УДК 656.225

А. А. БОСОВ, П. В. БЕХ (ДИИТ)

РАЦИОНАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТОКОВ НА СЕТИ

За допомогою методу векторної оптимізації пропонується вибір раціонального шляху доставки вантажів залізничним транспортом.

С помощью метода векторной оптимизации предлагается выбор рационального пути доставки грузов железнодорожным транспортом.

The article offers a method of selecting a rational route of freights delivery by rail by means of vectoral optimization.

Математической моделью сети является граф $G(V,E)$, у которого перечень вершин V соответствует пунктам сети, а перечень ребер E отражает наличие путей между пунктами.

В работе [1] данная математическая модель использовалась для распределения одного груза как без ограничения на пропускную способность сети, так и с учетом ограничения.

Все вершины V разбивались на два подмножества V_+ и V_-. Вершины из множества V_+ выступали в качестве источников груза, а вершины из V_- являлись потребителями грузов. Данное разбиение является естественным, когда речь идет о конкретном виде грузов. Если грузопоток измерять в вагонах или контейнерах, то каждая из вершин может выступать как источник, так и потребитель.

Другими словами, введя матрицу $\{P_{ij}\} i, j \in V$ и трактуя P_{ij} как поток из пункта i в пункт j, получаем возможность рассматривать задачи для нескольких грузов. Кроме матрицы $\{P_{ij}\}$ сеть будем характеризовать длиной ребер $L(e)$, соответствующей расстоянию между пунктами, которые соединяют ребро e.

Пусть W_{ij} представляет собой набор простых путей из вершины i в вершину j [2], а через $X_{ij\omega}$ обозначим поток от i в j по пути $\omega \in W_{ij}$, тогда должно выполняться ограничение

$$\sum_{\omega \in W_{ij}} X_{ij\omega} = P_{ij}, \; i, j \in V. \qquad (1)$$

Если обозначить через $I_\omega(e)$ индикатор ребра e в пути ω, то должно иметь место

$$\sum_{i,j \in V} \sum_{\omega \in W_{ij}} X_{ij\omega} I_\omega(e) \le \bar{N}(e), \quad e \in E, \qquad (2)$$

где $\bar{N}(e)$ – пропускная способность ребра e.

В качестве показателя рациональности распределения потока принимаем

$$P_r = \sum_{i,j \in V} \sum_{\omega \in W_{ij}} X_{ij\omega} L(\omega), \qquad (3)$$

где $L(\omega)$ – длина пути ω.

Очевидно, что если скорости движения постоянны, то показатель P_r будет характеризовать время нахождения грузов в процессе доставки. Более того, данное время может быть определено, если ввести среднюю скорость доставки $\upsilon(\omega)$ по пути ω. Тогда показатель P_r должен вычисляться по формуле

$$P_r = \sum_{i,j \in V} \sum_{\omega \in W_{ij}} X_{ij\omega} L(\omega) / \upsilon(\omega). \qquad (4)$$

В математическом плане задача рационального распределения потоков на сети представляет собой: необходимость найти такие неотрицательные $X_{ij\omega}$, чтобы выполнялись ограничения (1) и (2), а показатель, вычисляемый по формуле (3) или (4), принимал бы минимальное значение.

Заметим, что сформулированная задача при заданном графе $G(V,E)$ представляет собой задачу линейного программирования. В этой задаче важным элементом является построение простых путей W_{ij} из вершины i в вершину j, а также определение индикатора $I_\omega(e)$. Не останавливаясь на более подробном рассмотрении, введем еще один показатель сети $L(E)$ – суммарную длину сети.

Необходимо найти такую подсеть исходной сети, чтобы суммарная длина была как можно меньше.

Относительно подсети считаем, что перечень вершин такой же как и у исходной сети, а множество ребер является подмножеством E.

Таким образом приходим к задаче векторной оптимизации

$$\begin{pmatrix} L(\tilde{E}) \\ P_r(\tilde{E}) \end{pmatrix} \to \min \qquad (5)$$

при условии, что $\tilde{E} \subseteq E$, а $P_r(\tilde{E})$ является решением задачи типа (1)–(3) на графе $G(V, \tilde{E})$.

Отметим, что если имеются два графа $G(V, E_1)$ и $G(V, E_2)$, то будем говорить, что граф $G(V, E_1)$ лучше графа $G(V, E_2)$, если выполняются неравенства

$$\begin{pmatrix} L(E_1) \le L(E_2) \\ P_r(E_1) \le P_r(E_2) \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

причем имеет место хотя бы одно строгое неравенство.

Неравенства (6) определяют бинарное отношение Парето [3].

В случае, когда имеют место соотношения

$$\begin{bmatrix} L(E_1) \le L(E_2) \\ P_r(E_1) \ge P_r(E_2) \end{bmatrix}$$

или

$$\begin{bmatrix} L(E_1) \ge L(E_2) \\ P_r(E_1) \le P_r(E_2) \end{bmatrix},$$

то говорят, что эти графы несравнимы по Парето.

Определение. Под решением задачи векторной оптимизации (5) будем понимать набор графов $G(V, E_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, которые между собой несравнимы по Парето.

Утверждение 1. Если два графа $G(V, E_1)$ и $G(V, E_2)$ таковы, что $E_1 \subset E_2$, то они несравнимы по Парето.

Доказательство. Так как $L(E)$ вычисляется по формуле

$$L(E) = \sum_{e \in E} l(e),$$

где $l(e)$ – длина ребра e, то в силу положительности $l(e)$ имеем

$$L(E_2) = L(E_1) + \sum_{e \in E_2 \setminus E_1} l(e),$$

откуда следует

$$L(E_1) = L(E_2). \qquad (7)$$

Так как $P_r(E)$ представляет собой минимум (3) или (4) на графе $G(V, E)$, то по свойству минимума имеем

$$P_r(E_1) \ge P_r(E_2),$$

что совместно с (7) доказывает утверждение 1.

Следствие. Пусть $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_n$, тогда графы $G(V, E_k)$, $k \in \overline{1, n}$ несравнимы по Парето.

Утверждение 2. Если граф $G(V, E_*)$ таков, что его суммарная длина $L(E_*)$ минимальна, и при нем задача (1)–(3) имеет решение, то множества

$$E_1 = E_*,\ E_2 = E_1 \bigcup \{e_1\}, \ldots$$

$$E_k = E_{k-1} \bigcup \{e_{k-1}\}, \ldots E_n = E_{n-1} \bigcup \{e_{n-1}\} = E$$

могут служить оценкой решения задачи векторной оптимизации (5), при условии, что ребра $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ упорядочены по длине.

Доказательство. При построении решения задачи (5) множество $E \setminus E_*$ представляет собой набор ребер, из которых формируется решение задачи (5).

Пусть $\tilde{E} \subset E \setminus E_*$ – некоторое решение задачи (5). Данное множество можно представить в виде

$$\tilde{E} = E \setminus \tilde{W},$$

где $\tilde{W} \subseteq E \setminus E_*$.

Тогда, если $\tilde{W} = E \setminus E_*$, то $\tilde{E} = E_*$, с другой стороны, если $\tilde{W} = \varnothing$, то $\tilde{E} = E$, но E_* и E принадлежат решению задачи (5).

С другой стороны, множества

$$W_1 = \{\},\quad W_k = W_{k-1} \bigcup \{e_{k-1}\}, \ldots \quad W_n = E \setminus E_*,$$

таковы, что $\tilde{W}$ не может принадлежать ни одному из них, а если $\tilde{W} \subset W_k$, то тогда $E_k \subset \tilde{E}$, откуда имеем $L(E_k) < L(\tilde{E})$, а $\Pr(\tilde{E}) \ge \Pr(E_k)$.

Положив $S = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$, а через $\mathfrak{A}(E)$ – набор всевозможных подмножеств множества E, элементы которого упорядочим по длине соответствующих графов, тогда в этом наборе можно указать такой номер, что начиная с него будут множества из решения (5), но очевидно, что S принадлежит последовательности множеств, начиная с отмеченного номера.

Другими словами, если S_* – набор решений задачи (5), то $S \bigcap S_* \ne \varnothing$.

Учитывая важность утверждения 2 для разработки алгоритма решения задачи (5), рассмотрим некоторые свойства множеств $\{E_k\}$ из данного утверждения.

Пусть E – набор ребер исходного графа, а E_* – набор ребер графа минимальной длины, когда еще выполняются условия по пропускной способности, тогда множество ребер равное

$$EW = E \setminus E_*$$

представляет такой набор, что $\forall w \subset EW$ множество $E \setminus W$ будет допустимо по пропускной способности.

Обозначим через $\mathfrak{A}(EW)$ набор всех подмножеств множества EW, тогда, удалив из $\mathfrak{A}(EW)$ набор множеств $\{E_k\}$, получим некоторую систему $S \subset \mathfrak{A}(EW)$. Очевидно, что $\forall w \in S$, можно указать такое множество E_k из утверждения 2, что имеет место

$$E_k \subset \tilde{E} = E \setminus W,$$

откуда следует, что

$$L(E_k) < L(\tilde{E}); \quad P_r(E_k) \geq P_r(\tilde{E}),$$

т. е. множества E_k и $\tilde{E}$ несравнимы и множество $\tilde{E}$ может быть включено в решение задачи (5).

С другой стороны, для соседнего множества E_{k+1} к множеству E_k будут выполнены неравенства

$$L(\tilde{E}) < L(E_{k+1}); \quad P_r(\tilde{E}) \geq P_r(E_{k+1}).$$

В силу данного утверждения можно предложить алгоритм приближенного решения задачи векторной оптимизации (5):

п1. порядочиваем множество ребер E по их длине;

п2. решаем задачу (1)–(3) на графе $G(V,E)$. Если решения нет, то работу алгоритма прекращаем;

п3. формируем множество

$$E_1 = E \setminus \{e\},$$

где e – ребро максимальной длины из E и решаем задачу (1)–(3) на графе $G(V,E_1)$, если эта задача имеет решение, то строим

$$E_2 = E \setminus \{e\},$$

где e – ребро максимальной длины из множества E_1 и так далее.

Множества $E, E_1, E_2, E_n = E_*$ и будут теми, которые указаны в утверждении 2.

Как следует из рис. 1, значение $P_r(\tilde{E})$ будет расположено где-то между точками A и B, т. к.

$$P_r(E_{k+1}) \leq P_r(\tilde{E}) \leq P_r(E_k).$$

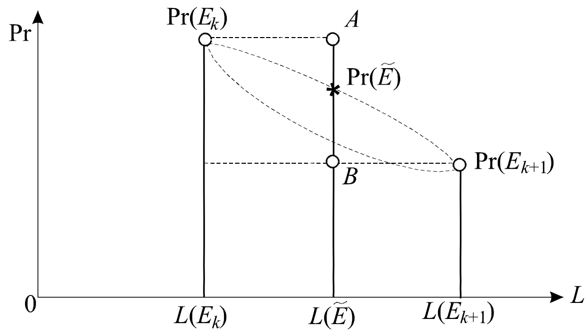

Рис. 1. Геометрическая интерпретация соотношений в пространстве функционалов для множеств $E_k, \tilde{E}, E_{k+1}$

Если в этих неравенствах будет иметь место строгое неравенство, то тогда множества $\{E_k\}$ в пространстве функционалов L и Pr образуют выпуклую линейную оболочку точного решения задачи (5). Для этого утверждения достаточно иметь

$$P_r(E_{k+1}) < P_r(\tilde{E}) \leq P_r(E_k). \tag{8}$$

В случае, когда

$$P_r(E_{k+1}) = P_r(\tilde{E}),$$

то необходимо множество E_{k+1} заменить на $\tilde{E}$ и перейти к рассмотрению E_{k+2} и т. д.

Подобных сравнений для получения точного решения задачи (5) необходимо выполнить в числе

$$2^{|EW|} - |EW| - 1,$$

где $|EW|$ – количество ребер в множестве EW.

При значительном числе $|EW|$ затраты машинного времени могут быть существенными, так как задача (5) из класса NP-неполимиальных задач. Поэтому установление достаточных требований для выполнения соотношения (8) является весьма актуальным при численном решении задачи (5).

Другими словами, если $\tilde{E}$ допустимо по пропускной способности, то если добавление любого ребра из $E \setminus \tilde{E}$ приводит к соотношению

$$P_r\left(\tilde{E}\right) > P_r\left(\tilde{E} \cup \{e\}\right),$$

где $e \in E \setminus \tilde{E}$, то этого уже достаточно, чтобы имело место (8).

При формулировке задачи (1)–(3) существенно использовалось множество W_{ij} – набор простых путей из вершины i в вершину j. Рассмотрим более подробно процедуру построения данного множества. На рис. 2 представлен граф $G(V,E)$, у которого восемь вершин и десять ребер.

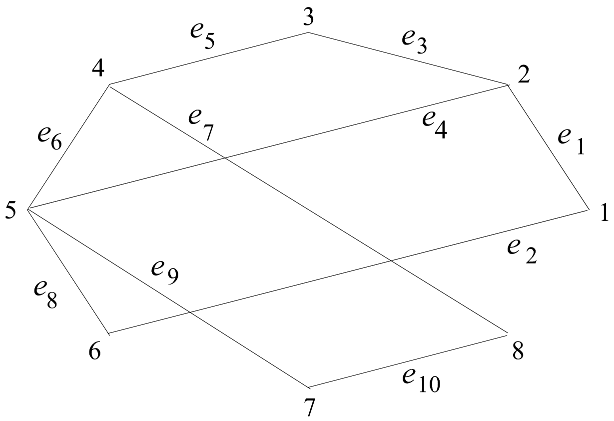

Рис. 2. Модельный граф

Длины ребер представляют собой

$$l(e_1)=2;\quad l(e_2)=1;\quad l(e_3)=3;\quad l(e_4)=6;$$

$$l(e_5)=11;\quad l(e_6)=1;\quad l(e_7)=17;$$

$$l(e_8)=31;\quad l(e_9)=21;\quad l(e_{10})=15.$$

Тогда набор простых путей из вершины $i=1$ в вершину $j=2$ представляют собой: $\omega_1=[1,2]$ в терминах вершин или $\omega_1=\{e_1\}$ в терминах ребер, а остальные пути будут следующими:

$$\omega_2=[1,6,5,2]=\{e_2,e_4,e_8\};$$

$$\omega_3=[1,6,5,4,3,2]=\{e_2,e_3,e_5,e_6,e_8\};$$

$$\omega_4=[1,6,5,7,8,4,3,2]=$$

$$=\{e_2,e_3,e_5,e_7,e_8,e_9,e_{10}\}.$$

Заметим, что путь в терминах ребер представляет собой множество, потому порядок их следования не совпадает с истинным путем. Так, например, $w_4=[1,6,5,7,8,4,3,2]$ как список ребер представляет собой $[e_2,e_8,e_9,e_{10},e_7,e_5,e_3]$, а как множество $\{e_2,e_3,e_5,e_7,e_8,e_9,e_{10}\}$, которое получается из списка упорядочением по номерам ребер.

В среде символьных вычислений данная процедура содержит следующие элементы:

Э1. Определение набора вершин, в которые можно попасть за один шаг > for I from 1 to N-1 do: for j from i+1 to N do: z1:=i: z2:=j: W:=[]: KW:+[]: WW:=[]: W;=[op(W),[z1]]: while W<>[] do for Z in W do WW:+[]: WW:=[op(WW),op(Z)]: s3:=[]: for z in W do if z<>WW then s3:=[op(s3),z] end if: end do: W:=s3: for z in WW do end do: MW1:=neighbors(z,G): W1:=[]: for z in MW1 do W1:=[op(W1),z]: end do: определяем в какие вершины можем попасть.

Э2. Пополнение множества следующей вершиной и формирование нового варианта пути for zk in W1 do if zk=:zk2 then kw:=[]: kw:=[op(WW),zk]: KW:=[op(KW),kw] пополняем конечное множество путей else X:=[] Y:=[op(X),zk]: MX:={}: for z in X do MX:=MX union {z} end do: Y:=[op(Y),op(WW)]: MY:={}: for z in Y do MY:=MY union {op(z)} end do: if not: (MX intersect MY:+MX) then W:[op(W),[op(WW),zk]] добавляем новый вариант пути end if: end if: end do: end do: end do: print (`Множество простых путей из вершины`,z1,`, в вершину `,z2,``KW)

Э3. Отображение множества простых путей в терминах ребер KE:=[]: Отображаем множество простых путей через названия ребер for q in KW do Ke:=[]: kol:=0: for qq in q do kol :=kol+1: end do: ke:=[]: for k from 1 to kol-1 do ke:=edges({op(k,q),op(k+1,q)},G): Ke:=[op(Ke),op(ke)]: end do:L:=0:Kee:=convert(Ke,set): for e in Kee do: print (`Множество простых путей в ребрах`, KE): end do: end do:

В результате работы данной процедуры получаем множество простых путей из вершины 1 в вершину 2 [[1,2],[1,6,5,2],[1,6,5,4,3,2], [1,6,5,7,8,4,3,2]]

$$\{e_1\},2$$
$$\{e_2,e_4,e_8\},38$$
$$\{e_2,e_3,e_5,e_6,e_8\},47$$
$$\{e_2,e_3,e_5,e_7,e_8,e_9,e_{10}\},99.$$

после каждого пути в терминах ребер представлены и длины этих путей.

Таким образом, решение задачи (5) может быть оценено по изложенному алгоритму и представляется возможность решить задачу выбора графа, а соответственно и транспортной сети для грузовых перевозок, в частности, и контейнеров.

Пусть этому графу соответствует набор ребер E. Рассмотрим задачу выбора рациональных простых путей доставки из пункта i в пункт j объема перевозок Q_{ij} того или иного заказчика по данной сети. Если W_{ij} набор путей из i в j то каждому пути $\omega \in W_{ij}$ сопоставим два показателя: время доставки ($t(\omega)$) и затраты на доставку по данному пути $Z(\omega)$.

Приходим к задаче векторной оптимизации

$$\begin{pmatrix} t(\omega) \\ Z(\omega) \end{pmatrix} \to \min$$

при условии $\omega \in W_{ij}$.

В данной задаче вычисление времени доставки $t(\omega)$ и затрат средств $Z(\omega)$ требует более подробного рассмотрения, так как решение этой задачи представляет возможность сформулировать критерий отношений между заказчиком и железной дорогой, осуществляющей доставку грузов.

Для каждого пути $\omega \in W_{ij}$ процесс доставки разобьем на $\Pi(\omega)$ подпроцессов или фаз, которые условно будем обозначать через $\Phi_k^{(\omega)}, k = \overline{1, n(\omega)}$. В каждой фазе укажем набор технологических операций Ξ_k, а через Θ_{kv} будем обозначать элементарную технологическую операцию в фазе $\Phi_k(\omega)$, тогда при условии независимости фаз набор

$$\gamma = \left[\Theta_{1v_1}, \Theta_{2v_2}, \ldots, \Theta_{\Pi(\omega)}, v_{\Pi(\omega)}\right]$$

можно рассматривать как одну из возможных технологий доставки, которой можно сопоставить время и затраты по формулам:

$$t(\omega) = \sum_{\Theta_{kv_k} \in \gamma} t\left(\Theta_{kv_k}\right);$$

$$z(\omega) = \sum_{\Theta_{kv_k} \in \gamma} z\left(\Theta_{kv_k}\right),$$

где $t\left(\Theta_{kv_k}\right)$ – затраты времени в k-й фазе, если будет выполняться операция Θ_{kv_k}; $z\left(\Theta_{kv_k}\right)$ – затраты средств на операцию Θ_{kv_k}.

Пусть $\Gamma(\omega)$ – набор всевозможных технологий доставки по пути ω, тогда задача векторной оптимизации

$$\begin{pmatrix} t(\gamma) \\ z(\gamma) \end{pmatrix} \to \min$$

при условии $\gamma \in \Gamma(\omega)$, позволяет построить зависимость $z(t,\omega)$, качественный характер которой представлен на рис. 3.

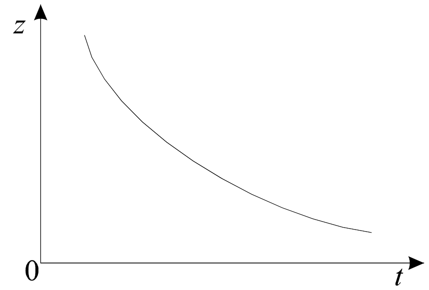

Рис. 3. Качественный характер зависимости $z(t,\omega)$

Теперь решив подобную задачу для всех ω из W_{ij}, получаем возможность построить семейство кривых $z(t,\omega)$ (рис. 4).

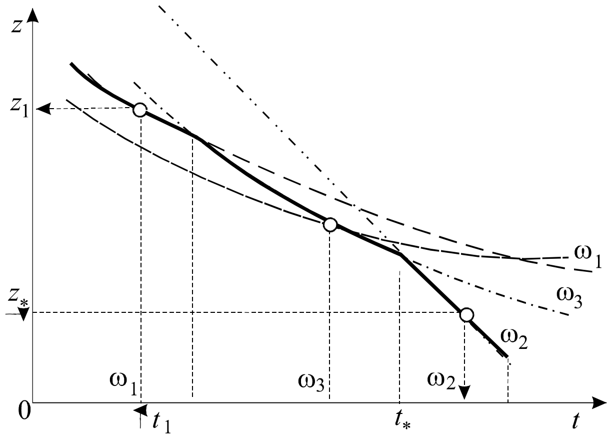

Рис. 4. Качественный характер зависимостей $z(t,\omega)$ для трех путей $\omega_1, \omega_2, \omega_3$

Сплошная линия представляет зависимость

$$Z_*^{(t)} = \min_{\omega \in W_{ij}} z(t,\omega),$$

которая позволяет строить отношения между заказчиком и перевозчиком.

Так, например, если заказчик желает, чтобы его груз был доставлен за время t_1, то это можно сделать по пути ω_1 и стоить это будет z_1.

В случае, когда заказчик обладает средствами z_*, его груз будет доставляться по пути ω_2

за время t_*. Данный подход обобщает работы [5; 6], в которых рассматривалась задача только для заданного пути доставки. Изложенное можно рассматривать как один из вариантов теории построения тарифов по доставке грузов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Белов И. В. Математические методы в планировании на железнодорожном транспорте. / И. В. Белов, А. Б. Каплан. – М.: Транспорт, 1972. – 248 с.
2. Д. Андерсон. Дискретная математика и кибернетика. – М.; С Пб. – К.: Вильямс, 2004. – 960 с.
3. Макаров И. М. Теория выбора и принятия решений. / И. М. Макаров, Т. М. Виноградская, А. А. Рубчинскийи др. – М.: Наука, 1982. – 327 с.
4. Прохоров Г. В. Пакет символьних вычислений Maple V. / Г. В. Прохоров, М. А. Леденев, В. В. Колбеев. – М.: Петит, 1997. – 200 с.
5. Босов А. А. Формирование вариантов рациональной сети линий высокоскоростного движения поездов в Украине / А. А. Босов, Г. Н. Кирпа. – Д.: Изд-во Днепропетр. нац. ун-т ж.-д. тренсп. им. акад. В. Лазаряна, 2004. – 144 с.
6. Босов А. А. Стимулирование железных дорог на выполнение сроков доставки. / А. А. Босов, И. Е. Левицький, Н. Л. Цегельник // Залізничний транспорт України. – К., С. 17–20.

Поступила в редколлегию 22.06.2006.