

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛАНА ФОРМИРОВАНИЯ ПОЕЗДОВ

Запропоновано економіко-математичну модель плану формування поїздів у вигляді задачі цілочислового лінійного програмування.

Предлагается экономико-математическая модель плана формирования поездов в виде задачи целочисленного линейного программирования.

The article offers an economic & mathematical model of trains formation plan in the shape of a linear programming problem.

Рациональная организация вагонопотоков – одна из важнейших задач совершенствования эксплуатационной деятельности железных дорог. Задача эта является многовариантной, ее решение требует применения вычислительной техники. Решению этой задачи посвящены работы Бернгарда К. А., Попсуева А. В., Стопичева С. Г. и Родыка В. В., Кочнева Ф. П. и Сотникова И. Б., Бурдюк Т. А. и др. Существующие методы расчета плана формирования поездов, как правило, используют принцип сопоставления приведенных вагоно-часов накопления и переработки.

В условиях рыночной экономики в основу расчета плана формирования поездов целесообразно положить принцип стоимостных сопоставлений, т. к. с экономической точки зрения следует так организовать вагонопотоки, чтобы обеспечить не только рациональное использование транспортных средств, но и по возможности сократить стоимость доставки грузов, находящихся в процессе перевозки. Имеет смысл учитывать расходы, связанные с переработкой вагона (переменные, которые зависят от объема работы и постоянные, не зависящие от объема работы) и расходы, связанные с пропуском вагона через станцию без переработки. При этом выгодность выделения вагонопотоков в самостоятельное назначение можно определить путем сравнения затрат на накопление и переработку с учетом ценности грузов и вагонов в каждой струе. Такой подход предлагается в работе А. В. Попсуева и А. Г. Тиличенко с последующим построением линейной оптимизационной модели. Однако модель для решения этой задачи должна учитывать ее дискретный характер.

Задачу поставим следующим образом: задана схема назначений струй вагонопотоков прямолинейного назначения в двух встречных направлениях, содержащая  $n$  станций, для каждой струи известны ее мощность и затраты, связанные с вагоно-часами накопления; известна также оценка экономии, приходящейся на один вагон при проследовании определенной

станции без переработки. Кроме того, известно число путей на каждой станции, которые можно использовать под накопление вагонов и перерабатывающая способность каждой станции. Необходимо определить какие из струй целесообразно выделить в самостоятельное назначение, а какие нужно пропустить с переработкой и на каких станциях переработать, чтобы все вагоны прибыли в соответствии с назначением и при этом суммарные затраты на накопление и переработку вагонов были бы минимальными.

Математическая модель плана формирования поездов прямолинейного направления при этом может быть записана таким образом:

$$\sum_{p=1}^{n-2} \left( \sum_{q=p+2}^n \left[ C_{pq} x_{pq} + R_{pq} \sum_{w=p+1}^{q-1} d_{pqw} x_{pqw} \right] \right) + \sum_{p=3}^n \left( \sum_{q=1}^{p-2} \left[ C_{pq} y_{pq} + R_{pq} \sum_{w=q+1}^{p-1} d_{pqw} y_{pqw} \right] \right) \rightarrow \min. \quad (1)$$

$$\sum_{w \in J_{pqmk}} x_{pqw} + \sum_{\substack{u=p \\ u \notin J_{pqmk}}}^{j_{pqm1}-1} \left( \sum_{\substack{v=j_{pqm1}+1 \\ v \notin J_{pqmk}}}^q x_{uv} \right) \geq 1, \quad (2)$$

где  $p = \overline{1, (n-2)}$ ;  $q = \overline{(p+2), n}$ ;  $J_{pqmk} = \{j_{pqm1}, j_{pqm2}, \dots, j_{pqmk}\}$  –  $m$ -е  $k$ -подмножество (сочетание) из множества  $\{p+1, p+2, \dots, q-2, q-1\}$ ;  $j_{pqmi+1} > j_{pqmi}$ ,

$$i = \overline{1, (k-1)}; \quad m = \overline{1, C_{q-p-1}^k}; \quad k = \overline{1, (q-p-1)}.$$

$$\sum_{w \in J_{pqmk}} y_{pqw} + \sum_{\substack{v=q \\ v \notin J_{pqmk}}}^{j_{pqmk}-1} \left( \sum_{\substack{u=j_{pqmk}+1 \\ u \notin J_{pqmk}}}^p y_{uv} \right) \geq 1, \quad (3)$$

где  $q = \overline{1, (n-2)}$ ;  $p = \overline{(q+2), n}$ ;  $J_{pqmk} = \{j_{pqm1}, j_{pqm2}, \dots, j_{pqmk}\}$  –  $m$ -е  $k$  – о подмножество (сочетание) из множества  $\{q+1, q+2, \dots, p-2, p-1\}$ ;  $j_{pqmi} > j_{pqmi+1}$ ,

$$i = \overline{1, (k-1)}; m = \overline{1, C_{q-p-1}^k}; k = \overline{1, (q-p-1)}.$$

$$\sum_{q=p+2}^n x_{pq} + \sum_{q=1}^{p-2} y_{pq} \leq a_p, \quad p = \overline{1, (n-2)}; \quad (4)$$

$$\sum_{p=1}^{n-2} \sum_{q=p+2}^n R_{pq} x_{pql} + R_l +$$

$$+ \sum_{q=1}^{n-2} \sum_{p=q+2}^n R_{pq} y_{pql} + R'_l \leq r_l, \quad (5)$$

$$l = \overline{2, (n-1)};$$

$$x_{pqw} = \begin{cases} 1, \text{ вагоны струи } (pq), \\ \text{перерабатываются на станции } w, \\ 0, \text{ переработка струи } (pq), \\ \text{на станции } w \text{ отсутствует;} \end{cases} \quad (6)$$

$$p = \overline{1, (n-2)}; q = \overline{(p+2), n}, \quad w = \overline{(p+1), (q-1)};$$

$$x_{pq} = \begin{cases} 1, \text{ струя } (pq) \text{ выделяется,} \\ \text{в самостоятельное назначение,} \\ 0, \text{ струя } (pq) \text{ не выделяется,} \\ \text{в самостоятельное назначение;} \end{cases} \quad (7)$$

$$p = \overline{1, (n-2)}, \quad q = \overline{(p+2), n};$$

$$y_{pqw} = \begin{cases} 1, \text{ вагоны струи } (pq), \\ \text{перерабатываются на станции } w, \\ 0, \text{ переработка струи } (pq), \\ \text{на станции } w \text{ отсутствует;} \end{cases} \quad (8)$$

$$p = \overline{3, n}, \quad q = \overline{1, (p-2)}, \quad w = \overline{(q+1), (p-1)};$$

$$y_{pq} = \begin{cases} 1, \text{ струя } (pq) \text{ выделяется,} \\ \text{в самостоятельное назначение,} \\ 0, \text{ струя } (pq) \text{ не выделяется,} \\ \text{в самостоятельное назначение;} \end{cases} \quad (9)$$

$$p = \overline{1, (n-2)}; q = \overline{(p+2), n};$$

$n$  – число станций, участвующих в расчете плана формирования поездов;  $(pq)$  – струя со

станции зарождения  $p$  и станции назначения  $q$ ;  $C_{pq}$  – затраты на вагоно-часы накопления для струи  $(pq)$ ;  $d_{pqw}$  – оценка экономии времени, приходящейся на один вагон, проследовавший станцию  $w$  со струей  $(pq)$  без переработки;  $R_{pq}$  – мощность струи  $(pq)$  вагонопотока;  $a_p$  – число путей на станции  $p$ , которые можно использовать для накопления;  $R_l, R'_l$  – величины участковых вагонопотоков со станции  $l$  в прямом и обратном направлениях;  $r_l$  – перерабатывающая способность станции  $l$ .

Блок основных ограничений (2) предназначен для обеспечения возможности доставки каждого вагона, следующего в прямом направлении (станция 1 – станция  $n$ ), от пункта отправления до пункта назначения.

Блок основных ограничений (3) предназначен для обеспечения возможности доставки каждого вагона, следующего в обратном направлении (станция  $n$  – станция 1), от пункта отправления до пункта назначения.

Блок дополнительных ограничений (4) позволяет учесть количество путей, которые можно использовать под накопление.

Блок дополнительных ограничений (5) позволяет учесть перерабатывающую способность станции.

В общем виде поставленную задачу можно записать следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{2M} \gamma_j z_j \rightarrow \min, \quad (10)$$

$$\sum_{j=1}^{2M} b_{ij} z_j \geq 1, \quad i = \overline{1, 2N}, \quad (11)$$

$$\sum_{j=1}^{2M} f_{kj} z_j \leq a_k, \quad k = \overline{1, n}, \quad (12)$$

$$\sum_{j=1}^{2M} h_{lj} z_j \leq r_l, \quad l = \overline{2, n-2}, \quad (13)$$

$$z_j = \begin{cases} 1, \\ 0 \end{cases} \quad j = \overline{1, 2M}. \quad (14)$$

$$z_j \sim x_{pq}, \quad j = \overline{1, M},$$

$$p = \overline{1, n-2} \quad q = \overline{3, n}$$

$$z_j \sim y_{pq} \quad j = \overline{M+1, 2M},$$

$$p = \overline{3, n}, \quad q = \overline{1, n-2}$$

где  $M$  – число переменных.

Таким образом, модель сведена к задаче целочисленного линейного программирования с переменными, которые могут принимать только два значения 0 или 1.

Расчет компонентов вектора коэффициентов целевой функции и элементов системы ограничений представляет собой весьма сложную и громоздкую задачу. Предлагается алгоритм для ее решения.

### Алгоритм построения матрицы основных ограничений

Пусть число переменных для схемы вагонопотоков одного направления (ограничение (2))

$$M = \left[ \frac{(n-1)(n-2)(n+3)}{6} \right],$$

число строк в блоке ограничений (2)

$$N = \sum_{m=0}^{n-3} \sum_{s=1}^{m+1} (2^s - 1),$$

где  $n$  – число станций.

$$b_{ij} = 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, M}.$$

**Шаг 1.**  $i = 1$   $b_{i1} = 1$ ,  $b_{i2} = 1$ ,

$$b_{N+1, M+1} = 1, \quad b_{N+2, M+21} = 1.$$

**Шаг 2.**  $p = n - 3$   $q = p + 2$

**Шаг 3.**

$$\lambda_1 = \frac{(n-p-1)(n-p-2)(n-p+3)}{6}.$$

**Шаг 4.**

$$\lambda = \lambda_1 + \frac{(q-p+1)(q-p-2)}{2} + 1,$$

$nc = q - p - 1$ ,  $i = i + 1$ ,  $b_{i, \lambda+v} = 1$ ,  $b_{i+N, \lambda+v+M} = 1$ , для всех  $v = \overline{0, nc}$ ,  $k = 1$ . Если  $k = nc$ , то перейти к шагу 20. Если  $k \neq nc$ , то перейти к шагу 5.

**Шаг 5.**  $r_e = e$  для всех  $e = \overline{1, k}$ ,  $t = k$ .

**Шаг 6.**  $i = i + 1$ ,  $b_{i\lambda} = 1$ ,  $b_{N+i, M+\lambda} = 1$ ,

$S_e = p + r_e$  для всех  $e = \overline{1, k}$ .

**Шаг 7.**  $j = \lambda + r_e$ ,  $b_{ij} = 1$ ,  $b_{N+i, M+j} = 1$ , для всех  $e = \overline{1, k}$ .

**Шаг 8.**  $p_1 = p$ .

**Шаг 9.**  $k_1 = k$ .

**Шаг 10.** Если  $p_1 = p$ , то  $q_1 = q - 1$ . Если  $p_1 \neq p$ , то  $q_1 = q$ .

**Шаг 11.** Если  $q_1 > S_{k_1}$ , то

$$j = 1 + \frac{(n-p_1-1)(n-p_1-2)(n-p_1+3)}{6} + \frac{(q_1-p_1+1)(q_1-p_1-2)}{2},$$

$b_{ij} = 1$ ,  $b_{N+i, M+j} = 1$ . Перейти к шагу 12. Если  $q_1 \leq S_{k_1}$ , то  $q_1 = S_{k_1} - 1$ ,  $k_1 = k_1 - 1$ . Перейти к шагу 13.

**Шаг 12.**  $q_1 = q_1 - 1$ . Перейти к шагу 11.

**Шаг 13.** Если  $k_1 \geq 1$ , то перейти к шагу 11. Если  $k_1 < 1$ , то  $p_1 = p_1 + 1$  и перейти к шагу 14.

**Шаг 14.** Если  $p_1 < S_1$ , то перейти к шагу 9, если  $p_1 = S_1$ , то перейти к шагу 15.

**Шаг 15.** Если  $r_t < nc$ , то  $r_t = r_t + 1$  и перейти к шагу 6. Если  $r_t = nc$ , то перейти к шагу 16.

**Шаг 16.**  $t = t - 1$ . Если  $t = 0$ , то  $k = k + 1$  и перейти к шагу 19. Если  $t > 0$ , то  $r_t = r_t + 1$  и перейти к шагу 17.

**Шаг 17.** Если  $r_t = nc$ , то перейти к шагу 16. Если  $r_t < nc$ , то  $t = t + 1$ ,  $r_t = r_{t-1} + 1$  и перейти к шагу 18.

**Шаг 18.** Если  $t < k$ , то перейти к шагу 17. Если  $t = k$ , то перейти к шагу 6.

**Шаг 19.** Если  $k < nc$ , то перейти к шагу 5. Если  $k \geq nc$ , то перейти к шагу 20.

**Шаг 20.**  $q = q + 1$ . Если  $q \leq nc$ , то перейти к шагу 4. Если  $q > nc$ , то  $p = p - 1$ .

**Шаг 21.** Если  $p \geq 1$ , то  $q = p + 2$  и перейти к шагу 3. Если  $p = 0$ , то система ограничений построена.

### Алгоритм построения коэффициентов функции цели и матрицы дополнительных ограничений

**Шаг 1.**

$$M = \frac{(n-1)(n-2)(n+3)}{6}$$

$$p = 0, \quad \gamma_j = 0, \quad j = \overline{1, 2M}$$

**Шаг 2.**  $p = p + 1$ ,

$$\lambda_1 = \frac{(n-p-1)(n-p-2)(n-p+3)}{6}.$$

Если  $p > n - 2$ , то перейти к шагу 11. Если  $p \leq n - 2$ , то перейти к шагу 3.

**Шаг 3.**  $q = p + 2$ ,  $l = q - p$ .

**Шаг 4.**  $w = p$

**Шаг 5.**□

$$\lambda = \lambda_1 + \frac{(l+1)(l-2)}{2} + (w-p) + 1.$$

**Шаг 6.**□ Если  $w = p$ , то,

$$\gamma_\lambda = C_{pq} \quad \gamma_{\lambda+M} = C_{n-p+1, n-q+1},$$
$$f_{p\lambda} = 1, \quad f_{n-p+1, \lambda+M} = 1$$

и перейти к шагу 7. Если  $w \neq p$ , то

$$\gamma_\lambda = R_{pq} d_{pqw},$$

$$\gamma_{\lambda+M} = R_{n-p+1, n-q+1} \cdot d_{n-p+1, n-q+1, n-w+1},$$

$$h_{w\lambda} = R_{pq}, \quad h_{n-w+1, \lambda+M} = R_{n-p+1, n-q+1}.$$

и перейти к шагу 7.

**Шаг 7.**□  $w = w + 1$ .

**Шаг 8.**□ Если  $w \leq q - 1$ , то перейти к шагу 5.

Если  $w > q - 1$ , то перейти к шагу 9.

**Шаг 9.**□  $q = q + 1$ .

**Шаг 10.**□ Если  $q \leq n$ , то перейти к шагу 4.

Если  $q > n$ , то перейти к шагу 2.

**Шаг 11.**□ Вектор коэффициентов функции цели и матрицы дополнительных ограничений построены.

Если количество путей станции, выделенных под накопление, и часть перерабатывающей способности определено для каждого направления

движения, то модель распадается на две идентичные модели, при этом каждая из них соответствует оптимизации плана формирования поездов, которые следуют в одном направлении.

Предложенный алгоритм позволяет рассчитать все элементы построенной модели для дальнейшего использования существующих универсальных методов оптимизации задач целочисленного линейного программирования с переменными, которые могут принимать только два значения 0 или 1, или специальных методов, использующих специфику задачи.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Попсуев А. В., Совершенствование организации вагонопотоков / А. В. Попсуев, А. Г. Тиличенко // Вопросы эксплуатации железных дорог: Труды ХаБииЖТа, – 1965. – Вып. 22. – М.: Транспорт.
2. Попсуев А. В. Модернизация алгоритма Балаша для решения задачи плана формирования поездов / А. В. Попсуев, И. Н. Кукушкина // Цифровые вычислительные машины и системы и их применение на железнодорожном транспорте: Межвузовский сборник, – 1979. – Вып. 642. – М.
3. Бурдюк Т. А. Математическое моделирование задачи расчета плана формирования поездов с максимальной экономией вагоно-часов // Транспорт: Сб. научн. тр., – 2001. – Вып. 8. – Д.: Изд-во Днепропетр. нац. ун-та ж.-д. трансп. им. акад. В. Лазаряна.

Поступила в редколлегию 28.12.2005.