент инерции кузова относительно вертикальной оси.

Составим следующее уравнение для боковой качки кузова; в это уравнение входят силы S_{zik} , S_{yik} :

$$\begin{aligned} & -I_{xk}\ddot{\theta}_k - I_{xc}\ddot{\theta}_c - I_{xn}(\ddot{\theta}_{n1} + \ddot{\theta}_{n2} + \ddot{\theta}_{n3}) + \\ & + h(m_c \ddot{y}_c + m_n \ddot{y}_{n1} + m_n \ddot{y}_{n2} + m_n \ddot{y}_{n3}) + \\ & -h(S_{y11} + S_{y12} + S_{y21} + S_{y22} + S_{y31} + S_{y32}) + \\ & + b_1(S_{z11} - S_{z12} + S_{z21} - S_{z22} + S_{z31} - S_{z32}) = 0. \end{aligned}$$

В это уравнение подставим выражения (2) и (5); в результате получим:

$$\left. \begin{aligned} a_{66}\ddot{q}_6 - a_{46}\ddot{q}_4 - a_{56}\ddot{q}_5 &= Q_6, \\ Q_6 &= 2h \sum_{i=1}^3 S_{yi1} + b_1 \sum_{i=1}^3 (S_{zi1} - S_{zi2}), \\ a_{66} &= I_{xk} + I_{xc} + 3I_{xn} + m_c h^2 + 3m_n h^2, \end{aligned} \right\} (24)$$

где I_{xk} , I_{xc} , I_{xn} – моменты инерции кузова, соединительной и надрессорной балок относительно продольной оси.

Как видно из (22)–(24), уравнения для координат $q_4 \div q_6$ имеют динамические связи.

Седьмая координата-влияние соединительной балки q_7 . При колебаниях $\psi_c = q_7$ возникают моменты сил трения $M_{\psi c}$ и $M_{\psi 1}$, $M_{\psi 2}$ (13)

$$\begin{aligned} & -I_{zc}\ddot{\psi}_c + m_n \ddot{y}_{n1} l_c - m_n \ddot{y}_{n2} l_c + M_{\psi c} - M_{\psi 1} - \\ & - M_{\psi 2} - l_c (S_{y11} + S_{y12} - S_{y21} - S_{y22}) = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение с учетом связей (5) запишем

$$\left. \begin{aligned} a_{77}\ddot{q}_7 &= Q_7, \\ Q_7 &= M_{\psi c} - M_{\psi 1} - M_{\psi 2} - 2l_c (S_{y11} - S_{y21}), \\ a_{77} &= I_{zc} + 2m_n l_c^2, \end{aligned} \right\} (25)$$

где I_{zc} – момент инерции соединительной балки относительно вертикальной оси.

Перейдем к составлению уравнений для тележек. Сначала рассмотрим влияние надрессорных балок и колесных пар, которое принято одинаковым для каждой тележки. При этих колебаниях действуют, с одной стороны, моменты $M_{\psi i}$, а с другой – $M_{\psi ik}$ (на надрессорные балки), а также моменты $M_{\psi ijk}$ и моменты сил X_{ijk} (на колесные пары). Поэтому уравнения для координат $q_8 \dots q_{10}$ имеют вид

$$\begin{aligned} & -I_{zn}\ddot{\psi}_{n1} - I_{zo}(\ddot{\psi}_{k11} + \ddot{\psi}_{k12}) - m_b b_1 (\ddot{x}_{b11} - \ddot{x}_{b12}) + \\ & + M_{\psi 1} - M_{\psi 11} - M_{\psi 12} - M_{\psi 111} - M_{\psi 112} - M_{\psi 121} - \\ & - M_{\psi 122} + b_2 (X_{111} - X_{112} + X_{121} - X_{122}) = 0. \end{aligned} (26)$$

Аналогичные уравнения составляются для других тележек.

Учтем равенства (16)–(18). Тогда

$$\begin{aligned} X_{111} - X_{112} + X_{121} - X_{122} &= \\ &= -F_{111}\varepsilon_{x111} + F_{112}\varepsilon_{x112} - F_{121}\varepsilon_{x121} + F_{122}\varepsilon_{x122} = \\ &= -2(F_{111}\varepsilon_{x111} + F_{121}\varepsilon_{x121}). \end{aligned}$$

Следует иметь в виду также, что

$$\begin{aligned} M_{\psi 11} &= M_{\psi 12}, \\ M_{\psi 111} &= M_{\psi 112} = M_{\psi 121} = M_{\psi 122}. \end{aligned}$$

Кроме того, имеют место соотношения между координатами (1), (6). Поэтому получим (26) в таком виде

$$a_{88}\ddot{q}_8 = Q_8,$$

$$\begin{aligned} Q_8 &= M_{\psi 1} - 2M_{\psi 11} - 4M_{\psi 111} - \\ & - 2b_2 (F_{111}\varepsilon_{x111} + F_{121}\varepsilon_{x121}), \end{aligned}$$

$$a_{88} = I_{zn} + 2I_{zo} + 2m_b b_1^2,$$

где I_{zn} , I_{zi} – моменты инерции надрессорной балки и колесной пары относительно вертикальной оси.

Таким образом, для координат $q_8 \dots q_{10}$ получим следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} a_{88}\ddot{q}_8 &= Q_8, \quad a_{99}\ddot{q}_9 = Q_9, \quad a_{1010}\ddot{q}_{10} = Q_{10}, \\ a_{88} &= a_{99} = a_{1010}, \\ Q_n &= M_{\psi 1} - 2M_{\psi i1} - 4M_{\psi i11} - 2b_2 \sum_{j=1}^2 S_{ij1}\varepsilon_{xij1}, \\ & (n = 7 + i, \quad i = \overline{1,3}). \end{aligned} \right\} (27)$$

Составим уравнения для бокового отбоса боковых рам тележек, к которым приложены силы $S_{y_{ik}}$, R_{ijk} , Y_{ijk} ; вначале рассмотрим координату $y_{\delta 11} = y_{\delta 12} = q_{11}$:

$$\begin{aligned} & -m_{\delta} \ddot{y}_{\delta 11} - m_{\delta} \ddot{y}_{\delta 12} - m_0 \ddot{y}_{\kappa 11} - m_0 \ddot{y}_{\kappa 12} + \\ & + S_{y_{11}} + S_{y_{12}} + Y_{111} + Y_{112} + Y_{121} + Y_{122} - \\ & - R_{111} - R_{112} - R_{121} - R_{122} = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Сумма сил $Y_{1j\delta}$ с учетом (16)-(18) равна:

$$\begin{aligned} & Y_{111} + Y_{112} + Y_{121} + Y_{122} = \\ & = -F_{111} \varepsilon_{y_{111}} - F_{112} \varepsilon_{y_{112}} - F_{121} \varepsilon_{y_{121}} - F_{122} \varepsilon_{y_{122}} = \\ & = -2(F_{111} \varepsilon_{y_{111}} + F_{121} \varepsilon_{y_{121}}). \end{aligned}$$

Учтем также (7), (9) и (10), в результате получим (28) в виде

$$a_{11} \ddot{q}_{11} = Q_{11},$$

$$Q_{11} = 2S_{y_{11}} - 2(F_{111} \varepsilon_{y_{111}} + F_{121} \varepsilon_{y_{121}}) - \sum_{j=1}^2 \sum_{\kappa=1}^2 R_{ijk},$$

$$a_{1111} = 2m_{\delta} + 2m_0.$$

Следовательно, для координат $q_{11} \div q_{13}$ получим следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} & a_{1111} \ddot{q}_{11} = Q_{11}, \quad a_{1212} \ddot{q}_{12} = Q_{12}, \\ & a_{1313} \ddot{q}_{13} = Q_{13}, \quad a_{1111} = a_{1212} = a_{1313}, \\ & Q_n = 2S_{y_{i1}} - 2 \sum_{j=1}^2 F_{ij1} \varepsilon_{y_{ij1}} - \sum_{j=1}^2 \sum_{\kappa=1}^2 R_{ijk}, \\ & (n = 10 + i, \quad i = \overline{1,3}). \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Наконец, составим уравнения для виляния боковых рам, прежде всего, для координат $\psi_{\delta 11} = \psi_{\delta 12} = q_{14}$.

Здесь действуют моменты $M_{\psi_{ik}}$, $M_{\psi_{ijk}}$, а также силы R_{ijk} , Y_{ijk} :

$$\begin{aligned} & -I_{z\delta} \ddot{\psi}_{\delta 11} - I_{z\delta} \ddot{\psi}_{\delta 12} - m_0 l_m \ddot{y}_{\kappa 11} + m_0 l_m \ddot{y}_{\kappa 12} + \\ & + M_{\psi_{11}} + M_{\psi_{12}} + M_{\psi_{111}} + M_{\psi_{112}} + M_{\psi_{121}} + \\ & + M_{\psi_{122}} + l_m (Y_{111} + Y_{112} - Y_{121} - Y_{122}) - \\ & - l_m (R_{111} + R_{112} - R_{121} - R_{122}) = 0 \end{aligned}$$

С учетом соотношений (7), (9), (11), (19), (16)-(18) это уравнение переписем следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} & a_{1414} \ddot{q}_{14} = Q_{14}, \\ & Q_{14} = 2M_{\psi_{11}} + 4M_{\psi_{111}} - \\ & - 2l_m (F_{111} \varepsilon_{y_{111}} - F_{121} \varepsilon_{y_{121}}) - \\ & - l_m (R_{111} + R_{112} - R_{121} - R_{122}), \\ & a_{1414} = 2I_{z\delta} + 2m_0 l_m^2, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

где $I_{z\delta}$ – момент инерции боковой рамы относительно вертикальной оси.

По аналогии с уравнением (30) запишем все уравнения для виляния боковых рам:

$$\left. \begin{aligned} & a_{1414} \ddot{q}_{14} = Q_{14}, \quad a_{1515} \ddot{q}_{15} = Q_{15}, \\ & a_{1616} \ddot{q}_{16} = Q_{16}, \quad a_{1414} = a_{1515} = a_{1616}, \\ & Q_n = 2M_{\psi_{i1}} + 4M_{\psi_{i11}} + \\ & + 2l_m \sum_{j=1}^2 (-1)^j F_{ij1} \varepsilon_{y_{ij1}} + l_m \sum_{j=1}^2 \sum_{\kappa=1}^2 (-1)^j R_{ijk}, \\ & (n = 13 + i, \quad i = \overline{1,3}). \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Таким образом, составлены все дифференциальные уравнения, описывающие колебания рассматриваемой системы, то есть уравнения (19)–(25), (27), (29), (31), запишем их вместе

$$\left. \begin{aligned} & a_{11} \ddot{q}_1 - a_{12} \ddot{q}_2 = Q_1, \\ & a_{22} \ddot{q}_2 - a_{12} \ddot{q}_1 = Q_2, \\ & a_{33} \ddot{q}_3 = Q_3, \\ & a_{44} \ddot{q}_4 + a_{45} \ddot{q}_5 - a_{46} \ddot{q}_6 = Q_4, \\ & a_{55} \ddot{q}_5 + a_{45} \ddot{q}_4 - a_{56} \ddot{q}_6 = Q_5, \\ & a_{66} \ddot{q}_6 - a_{46} \ddot{q}_4 - a_{56} \ddot{q}_5 = Q_6, \\ & a_{nn} \ddot{q}_n = Q_n \quad (n = \overline{7,16}), \\ & a_0 \ddot{q}_0 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Инерционные коэффициенты и правые части уравнений системы (32) определены выше.

Последнее уравнение системы (32) определяет циклическую координату q_0 и это уравнение не связано с остальными, поэтому его можно исключить.

Координаты q_1 и q_2 , а также q_4 , q_5 и q_6 связаны между собой динамической связью. Для интегрирования ее следует исключить. Исключим динамическую связь между координатами q_1 и q_2 , а затем между q_4 , q_5 и q_6 . Для этого разрешим сначала первое и второе, а затем четвертое, пятое и шестое уравнения из системы (32) относительно соответственно \ddot{q}_1 , \ddot{q}_2 , \ddot{q}_4 , \ddot{q}_5 и \ddot{q}_6 .

В результате получим

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} (a_{22}Q_1 + a_{12}Q_2), \\ \ddot{q}_2 = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} (a_{11}Q_2 + a_{12}Q_1), \\ \ddot{q}_3 = \frac{1}{a_{33}} Q_3. \end{cases} \quad (33)$$

$$a_{nn}^* \ddot{q}_n = Q_n \quad (n = \overline{4, 6}), \quad (34)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_{44}^* &= a_{55}^* = a_{66}^* = a_{44}a_{55}a_{66} + 2a_{45}a_{46}a_{56} - \\ &- a_{46}^2a_{55} - a_{56}^2a_{44} - a_{45}^2a_{66}, \\ Q_4^* &= Q_4(a_{66}a_{55} - a_{56}^2) + Q_5(a_{46}a_{56} - a_{45}a_{66}) + \\ &+ Q_6(a_{46}a_{55} - a_{45}a_{56}), \\ Q_5^* &= Q_5(a_{44}a_{66} - a_{46}^2) + Q_4(a_{46}a_{56} - a_{45}a_{66}) + \\ &+ Q_6(a_{56}a_{44} - a_{45}a_{46}), \\ Q_6^* &= Q_6(a_{44}a_{55} - a_{45}^2) + Q_4(a_{46}a_{55} - a_{45}a_{56}) + \\ &+ Q_5(a_{56}a_{44} - a_{45}a_{46}). \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Система дифференциальных уравнений (31)–(34) может быть проинтегрирована численными методами. Для этого составлена компьютерная программа вычислений [7], которая позволяет определить все необходимые динамические показатели вагона.

Таким образом, предложена математическая модель пространственных колебаний специализированной платформы, при этом модель учитывает конструктивные особенности платформы и особенности взаимодействия тел системы.

Сравнение результатов теоретических [8–11] и экспериментальных [12] исследований специализированной платформы подтверждает хорошую адекватность предложенной математической модели реальной конструкции.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Яловой А. И. Платформа технологическая для совков со скрапом // Проблемы механики залізничного транспорту: Тез. доп. X Міжнар. конф. – Д. – 2000. – С. 204.

2. Яловой А. И. Свидетельство №33392 СССР. Железнодорожная платформа с контейнером для перевозки скрапа / А. И. Яловой, Ю. М. Вродливец, В. Д. Данович, В. А. Приймак. – Оpubл. 1990.
3. Лазарян В. А. Динамика вагонов. – М.: Транспорт, 1964. – 256 с.
4. Данович В. Д. Пространственные колебания вагонов на инерционном пути: Дис. ... д-ра техн. наук: 05.22.07. – Д., 1981. – 465 с.
5. Мямлин С. В. Моделирование динамики рельсовых экипажей. – Д.: Новая идеология, 2002. – 240 с.
6. Вершинский С. В. Динамика вагона / С. В. Вершинский, В. Н. Данилов, И. И. Челноков. – М.: Транспорт, 1972. – 304 с.
7. Пшинько А. Н. Программа моделирования пространственных колебаний железнодорожных экипажей / А. Н. Пшинько, С. В. Мямлин, Е. А. Письменный, А. И. Яловой // Вісник Східноукраїнського нац.ун-ту ім. В. Даля. – Луганськ: Вид-во СНУ ім. В.Даля. – 2004. – № 8. – С. 11–13.
8. Данович В. Д. Способы уменьшения коэффициентов вертикальной динамики технологической платформы для совков со скрапом / В. Д. Данович, А. И. Яловой, С. М. Рябченко // Динамическая нагруженность железнодорожного подвижного состава: Межвуз. сб. науч. тр. – Д.: ДИИТ. – 1988. – С. 76–85.
9. Яловой А. И. Платформа технологическая для совков со скрапом // Проблеми механіки залізничного транспорту: Тез. доп. X Міжнар. конф. – Д. – 2000. – С. 204.
10. Яловой А. И. Теоретические исследования динамических характеристик технологической платформы для совков со скрапом / А. И. Яловой, С. М. Рябченко // Проблеми механіки залізничного транспорту: Тезиси докл. VIII конф. – Д. 1992. – С. 67.
11. Теоретические исследования динамических характеристик технологической платформы для совков со скрапом: Отчет о НИР / Днепропетровский институт инженеров железнодорожного транспорта. – 91.29.87.87; № ГР 01870015529. – Д., 1987. – 98 с.
12. Разработать, изготовить и испытать технологическую платформу грузоподъемностью 130 т для транспортирования на Магнитогорском меткомбинате совков объемом 65 м³ со скрапом: Отчет о НИР (заключит.) / ВНИИВ. – 88.89.1.222; № ГР 01880048725. – Кременчуг, 1989. – 55 с.

Поступила в редколлегию 02.05.2006.