

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ОПОРНО-ОСЕВОГО ТЯГОВОГО ПРИВОДА С УЧЕТОМ КОЛЕБАНИЙ НАДРЕССОРНОГО СТРОЕНИЯ

Розроблена математична модель, що дозволяє визначати значення динамічного моменту на валу тягового двигуна з урахуванням коливань кузова і візків, під час руху локомотива по безперервних і ізольованих нерівностях. Отримані чисельні значення амплітуд коливань кузова, візків і динамічного моменту на валу тягового двигуна під час руху локомотива із швидкістю 160 км/год.

Разработана математическая модель, позволяющая определять значение динамического момента на валу тягового двигателя с учетом колебаний кузова и тележек, при движении локомотива по непрерывным и изолированным неровностям. Получены численные значения амплитуд колебаний кузова, тележек и динамического момента на валу тягового двигателя при движении локомотива со скоростью 160 км/ч.

A mathematical model has been developed allowing to determine a value of dynamic moment on the shaft of a traction motor in view of oscillations of the body and bogies in the locomotive movement on continuous and isolated irregularities. Numerical values of amplitudes of oscillations of a body, vehicles and the dynamic moment on the shaft of a traction motor are obtained at driving the locomotive with a speed 160 km/h.

В связи с вводом в эксплуатацию на железных дорогах Украины скоростных пассажирских поездов [1], появилась необходимость в создании новых типов локомотивов, удовлетворяющих современным требованиям по надежности, тяговым свойствам и эксплуатационным затратам. Как показано в [2], локомотив, предназначенный для тяги малосоставных пассажирских поездов со скоростью до 160 км/ч можно создать на базе асинхронного тягового привода с опорно-осевой подвеской [3–9].

В тяговом приводе протекают основные энергетические процессы, определяющие эффективность локомотива, как тягово-энергетической установки [10]. Механическая часть привода во многом является определяющей с точки зрения как уровня воздействия колес на путь с одной стороны, а с другой стороны динамических сил и моментов на тяговый двигатель и далее на систему электромеханического преобразования энергии [11; 12].

Возникновение сил и моментов, действующих на элементы тягового привода при взаимодействии колеса и рельса в вертикальной плоскости, а также колебания наддресорного строения обусловлены использованием колес и рельсов в качестве элементов подвеса.

Решающим признаком, определяющим нагружение тягового двигателя динамическим моментом является степень непосредственной связи угла поворота ротора тягового двигателя с составляющей возмущения характеризующейся наиболее высоким уровнем скоростей и

ускорений. Применительно к локомотиву с опорно-осевым тяговым приводом, такой составляющей являются вертикальные перемещения колесной пары при взаимодействии с неровностями пути [13; 14]. Возникновение динамического момента на валу тягового двигателя приводит к развитию электромагнитных переходных процессов в его электрической части, что, в конечном счете, неблагоприятно сказывается на качестве реализуемого им электромагнитного момента [15]. Поэтому определение диапазона изменения динамического момента, особенно его верхней границы, на валу тягового двигателя имеет важное значение с точки зрения выбора параметров электрической части тягового привода.

Вместе с тем, при выборе рациональной расчетной схемы, возникает необходимость рассмотреть и колебания элементов наддресорного строения, с целью выяснения степени их влияния на значение динамического момента.

Таким образом, цель работы: определить величину динамического момента на валу тягового двигателя при взаимодействии с различными типами неровностей пути на различных скоростях движения и исследовать влияние колебаний наддресорного строения на его значение; обосновать выбор различных расчетных схем при определении динамического момента на валу тягового двигателя.

Для достижения поставленной цели необходимо:

- создать математическую модель, устанавливающую связь между массогабаритными характеристиками расчетной схемы, возмущающими функциями, скоростью движения и динамическим моментом на валу тягового двигателя;

- провести цифровое моделирование и установить зависимости величины динамического момента от перечисленных параметров;

- на основании анализа полученных результатов привести рекомендации относительно выбора рациональных расчетных схем.

Построение математической модели основывается на следующих допущениях:

- рассматриваемая система состоит из абсолютно жестких тел соединенных упругими элементами, параллельно которым включены гасители колебаний;

- в колебаниях участвует масса тележки и половина массы кузова;

- в качестве возмущения принимается взаимодействие с волнообразными неровностями различной длины и рельсовыми стыками [26–29].

При составлении уравнений движения механической системы тяговый привод – наддрессорное строение используются уравнения Лагранжа второго рода [16; 17; 25]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i, \quad i=1,2,\dots,n, \quad (1)$$

где q_i, \dot{q}_i – обобщенная координата и скорость; Q_i – обобщенная сила не имеющая потенциала; T, Π, Φ – кинетическая, потенциальная и диссипативная энергия системы; n – число степеней свободы системы.

Расчетная схема с учетом колебаний наддрессорного строения представлена системой с тремя степенями свободы (рис. 1).

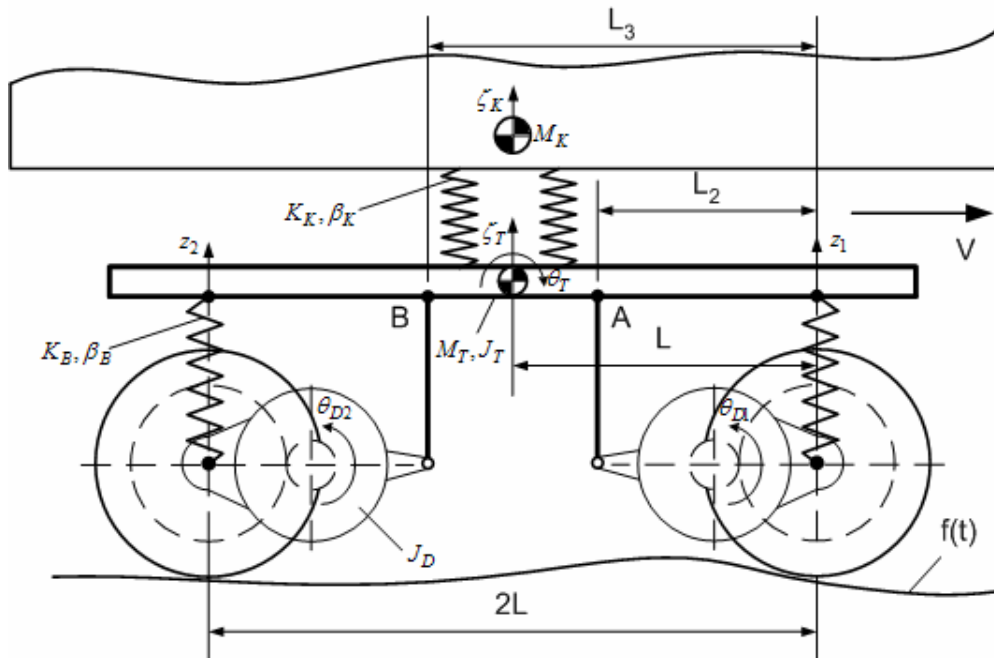


Рис. 1. Расчетная схема

Расчетная схема предполагает жесткое крепление тягового двигателя к раме тележки и отсутствие упругого венца зубчатого колеса, что представляет собой один из наиболее неблагоприятных вариантов конструкции, с точки зрения воздействия на тяговый двигатель динамических сил и моментов [13]. В качестве независимых обобщенных координат системы выбраны вертикальные перемещения центра масс рамы тележки ζ_T , поворот рамы тележки вокруг поперечной оси проходящей через центр масс θ_T и вертикальные перемещения кузова ζ_K . Также введены в рассмотрение уг-

ловые координаты поворота остовов тяговых двигателей θ_{D1} и θ_{D2} . Обратим внимание на то, что координаты θ_{D1} и θ_{D2} не являются независимыми, так как полностью определяются вертикальными перемещениями точек А и В на раме тележки (см. рис. 1) и неровностями рельсового пути, описываемыми функцией $f(t)$.

Кинетическая энергия системы имеет вид

$$T = \frac{1}{2} M_T \dot{\zeta}_T^2 + \frac{1}{2} J_T \dot{\theta}_T^2 + \frac{1}{2} M_K \dot{\zeta}_K^2 + \frac{1}{2} J_D \dot{\theta}_{D1}^2 + \frac{1}{2} J_D \dot{\theta}_{D2}^2, \quad (2)$$

где M_T, J_T – масса и момент инерции рамы тележки с установленным на ней оборудованием; M_K – половина массы кузова; J_D – момент инерции тягового двигателя относительно поперечной оси, проходящей через его центр масс.

Потенциальная энергия системы имеет вид

$$\Pi = \frac{1}{2}k_B(z_1 - f(t))^2 + \frac{1}{2}k_B(z_2 - f(t - \tau))^2 + \frac{1}{2}k_K(\zeta_K - \zeta_T)^2, \quad (3)$$

где k_B, k_K – жесткость пружин буксовой и кузовной ступени; $\tau = 2L/V$ – транспортное запаздывание.

Выражение диссипативной энергии аналогично выражению потенциальной энергии

$$\Phi = \frac{1}{2}\beta_B(\dot{z}_1 - \dot{f}(t))^2 + \frac{1}{2}\beta_B(\dot{z}_2 - \dot{f}(t - \tau))^2 + \frac{1}{2}\beta_K(\dot{\zeta}_K - \dot{\zeta}_T)^2, \quad (4)$$

где β_B, β_K – коэффициенты демпфирования гасителей колебаний буксовой и кузовной ступени.

Выражения кинетической и потенциальной энергии с диссипативной энергией мы записали в разных координатах. Это приводит к отсутствию во всех выражениях произведений координат или скоростей. Но поскольку для численного решения математической модели необходимо иметь одинаковые обобщенные координаты во всех уравнениях, выразим координаты $\zeta_T, \theta_T, \zeta_K, \theta_{D1}, \theta_{D2}$ через z_1, z_2 и $f(t)$ [18].

Рассмотрим систему в одном из положений при колебаниях относительно положения статического равновесия (рис. 2).

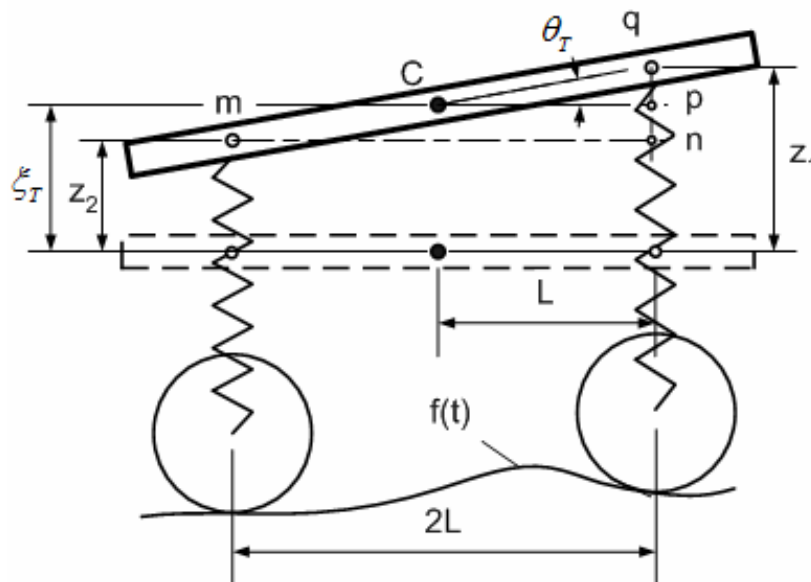


Рис. 2. К определению обобщенных координат

На схеме видно, что треугольник mnq подобен треугольнику crq . Следовательно,

$$nq/pq = 2L/L,$$

$$pq = nq \cdot L/2L = nq/2.$$

Таким образом,

$$\zeta_T = z_1 - pq = z_1 - nq/2,$$

но поскольку

$$nq = z_1 - z_2,$$

то

$$\zeta_T = z_1 - \frac{z_1 - z_2}{2}. \quad (5)$$

Поскольку рассматриваются малые колебания, принимаем $\sin \theta_T \approx \theta_T$. Следовательно,

$$\theta_T = \frac{z_1 - z_2}{2L}. \quad (6)$$

Аналогичным образом получим выражения для θ_{D1} и θ_{D2} . Угловые координаты поворота тяговых двигателей θ_{D1} и θ_{D2} определяются вертикальными перемещениями z_A и z_B , а также функцией вертикальных неровностей пути – $f(t)$ (см. рис. 1). Таким образом,

$$\theta_{D1} = \frac{f(t) - z_A}{L_2},$$

$$\theta_{D2} = \frac{z_B - f(t - \tau)}{L_2}. \quad (7)$$

Выразим z_A и z_B через z_1 и z_2

$$\begin{aligned} z_A &= z_1 - \frac{L_2(z_1 - z_2)}{2L}, \\ z_B &= z_1 - \frac{L_3(z_1 - z_2)}{2L}. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставив (8) в (7) и проведя необходимые преобразования, получим:

$$\begin{aligned} \theta_{D1} &= -\frac{2L \cdot z_1 - L_2 \cdot z_1 + L_2 \cdot z_2 - 2L \cdot f(t)}{2 \cdot L \cdot L_2}, \\ \theta_{D2} &= \frac{2L \cdot z_1 - L_3 \cdot z_1 + L_3 \cdot z_2 - 2L \cdot f(t - \tau)}{2 \cdot L \cdot L_2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Переход от угловой координаты поворота остова тягового двигателя к угловой координате поворота ротора осуществляется с помощью выражения [13; 21]:

$$\theta_{Ri} = (1 + u)\theta_{Di}, \quad (10)$$

где θ_{Ri} – угловая координата поворота ротора; u – передаточное отношение зубчатого редуктора.

Принимая $\zeta_K = z_3$ и подставляя (5), (6) и (9) в (2), получим окончательно выражение кинетической энергии

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M_T \left(\dot{z}_1 - \frac{\dot{z}_1 - \dot{z}_2}{2} \right)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} J_T \left(\frac{\dot{z}_1 - \dot{z}_2}{2L} \right)^2 + \frac{1}{2} M_K \dot{z}_3^2 + \frac{1}{2} J_D \times \\ &\times \left(-\frac{2L\dot{z}_1 - L_2\dot{z}_1 + L_2\dot{z}_2 - 2L\dot{f}(t)}{2LL_2} \right)^2 + \frac{1}{2} J_D \times \\ &\times \left(\frac{2L\dot{z}_1 - L_3\dot{z}_1 + L_3\dot{z}_2 - 2L\dot{f}(t - \tau)}{2LL_2} \right)^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Выражения потенциальной энергии и диссипативной функции системы соответственно имеют вид

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} k_B (z_1 - f(t))^2 + \frac{1}{2} k_B (z_2 - f(t - \tau))^2 + \\ &+ \frac{1}{2} k_K \left(z_3 - \left(z_1 - \frac{z_1 - z_2}{2} \right) \right)^2, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2} \beta_B (\dot{z}_1 - \dot{f}(t - \tau))^2 + \frac{1}{2} \beta_B (\dot{z}_2 - \dot{f}(t))^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \beta_K \left(\dot{z}_3 - \left(\dot{z}_1 - \frac{\dot{z}_1 - \dot{z}_2}{2} \right) \right)^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Производя необходимые операции дифференцирования согласно (1), получим систему уравнений описывающих вынужденные колебания рассматриваемой системы

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M_T \left(\frac{\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2}{2} \right) + \frac{J_T}{4L^2} (\ddot{z}_1 - \ddot{z}_2) + \frac{J_D}{L_2^2} \times \\ \times \left(\ddot{f}(t) - \ddot{z}_2 + \frac{L_2}{2L} (\ddot{z}_1 - \ddot{z}_2) \right) \left(-1 + \frac{L_2}{2L} \right) - \frac{J_D}{L_2^2} \times \\ \times \left(\ddot{z}_1 - \frac{L_2}{2L} (\ddot{z}_1 - \ddot{z}_2) - \ddot{f}(t - \tau) \right) \left(1 - \frac{L_3}{2L} \right) + \\ + \beta_B (\dot{z}_1 - \dot{f}(t - \tau)) - \frac{1}{2} \beta_K \left(\dot{z}_3 - \frac{\dot{z}_1}{2} - \frac{\dot{z}_2}{2} \right) + \\ + k_B (z_1 - f(t)) - \frac{1}{2} k_K \left(z_3 - \frac{z_1}{2} - \frac{z_2}{2} \right) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M_T \left(\frac{\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2}{2} \right) + \frac{J_T}{4L^2} (\ddot{z}_1 - \ddot{z}_2) - \frac{J_D}{2L_2L} \times \\ \times \left(\ddot{f}(t) - \ddot{z}_1 - \frac{L_2}{2L} (\ddot{z}_1 - \ddot{z}_2) \right) + \frac{J_D L_3}{2L_2^2 L} \times \\ \times \left(\ddot{z}_1 - \frac{L_3}{2L} (\ddot{z}_1 - \ddot{z}_2) - \ddot{f}(t - \tau) \right) + \beta_B (\dot{z}_2 - \dot{f}(t)) - \\ - \frac{1}{2} \beta_K \times \left(\dot{z}_3 - \frac{\dot{z}_1}{2} - \frac{\dot{z}_2}{2} \right) + k_B (z_2 - f(t - \tau)) - \\ - \frac{1}{2} k_K \left(z_3 - \frac{z_1}{2} - \frac{z_2}{2} \right) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_K \ddot{z}_3 + \beta_K \left(\dot{z}_3 - \frac{\dot{z}_1}{2} - \frac{\dot{z}_2}{2} \right) + \\ + k_K \left(z_3 - \frac{z_1}{2} - \frac{z_2}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

В качестве функции, моделирующей изолированные неровности, используется усредненная геометрическая неровность, описываемая функцией [19]

$$f(t) = \frac{\eta}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi V t}{S} \right) \right), \quad (13)$$

где η – глубина неровности; V – скорость движения локомотива; S – длина неровности.

Длина неровностей такого типа может колебаться от нескольких сантиметров до нескольких метров.

Если длина неровностей меньше базы тележки, то возмущения необходимо задавать в соответствии со следующим условиями [20]:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\eta}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi V t}{S}\right) \right) & \text{при } 0 < t \leq t_N; \\ 0 & \text{при } t_N < t \leq \tau; \\ 0 & \text{при } \tau < t \leq (\tau + t_N); \\ 0 & \text{при } (\tau + t_N) < t \leq T, \end{cases}$$

$$f(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < t \leq t_N; \\ 0 & \text{при } t_N < t \leq \tau; \\ \frac{\eta}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi V (t - \tau)}{S}\right) \right) & \text{при } \tau < t \leq (\tau + t_N); \\ 0 & \text{при } (\tau + t_N) < t \leq T, \end{cases}$$

где $t_N = S/V$ – время прохождения неровности; T – период повторения неровности; $\tau = 2L/V$ – транспортное запаздывание.

Цифровое моделирование проводилось для скорости движения 160 км/ч, при следующих значениях основных параметров расчетной схемы:

$$M_T = 7\,000 \text{ кг}, \quad M_K = 30\,000 \text{ кг},$$

$$J_T = 14\,000 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, \quad J_D = 1\,000 \text{ кг}\cdot\text{м}^2,$$

$$k_B = 3 \cdot 10^6 \text{ Н/м}, \quad k_K = 0,5 \cdot 10^6 \text{ Н/м},$$

$$\beta_B = 6 \cdot 10^4 \text{ Н/(м/с)}, \quad \beta_K = 8 \cdot 10^4 \text{ Н/(м/с)},$$

$$L = 1,3 \text{ м}, \quad L_2 = 1 \text{ м}, \quad L_3 = 1,6 \text{ м}.$$

Рассматривалось прохождение локомотива по участку пути, имеющему волнообразный износ рельсов с длиной волны 3 м при амплитуде 2 мм, и взаимодействие с рельсовым стыком.

В результате цифрового моделирования [22–24] были получены амплитуды колебаний подпрыгивания и галопирования тележки, амплитуды колебаний подпрыгивания кузова и амплитуды динамических моментов на валах тяговых двигателей для указанных вариантов расчета.

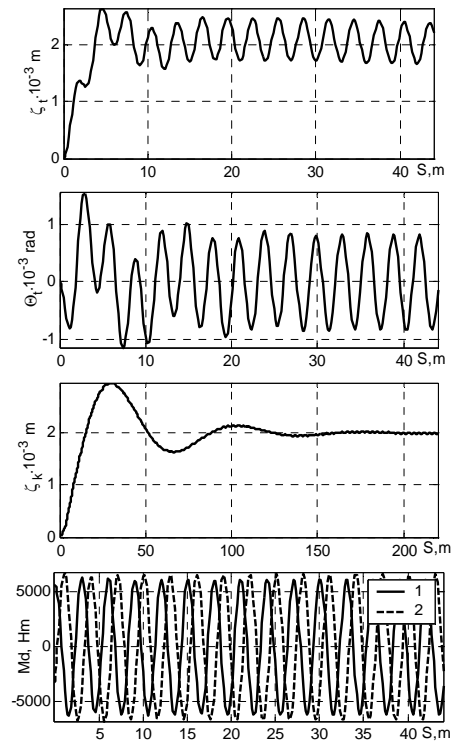


Рис. 3. Зависимости перемещений подпрыгивания и галопирования тележки, перемещений подпрыгивания кузова и амплитуд динамических моментов на валах тяговых двигателей от пройденного пути при взаимодействии локомотива с волнообразными неровностями рельсового пути на скорости 160 км/ч

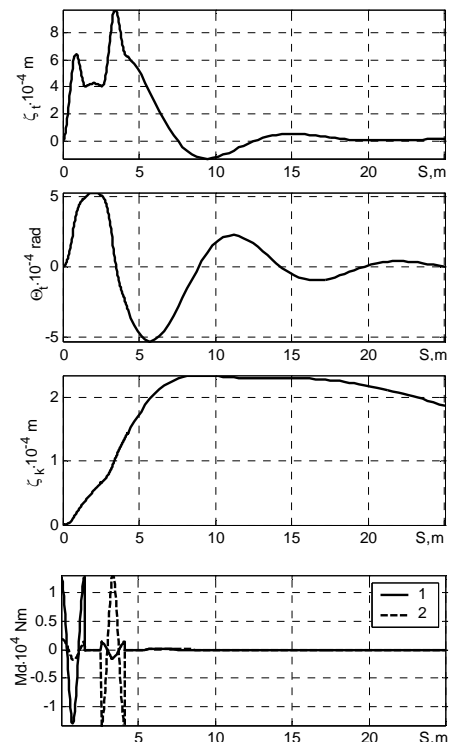


Рис. 4. Зависимости перемещений подпрыгивания и галопирования тележки, перемещений подпрыгивания кузова и амплитуд динамических моментов на валах тяговых двигателей от пройденного пути при проходе стыка рельсов на скорости 160 км/ч

Из графиков, приведенных на рис. 3 видно, что при взаимодействии локомотива с волнообразными неровностями перемещения подпрыгивания и галопирования тележки носят установившийся периодический характер с амплитудами $2,5 \cdot 10^{-3}$ м и $1 \cdot 10^{-3}$ рад соответственно. Перемещения подпрыгивания кузова имеют быстрозатухающий всплеск и далее происходят с малой амплитудой около значения $2 \cdot 10^{-3}$ м. Колебания динамического момента на валах тяговых двигателей имеют амплитуду порядка 5 200 Нм и происходят с частотой равной частоте возмущающего воздействия. Как видно на графиках, частота колебаний динамических моментов на валах тяговых двигателей, по меньшей мере, в 2 раза превосходит частоту колебаний элементов наддресорного строения. Это позволяет сделать вывод, что влияние колебаний наддресорного строения на величину динамического момента в этом случае незначительно.

При прохождении рельсового стыка перемещения тележки, как это видно на рис. 4, имеют характерные пики, которые практически затухают до прохождения следующего стыка, если принять длину рельсового звена равной 25 м. Колебания подпрыгивания кузова затухают несколько медленнее, что по видимому обусловлено его более низкой собственной частотой колебаний. Скачки динамического момента имеют место, как это видно на графике, непосредственно в момент прохода колесами рельсовых стыков. Величина динамического момента достигает при этом 12 000 Нм, что почти в 2,5 раза превосходит величину номинального момента, реализуемого тяговым двигателем. Взаимодействие колеса со стыком рельсов происходит за очень короткий промежуток времени и носит практически ударный характер. Перемещения элементов наддресорного строения, вызванные этим взаимодействием, как видно на графиках, достаточно малы и не оказывают заметного влияния на величину динамического момента.

Как показал расчет, максимальные величины динамической составляющей момента на валу тягового двигателя при скорости движения 160 км/ч могут превосходить величину номинального момента, реализуемого двигателем, и вызывать развитие переходных процессов в электрической части тягового двигателя и питающем его преобразователе. Результаты цифрового моделирования показали, что учет колебаний наддресорного строения при определении величины динамического момента на валах тяговых двигателей для рассмотренных вариантов не является определяющим.

Выводы

1. Разработана математическая модель, позволяющая анализировать динамические процессы в механической части тягового привода с учетом влияния колебаний наддресорного строения локомотива.

2. Максимальные величины динамических моментов на валах тяговых двигателей при скорости 160 км/ч, полученных в результате цифрового моделирования, составляют: 5 200 Нм – при движении по волнообразным неровностям и 12 000 Нм – при взаимодействии с рельсовым стыком, что требует их обязательного учета при моделировании системы электромеханического преобразования энергии.

3. Колебания наддресорного строения локомотива не оказывают определяющего влияния на значения динамических моментов на валах тяговых двигателей. Это дает возможность использовать для определения динамических моментов на валах тяговых двигателей более простую модель, рассматривающую движение отдельного колесно-моторного блока.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кірпа Г. М. Інтеграція залізничного транспорту України у європейську транспортну систему: Монографія. 2-ге вид., переробл. і допов. – Д.: Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім акад. В. Лазаряна, 2004. – 248 с.
2. Кривякин Г. В. Возможности повышения скоростей движения пассажирских локомотивов, обусловленные применением тяговой передачи с опорно-осевой подвеской на базе асинхронных тяговых двигателей // Вестник Национального технического университета «Харьковский политехнический институт»: Сборник научных трудов. Тематический выпуск: Автомобиле- и тракторостроение. – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2004. – № 24. – С. 35–40.
3. Ротанов Н. А. Электроподвижной состав с асинхронными тяговыми двигателями / Н. А. Ротанов, Ю. Г. Быков и др; Под ред. Н. А. Ротанова. – М.: Транспорт, 1991. – 336 с.
4. Тепловозы XXI века // Железные дороги мира. – 1999. – № 3. – С. 38–42.
5. Пропп Д. Х., Тепловозы с асинхронным приводом и их эксплуатация // Железные дороги мира. – 1997. – №9. – С. 28–29.
6. Европейские электровозы нового поколения // Железные дороги мира. – 1997. – № 10. – С. 9–40.
7. Семейство электровозов Euro Sprinter // Железные дороги мира. – 1999. – № 11. – С. 5–10.
8. Тепловозы с электрической передачей переменного тока на железных дорогах США // Железные дороги мира. – 1997. – № 1. – С. 23–26.

9. Мощный тепловоз AC6000 компании General Electric // Железные дороги мира. – 1998. – № 3. – С. 26–31.
10. Бахвалов Ю. А. / Моделирование электромеханической системы электровоза с асинхронным тяговым приводом / Ю. А. Бахвалов, А. А. Зарифьян и др. – М.: Транспорт, 2001 – 286 с.
11. Вериго М. Ф. Взаимодействие пути и подвижного состава / М. Ф. Вериго, А. Я. Коган; Под ред. М. Ф. Вериго. – М.: Транспорт, 1986. – 559 с.
12. Бочаров В. И. Тяговые двигатели электровозов / В. И. Бочаров, В. И. Захаров и др.; Под ред. В. Г. Щербакова. – Новочеркасск: Агентство Наутилус, 1998. – 672 с.
13. Бирюков И. В. Тяговые передачи электроподвижного состава железных дорог. – М.: Транспорт, 1986. – 256 с.
14. Павленко А. П. Динамика тяговых приводов магистральных локомотивов. – М.: Машиностроение, 1991. – 192 с.
15. Никитенко А. Г. Математическое моделирование динамики электровозов / А. Г. Никитенко, Е. М. Плохов и др.; Под ред. А. Г. Никитенко. М., Высш. шк., 1998. – 274 с.
16. Николаи Е. Л. Теоретическая механика. Ч. 2. – М.: ГИТТЛ, 1950. – 484 с.
17. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. – М.: ГИФМЛ, 1960. – 296 с.
18. Мандельштам Л. И. Лекции по колебаниям. – М.: Издательство академии наук СССР, 1955. – 503 с.
19. Кудрявцев Н. Н. Исследование динамики необрессоренных масс вагонов // Труды ВНИИЖТ.– Транспорт. – 1965. – Вып. 287.
20. Криволинейное движение рельсовых транспортных средств / Радченко Н. А. – К.: Наук. Думка, 1988. – 216 с.
21. Колчин Н. И. Механика машин. Т. 1. – Л.: Машиностроение, 1971. – 560 с.
22. Поршнева С. В. Компьютерное моделирование физических процессов в пакете MATLAB. – М.: Горячая линия. – Телеком, 2003. – 592 с.
23. Потемкин В. Г. Вычисления в среде MATLAB. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2004. – 720 с.
24. Чен К. MATLAB в математических исследованиях / К. Чен, П. Джиблинг, А. Ирвинг; Пер. с англ. – М.: Мир, 2001. – 346 с.
25. Ушкалов В. Ф. Математическое моделирование колебаний рельсовых транспортных средств / Ушкалов В. Ф., Резников Л. М. и др.; Под ред. В. Ф. Ушкалова; АН УССР. Ин-т техн. механики. – К.: Наук. думка, 1989. – 240 с.
26. Кларк Р. Волнообразный износ рельсов // Железные дороги мира. – 1985. – № 3. – С. 55–60.
27. Кулагин М. И. Волнообразный износ рельсов / М. И. Кулагин, Э. И. Кац, В. Н. Тюрников. – М.: Транспорт, 1970. – 144 с.
28. Пахомов М. П. Воздействие на путь электровоза в зоне стыка // Вестн. ВНИИЖТ. – 1957. – № 4. – С. 30–34.
29. Ушкалов В. Ф. Анализ вертикальных ускорений буксовых узлов транспортного экипажа при движении со скоростями до 245 км/ч / В. Ф. Ушкалов, С. Ф. Редько, В. В. Кулябко, В. П. Шабельский. // Некоторые задачи механики скоростного наземного транспорта. – К., 1974. – С. 111–116.

Поступила в редколлегию 14.09.2005.