УДК 629.4.016

Б. Е. БОДНАРЬ, А. А. БОСОВ, Д. В. БОБЫРЬ (ДИИТ)

О НЕСРАВНИМЫХ ВАРИАНТАХ В ЗАДАЧЕ ТЯГОВЫХ РАСЧЕТОВ

Розглянута методика визначення множини непорівнянних варіантів траєкторій руху.

Рассмотрена методика определения множества несравнимых вариантов траекторий движения.

A method of determination of a set of incomparable movement trajectory variants has been considered.

Используемую математическую модель движения поезда, для выполнения тяговых расчетов представляют в виде [1]

$$\frac{dv}{dt} = \xi\left(u - \omega_0(v) \pm i(s)\right),$$

где v – скорость движения поезда; s – координата пути нахождения поезда; ξ – постоянный множитель приведения единиц размерности, зависящий от выбранной системы измерений величин, входящих в (1); u – удельная сила тяги или торможения; $\omega_0(v)$ – основное удельное сопротивление движению поезда; $i(S)$ – уклон пути; t – время.

Если в дифференциальном уравнении движения перейти к дифференцированию по пути, то получим уравнение

$$v\frac{dv}{ds} = \xi\left[u - \omega_0(v) - i(s)\right], \qquad (1)$$

которое при заданных начальной скорости $v(0) = v_н$ и конечной скорости $v(l) = v_к$, где l – длина пути, определяет скорость в виде некоторой функции пути $v(s)$, $s \in [0, l]$.

Очевидно, что данная скорость зависит от удельной силы тяги или торможения u. На значения u в общем случае накладываются ограничения, определяющие допустимые значения, которые будем записывать в виде

$$u \in U\left[v(s)\right]. \qquad (2)$$

Относительно u как функцию пути считаем, что $u(s)$ – кусочно-непрерывные функции.

Качество управления будем оценивать двумя показателями:

$$t\left[v(s)\right] = \int_0^l \frac{ds}{v(s)}; \qquad (3)$$

$$A\left[v(s)\right] = \int_0^l \omega_0\left(v(s)\right)ds. \qquad (4)$$

Если $u(s)$, $s \in [0, l]$ допустимое управление, а $v(s, u(s))$ – соответствующая скорость движения, удовлетворяющая граничным условиям, тогда возникает задача – найти такое допустимое управление, чтобы

$$\begin{pmatrix} t\left[v(s)\right] \\ A\left[v(s)\right] \end{pmatrix} \to \min, \qquad (5)$$

т. е. переходим к задаче векторной оптимизации [2].

Пусть $v_{\max}(s)$ – максимально допустимая скорость по управлению и ограничениям скорости движения по пути, обеспечивающая минимальное время хода, тогда если $v(s)$ – скорость, удовлетворяющая начальному и конечному значениям, и удовлетворяет неравенству

$$v_{\max}(s) \geq v(s), \quad s \in [0, l],$$

то всегда существует допустимое управление $u(s)$, которое позволяет реализовать скорость $v(s)$.

В работе [2] в качестве решения задачи векторной оптимизации (5) предлагается набор скоростей $\{v(s)\}$, определяемых следующим образом:

$$\tilde{V} = \left\{v(s) : v(s) = \alpha \cdot v_{\max}(S),\ s \in [0, l]\right\}. \qquad (6)$$

Заметим, что в данном определении множества $\tilde{V}$ обязательно должно иметь место:

$$v(0) = 0; \quad v(l) = 0. \qquad (7)$$

Чтобы избавиться от требования (7), поступим следующим образом:

- задаем v_0 – скорость, такую, что

$$v_0 \leq \max_{0 \leq S < l} v_{\max}(s);$$

- строим скорость $v_*(s\,|\,\alpha, v_0)$ следующим образом:

$$v_*(s\,|\,\alpha, v_0) = \begin{cases} v_{\max}(s), & \text{если } v_{\max}(s) < v_0; \\ v_0 + \alpha(v_{\max} - v_0), & \text{если } v_{\max}(s) \ge v_0. \end{cases}.$$

В данном определении скорости параметр α, как и в (6) изменяется в пределах $0 \le \alpha \le 1$.

Обозначим через

$$V_* = \{v_*(s\,|\,\alpha, v_0) : 0 \le \alpha \le 1;\, v_0 \in [\underline{v}, \overline{v}]\}. \quad (8)$$

Качественный характер элементов из V_* представлен на рис. 1.

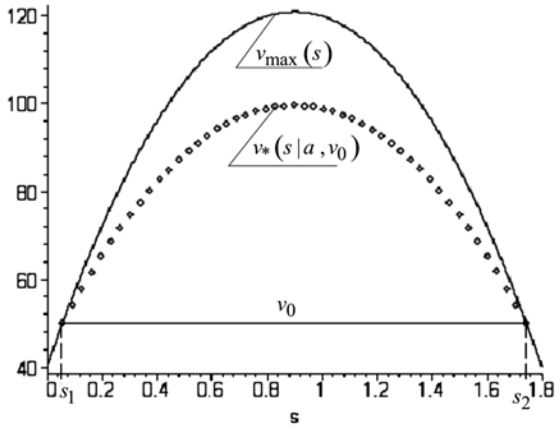

Рис. 1. Один из вариантов задания $v_*(s\,|\,\alpha, v_0)$ при фиксированном α и v_0

В выражении (8) интервал $[\underline{v}, \overline{v}]$ определяется следующим образом:

$$\overline{v} \le \max_{0 \le s \le l} v_{\max}(s);$$

$$\underline{v} \ge \max\{v_{\text{н}}, v_{\text{к}}\}.$$

Утверждение. Элементы множества V_* представляют собой несравнимые варианты по критерию (6).

Отметим, что если $v_*(s\,|\,\alpha_1, v_0)$ и $v_*(s\,|\,\alpha_2, v_0)$ принадлежат V_*, тогда

$$\begin{pmatrix} t[v_*(s\,|\,\alpha_1, v_0)] < t[v_*(s\,|\,\alpha_2, v_0)] \\ A[v_*(s\,|\,\alpha_1, v_0)] \ge A[v_*(s\,|\,\alpha_2, v_0)] \end{pmatrix}$$

если $\alpha_1 > \alpha_2$.

Данное утверждение вытекает как следствие **леммы**: если $1 + y(t) > 0$, при $t \in [0, 1]$ и

$$\int_0^1 \frac{dt}{1 + y(t)} = 1,$$

то

$$\int_0^1 y(t)\,dt \ge 0.$$

Доказательство. Из того, что

$$\int_0^1 \frac{dt}{1 + y(t)} = 1$$

следует

$$\int_0^1 \frac{y(t)\,dt}{1 + y(t)} = 0,$$

таким образом, $y(t)$ меняет знак хотя бы один раз. Пусть $x \in [0, 1]$, где $y(x) = 0$. Не ограничивая общности рассмотрения считаем, что $y(t) \le 0$ при $t \in [0, x]$ и $y(t) \ge 0$ при $t \in [x, 1]$, тогда

$$0 = \int_0^x \frac{y(t)\,dt}{1 + y(t)} + \int_x^1 \frac{y(t)\,dt}{1 + y(t)} \le$$

$$\le \frac{1}{\max\limits_{0 \le t \le x}[1 + y(t)]} \int_0^x y(t)\,dt +$$

$$+ \frac{1}{\min\limits_{x \le t \le 1}[1 + y(t)]} \int_x^1 y(t)\,dt$$

и так как

$$\max_{0 \le t \le x}[1 + y(t)] = \min_{x \le t \le 1}[1 + y(t)] = 1$$

получаем доказательство леммы.

Так как $\alpha_1 > \alpha_2$, то

$$v_*(s\,|\,\alpha_1, v_0) > v_*(s\,|\,\alpha_2, v_0),$$

откуда получаем

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{v_*(s\,|\,\alpha_1, v_0)} < \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{v_*(s\,|\,\alpha_2, v_0)},$$

что доказывает соотношение между временами хода в утверждении.

Для доказательства второго неравенства в утверждении заметим, что основное удельное сопротивление движению имеет вид

$$\omega_0(v) = Av^2 + Bv + C,$$

где $A, B, C \ge 0$.

Тогда, если $v_1(S) > v_2(S)$, то

$$\omega_0\left[v_1(s)\right] > \omega_0\left[v_2(s)\right],$$

откуда в силу (4) из данного неравенства следует и второе соотношение утверждения.

Осталось рассмотреть ситуацию, когда $\alpha = 0$. В этом случае

$$v_*(s\,|\,0, v_0) = v_0 \quad \text{при} \quad s_1 \le s \le s_2,$$

и если $v(s)$ любая другая скорость такая, что $v(s_1) = v(s_2) = v_0$, а также

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{v(s)} = \frac{s_2 - s_1}{v_0},$$

то, положив $v(s) = v_0 + \Delta v(s)$, получим

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{1 + \dfrac{\Delta v(s)}{v_0}} = s_2 - s_1$$

и, поделив на $s_2 - s_1$, имеем

$$\int_0^1 \frac{dt}{1 + y(t)} = 1,$$

где $y(t) = \Delta v(s)/v_0$, $t = s/(s_2 - s_1)$.

С другой стороны

$$\omega_0(v_0 + \Delta v) - \omega_0(v_0) = A\left(2v_0 \cdot \Delta v + \Delta v^2\right) + B\Delta v,$$

откуда

$$A\left[\omega_0(v_0 + \Delta v)\right] - A\left[\omega_0(v_0)\right] =$$

$$= A\left(\int_{s_1}^{s_2} 2v_0 \Delta v ds + \int_{s_1}^{s_2} \Delta v^2 ds\right) + B\int_{s_1}^{s_2} \Delta v ds,$$

но в силу леммы $\int_{s_1}^{s_2} \Delta v ds \ge 0$, что приводит к неравенству $A\left[\omega_0(v_0 + \Delta v)\right] > A\left[\omega_0(v_0)\right]$ и тем самым полностью доказывает утверждение.

Обозначим через $\tilde{A}(t)$ зависимость механической работы от времени движения по элементам множества $\tilde{V}$, а через $A_*(t)$ для случая по элементам из множества V_*, тогда имеет место

$$\tilde{A}(t) \ge A_*(t).$$

На рис. 2 приведена численная реализация этих зависимостей на модельном примере. Заметим, что кривая $A_*(t)$ построена при $\alpha = 0$ и $v_0 \in \left[\underline{v}, \overline{v}\right]$, квадратиками на рис. 2 отмечены ситуации, когда $\alpha \ne 0$.

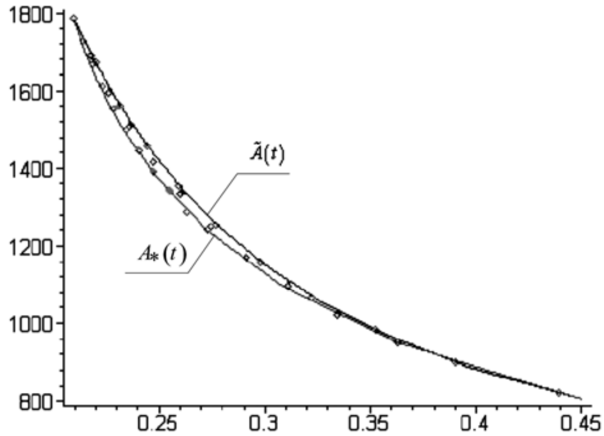

Рис. 2. Геометрическое представление зависимостей $\tilde{A}(t)$ и $A_*(t)$

Выводы

1. Построено множество V_* несравнимых вариантов тяговых расчетов, которое с точки зрения механической работы лучше множества $\tilde{V}$ из работы [2].
2. Алгоритм построения множества V_* может быть положен в основу разработки бортового советчика машинисту по ведению поезда с минимальным расходом энергии на преодоление основного удельного сопротивления движению поезда.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Правила тяговых расчетов для поездной работы. – М.: Транспорт, 1985. – 287 с.
2. Босов А. А. Научные основы решения задач проблемы обновления локомотивного парка железных дорог Украины / А. А. Босов, Г. К. Гетьман, А. И. Мосендз. – Д.: Вега, 2004. – 381 с.

Поступила в редколлегию 07.02.2006.