

## ИССЛЕДОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ КВАЗИРЕГУЛЯРНОЙ ТРЕХПРОЛЕТНОЙ БАЛКИ НА УПРУГИХ ОПОРАХ

Досліджено на прикладі трипрогінної нерегулярної балки на пружних опорах досліджений вплив різних по твердості пружних опор на регулярну балку, а також досліджений вплив різної твердості пружних опор (однакових між собою) на балку, нерегулярну по довжинах прогінів. Показано, що при певних параметрах нерегулярності в практичних розрахунках можна використати прості рішення для регулярних систем, отримані наближені залежності, графіки.

Исследовано на примере трехпролетной нерегулярной балки на упругих опорах исследовано влияние различных по жесткости упругих опор на регулярную балку, а так же исследовано влияние различной жесткости упругих опор (одинаковых между собой) на балку, нерегулярную по длинам пролетов. Показано, что при определенных параметрах нерегулярности в практических расчетах можно использовать простые решения для регулярных систем, полученные приближенные зависимости, графики.

In work on the example of three-flight irregular beam on resilient supports influence of the once-personal on inflexibility resilient supports is probed on a regular beam, and influence of different stiffness of resilient supports (identical between itself) is similarly probed on a beam, irregular on lengths of flights. It is shown that at the certain parameters of irregularity in practical calculations it is possible to utilize simple solutions for the regular systems, got close dependences, graphs

Статья является логическим продолжением исследований, отраженных ранее в работах [6–8] рассматривалась трехпролетная балка на абсолютно жестких опорах и были найдены предельные границы линейных ( $l$ ), жесткостных ( $EI$ ) и массовых ( $\mu$ ) значений параметров, при которых вычисления частот можно производить по значительно более простым решениям для регулярной балки.

Как было показано ранее в [7], использование в схеме абсолютно жестких опор может привести к ошибке при определении частот собственных колебаний, в связи с тем, что абсолютно жесткое опирание в практике не реализуется, и, таким образом, более точными расчетными схемами неразрезных балок могут служить балки на упругих опорах.

Задача данного исследования состоит в определении диапазона изменений жесткостей упругих опор, в котором данную схему можно рассчитывать по более простой формуле. А также показать зависимость собственной частоты балки от изменения длин крайних пролетов при разных жесткостях упругих опор.

Данное исследование выполнено для трехпролетной балки с центральными упругими опорами и крайними абсолютно жесткими. Для исследования записано уравнение, по методу подробно изложенному в [5]. Полученное уравнение в функциях Гогенемзера-Прагера слишком громоздко и занимает ни одну страницу, по этой причине оно не приведено в рамках данной статьи.

Была составлена программа для определения частотного параметра  $\lambda_i$ , который в данных исследованиях является основным. Программа позволяет исследовать изменение собственной частоты в зависимости от соотношения длин пролетов, жесткостей упругих опор балки.

В общем случае частота собственных колебаний балки определялась по известной формуле

$$\omega_i = \frac{\lambda_i^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}, \quad (1)$$

где  $E$  – модуль упругости материала балки, кПа;  $\mu$  – погонная масса балки, кг\*с<sup>2</sup>/м<sup>2</sup>;  $I$  – момент инерции сечения, см<sup>4</sup>;  $\omega_i$  – частота свободных колебаний  $i$ -й формы колебаний, Гц;  $l$  – пролет балки, м;  $\lambda_i$  – частотный параметр определяемый по программе.

В научной литературе для балок на упругих опорах при динамических расчетах используется безразмерная величина  $c'$  – относительная жесткость упругой опоры, что значительно расширяет возможности анализа. Относительная жесткость выражается следующей зависимостью (для регулярных балок):

$$c' = \frac{c_0 l_i^3}{E_i I_i}; c'_1 = \frac{c_{01} l_1^3}{E_1 I_1}; \dots = \frac{c_{0i} l_1^3}{E_1 I_1}; \quad (2)$$

где  $c_0$  – жесткость упругой опоры, имеющая размерность тс/м;  $l_1$  – длина первого пролета

балки,  $m$ ;  $EI$  – жесткость первого пролета балки. В данном исследовании задавалась непосредственно относительной жесткостью упругой опоры  $c'$ . В случае необходимости иметь дело не с безразмерной жесткостью,  $c_0$  находится из уравнения (2). Установлено, что в случае нерегулярности по длинам пролетов (крайние пролеты остаются равными, изменяется только центральный пролет)  $l_1$  берется длина первого пролета. Жесткость и масса всех трех пролетов могут быть неодинаковыми, т. е. балка может быть нерегулярной по массе и по жесткости.

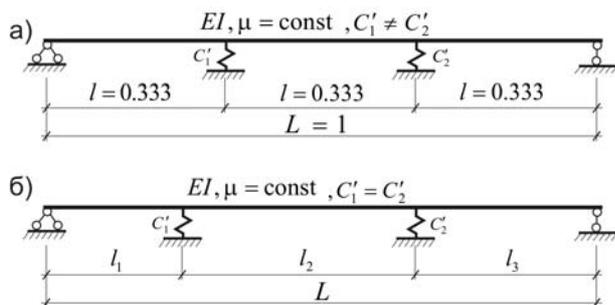


Рис.1. Расчетная схема трехпролетной балки на упругих опорах:

а – для первого расчета, б – для второго расчета

Проанализированы были следующие случаи:

- $\mu, EI, l - \text{const}, c'_1 \neq c'_2$ ,
- $\mu, EI - \text{const}, l - \text{переменная}$ , при разных жесткостях упругих опор  $c' = c'_1 = c'_2$ .

В общем случае процент погрешности при определении частот нерегулярной балки по уравнениям для регулярной определялся по формуле

$$\frac{\omega_p - \omega_{\text{нр}}}{\omega_p} * 100 \%, \quad (3)$$

где  $\omega_{\text{нр}} = \omega_l, \omega_c$  – частоты нерегулярной балки, имеющие нерегулярность соответственно по  $l$ , и  $c$ .

В случае нерегулярности по длинам пролетов погрешность определяем по формуле, приведенной в [8]. Выразим через коэффициент  $k_l$  величину нерегулярности пролета балки  $l_p^2 = l_l^2 \times k_l^2$ . Исходя из этого коэффициент нерегулярности равен

$$k_l = \frac{l_p}{l_l}, \quad (4)$$

Так как для регулярной по длине балки (равнопролетной) можно записать

$$l_p = \bar{l}_p * L, \quad (5)$$

где  $\bar{l}_p$  – относительная длина пролета,  $L$  – полная длина балки, следовательно,

$$k_l = \frac{\bar{l}_p}{l_l} = \frac{0,3333}{l_l}. \quad (6)$$

Окончательно запишем:

$$\frac{\omega_p - \omega_l}{\omega_p} = \frac{\frac{\lambda_p^2}{l_p^2} \sqrt{EI} - \frac{\lambda_l^2}{l_l^2} \sqrt{EI}}{\frac{\lambda_p^2}{l_p^2} \sqrt{EI}} = 1 - \frac{\lambda_l^2 k_l^2}{\lambda_p^2}. \quad (7)$$

В случае неравенства жесткостей двух упругих опор погрешность при определении частот определяется путем сравнения частотных коэффициентов, ввиду того, что прочие параметры рассматриваемых схем одинаковы.

$$\frac{\omega_p - \omega_{\text{нр}}}{\omega_p} = \frac{\frac{\lambda_p^2}{l_p^2} \sqrt{EI_p} - \frac{\lambda_{\text{нр}}^2}{l_{\text{нр}}^2} \sqrt{EI_{\text{нр}}}}{\frac{\lambda_p^2}{l_p^2} \sqrt{EI_p}} = 1 - \frac{\lambda_{\text{нр}}^2}{\lambda_p^2}. \quad (8)$$

За регулярную схему в обоих случаях принималась регулярная трехпролетная балка, у которой две центральные опоры упругие, а крайние – абсолютно жесткие. Далее вычислялись частотные коэффициенты по следующей известной формуле

$$\frac{sh\lambda_i}{ch\lambda_i - \cos\beta_i} - \frac{\sin\lambda_i}{\cos\lambda_i - \cos\beta_i} = \frac{2\lambda_i^3}{c'}, \quad (9)$$

где  $\lambda_i$  – частотный коэффициент,  $c'$  – относительная жесткость упругих опор.

В первом случае для построения кривых зависимостей задавалась жесткость левой опоры, затем шло изменение жесткости правой в диапазоне [0...1 000 000]. Применительно к реальным конструкциям данный тип соответствует случаю, когда жесткости опор различны ввиду разницы в геометрических размерах, случаю, когда в опоре появившиеся трещины уменьшают проектную прочность и жесткость, соответственно пролетное строение начинает работать по несколько другой схеме. При определении погрешности за  $\lambda_p$  бралось вычисленное значение частотного коэффициента по формуле (9) при условии, что жесткость правой опоры равна жесткости левой, т. е.  $c'_1 = c'_2$ . Во втором случае жесткость обеих центральных упругих опор изменялась одинаково. За  $\lambda_p$  принимается вычисленное по формуле (9) значение частотного коэффициента при соответствующей жесткости упругих опор.

Ниже приведены графики изменения частоты собственных колебаний от соотношения жесткостей (первый рассматриваемый случай).

Полученные значения частотных коэффициентов, участвующих в вычислении погрешности при определении частот балки по регулярной схеме, симметричны относительно главной диагонали матрицы частотных коэффициентов:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 25 & \dots & 10000 \\ 0 & \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \lambda_{1,n-1} & \lambda_{1,n} \\ 25 & \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \lambda_{2,n-1} & \lambda_{2,n} \\ \dots & \lambda_{n-1,1} & \lambda_{n-1,2} & \lambda_{n-1,n-1} & \lambda_{n-1,n} \\ 10000 & \lambda_{n,1} & \lambda_{n,2} & \lambda_{n,n-1} & \lambda_{n,n} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Частоты  $\lambda_{1,2}$  и  $\lambda_{2,1}$  равны. Таким образом, безразлично в какой последовательности под-

ставляются жесткости упругих опор в частотное уравнение. Изображенные ниже графики показывают, при расчете по какой из двух жесткостей упругих опор получается наименьшее отклонение от регулярной схемы. В свою очередь, данные графики дают возможность исправить полученное значение по регулярной схеме с учетом ожидаемой погрешности, что также дает возможность определить частоту балки по более простой зависимости.

После графика каждой из форм следует вывод, в котором указываются границы интервалов, в которых возможно определение частоты в пределах точности инженерных расчетов. Это дает возможность в пределах допустимой точности определить частоту без умножения на какие-либо коэффициенты, взятые с графика.

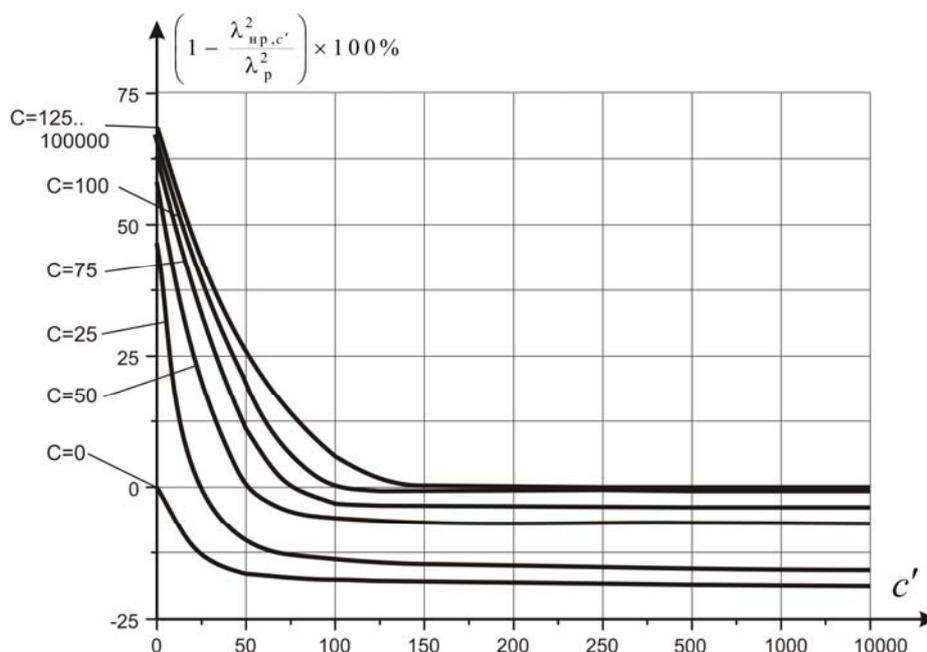


Рис. 2. График изменения частоты собственных колебаний в зависимости от соотношения жесткостей двух упругих опор по первой форме колебаний

Анализируя график первой формы, можно отметить границы диапазона, в котором можно определять частоты при помощи более простой зависимости. Допустимое расхождение между результатами вычислений не должно превышать 10...15 %. Для данного графика можно отметить следующее: если определить частотный коэффициент по формуле (9) по наименее жесткой опоре с жесткостью [25...100 000] в то время как жесткость второй упругой опоры находится в диапазоне жесткостей [75...100 000], то итоговая погрешность окажется в допустимых пределах. При жесткостях упругих опор меньших приведенных значений сложно выбрать какое-либо

приемлемое решение — слишком велика кривизна графиков.

Для второй формы также действует описанная выше зависимость, с той лишь разницей, что из двух упругих опор принимается с большей жесткостью (больше 200), а допустимый диапазон жесткостей другой опоры находится в диапазоне 75...100000. Как и для первой формы, из-за значительной кривизны графиков, сложно подобрать необходимые значения жесткостей упругих опор меньших 75. Связано это с тем, что при уменьшении жесткости опор балка по своей работе приближается к балке без центральных опор.

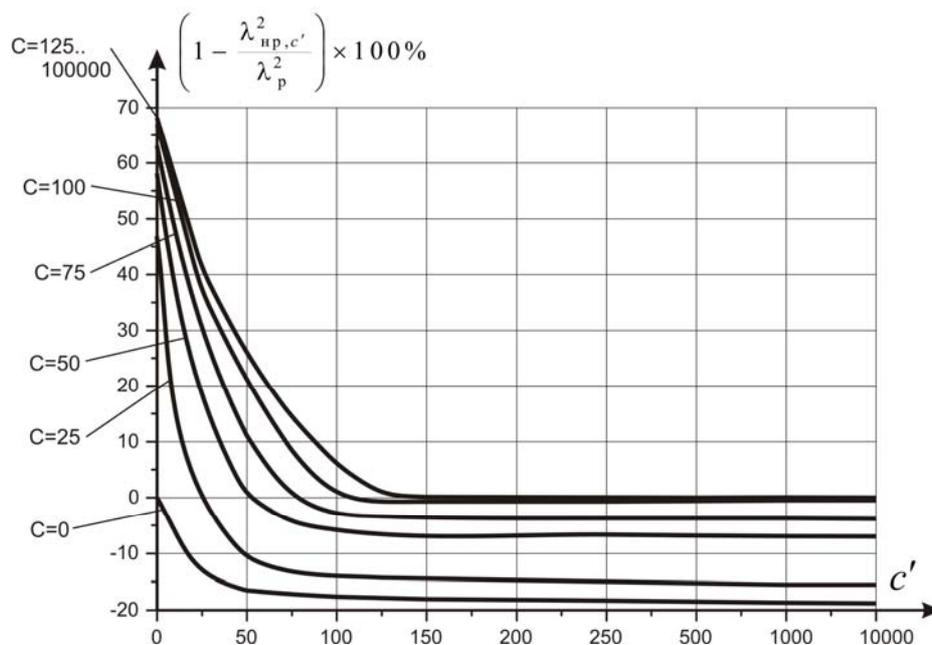


Рис. 3. График изменения частоты собственных колебаний в зависимости от соотношения жесткостей двух упругих опор по второй форме колебаний

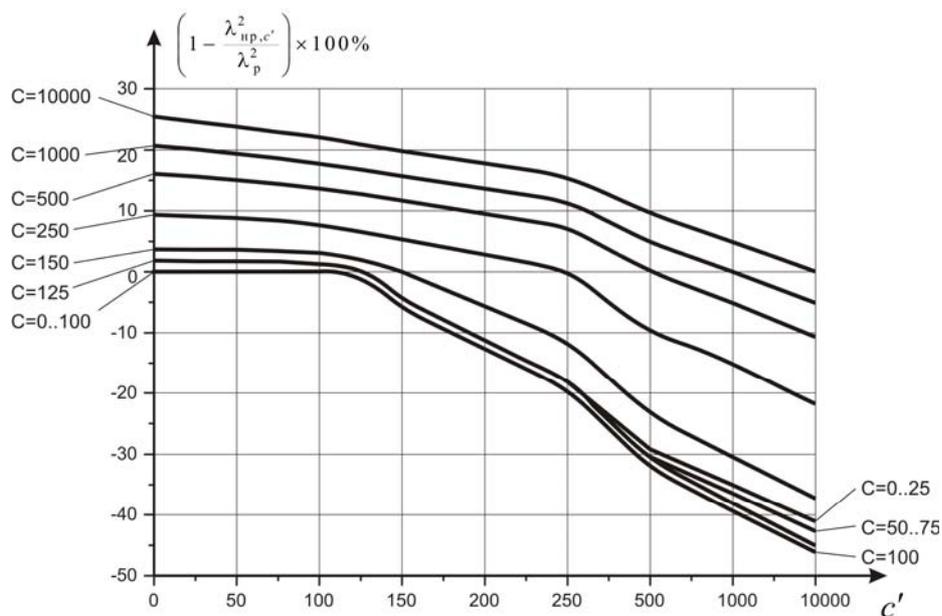


Рис. 4. График изменения частоты собственных колебаний в зависимости от соотношения жесткостей двух упругих опор по третьей форме колебаний

Для третьей формы можно указать следующее: при жесткости менее жесткой опоры меньше 200 необходимо для формулы (9) брать большее из значений жесткостей упругих опор но до 250.

Ниже приведены графики изменения частоты собственных колебаний для второго рассматриваемого случая – при нерегулярности по длинам пролетов балки. Наименование кривых для каждой из жесткости указаны относительно – за основу принята относительная приведенная жесткость упругих опор при регулярной схеме

балки. Связано это с тем, что в формулу для подсчета относительной приведенной жесткости (2) входит длина первого пролета, которая в данном исследовании является изменяемой величиной. Таким образом, нецелесообразно придерживаться для каждого случая нерегулярности под длинам пролетов фиксированного значения относительной приведенной жесткости, ввиду того, что реальный параметр, участвующий в ее подсчете – относительная жесткость левой упругой опоры ( $c'_1$ ) становится изменяемой величиной для каждого конкретного

случая, что недопустимо, ввиду того, что для определения частотных коэффициентов первоначальные параметры жесткостей упругих опор неизменны, и находятся в строго заданном диапазоне, образующем при регулярной схеме указанный на графике диапазон относительных приведенных жесткостей.

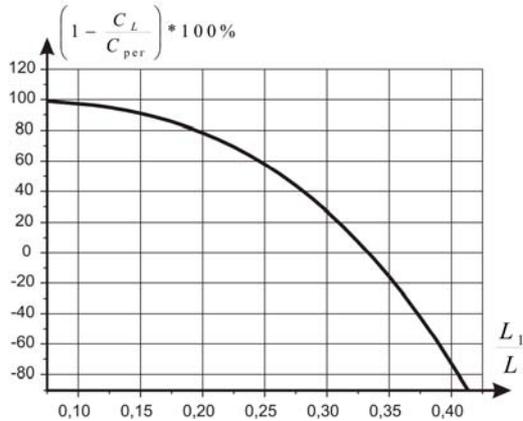


Рис. 5. График изменения жесткостей упругих опор

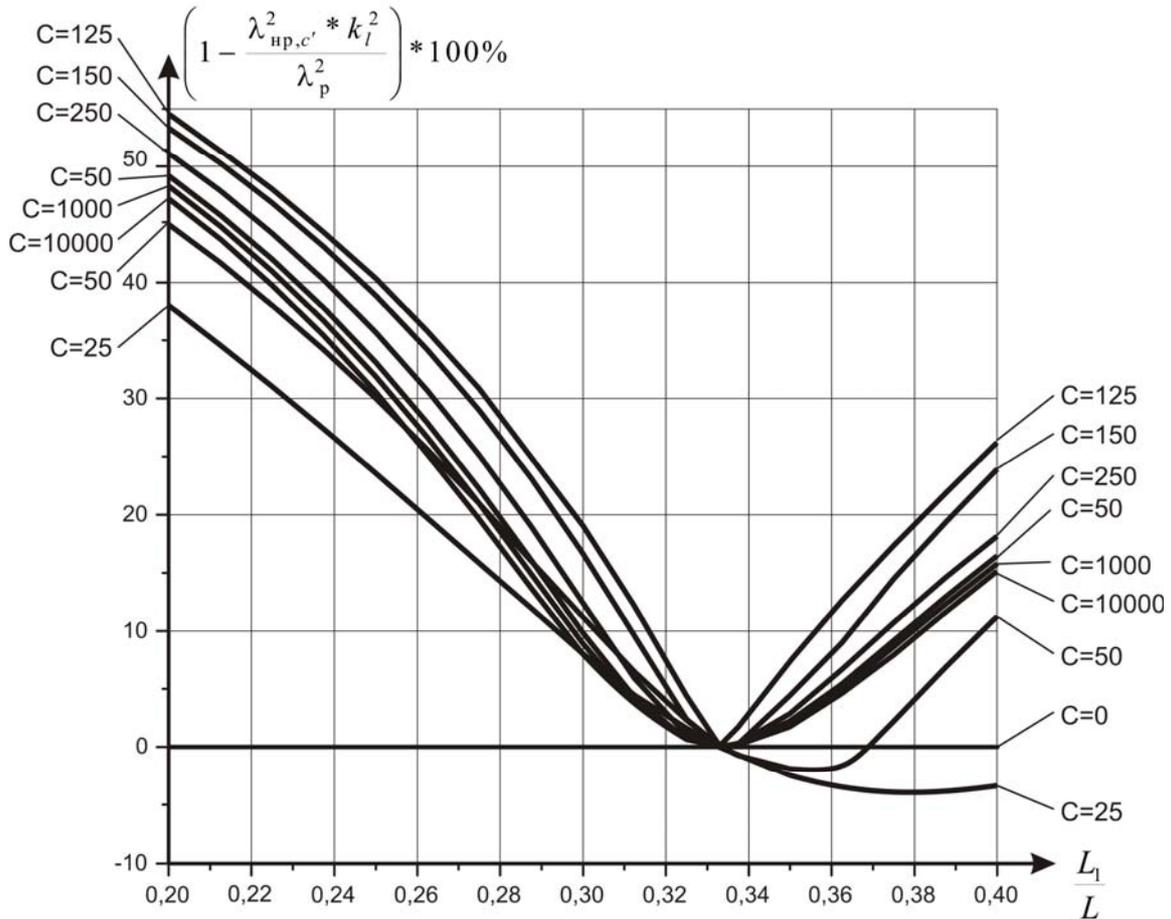


Рис. 6. График изменения частоты собственных колебаний в зависимости от соотношения длин пролетов при разных жесткостях упругих опор по первой форме колебаний.

График симметричен относительно значения отношений пролетов 0,25. Следовательно, есть два диапазона, первый 0,13...0,17 второй

Приведенный выше график показывает в процентном отношении изменение жесткости упругих опор в случае, когда вычисление ведется по приведенной относительной жесткости одинаковой для всех величин пролетов. Как видно из рис. 5 различие в жесткостях упругих опор для регулярной балки, и жесткостью упругой опоры для нерегулярной под длине пролетов составляет от 96 % (при относительной длине первого пролета 0,1), до -78 % при 0,4.

Как видно из графика, даже незначительное отклонение длины пролета от регулярной схемы влечет за собой существенное изменение частоты. В диапазоне 0,30...0,31 и до 0,35 возможно определять частоты по формуле (9). При жесткости упругих опор равной нулю получаем балку на двух опорах, ввиду чего соотношение пролетов перестает играть какую-либо роль в определении частоты (один из способов удостовериться в правильности определения частотных коэффициентов).

0,31...0,37 в которых возможно определять частоты по формуле (9) с допустимой погрешностью.

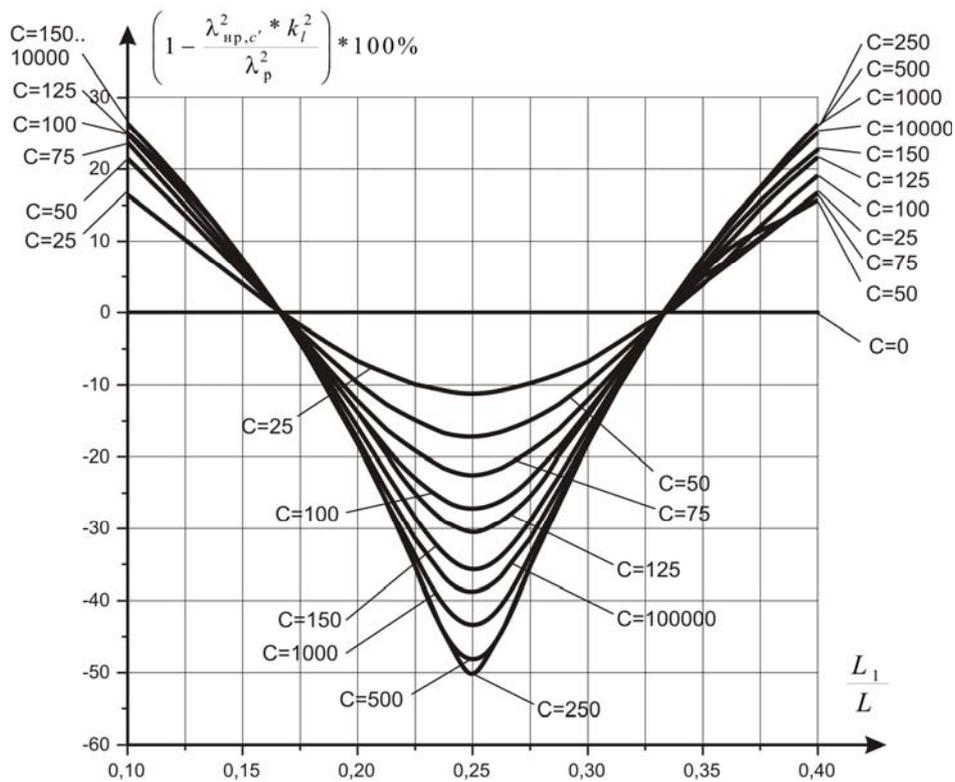


Рис. 7. График изменения частоты собственных колебаний в зависимости от соотношения длин пролетов при разных жесткостях упругих опор по второй форме колебаний

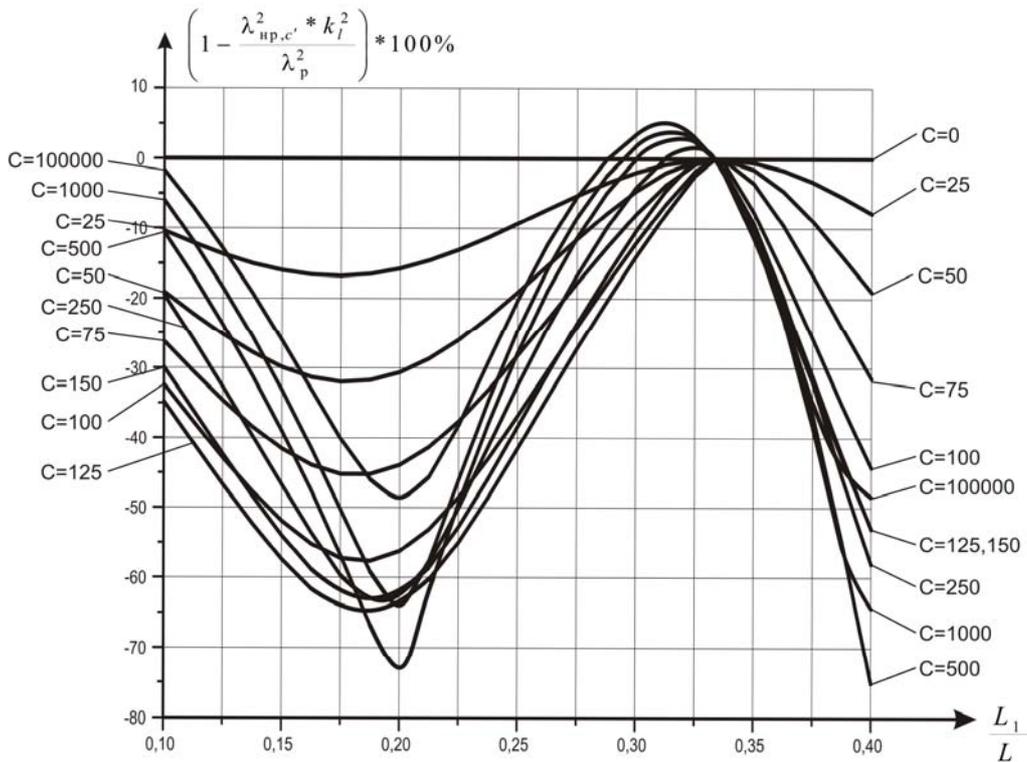


Рис. 8. График изменения частоты собственных колебаний в зависимости от соотношения длин пролетов при разных жесткостях упругих опор по третьей форме колебаний

С некоторым допущением, на графике для 3 формы можно также отметить два диапазона, удовлетворяющих условиям. Первый диапазон

– это от 0,29 до 0,35, второй находится вблизи значения 0,1 и невелик – от 0,8 до 0,12 для значений относительной приведенной жесткости

больше 500. Так же можно отметить, что кривая, соответствующая значению жесткости 25 полностью находится в допустимом диапазоне – следовательно при всех значения от относительной приведенной жесткости от 0 до 25 при любом отношении пролетов возможно определять частоту по более простым формулам с допустимой погрешностью. Аналогичный вывод можно сделать и для графика второй формы.

Как следует из вышеприведенных результатов исследования, в некоторых случаях рациональней для упрощения определения собственных колебаний балок на упругих опорах пользоваться формулой (6). В других же случаях возможно определение частот по этой же формуле, с последующим изменением полу-

ченных результатов в зависимости от погрешностей на графиках. Как пример, определим частоты собственных колебаний трехпролетной балки с центральными упругими опорами, имеющую следующие параметры сечения балки: 60 x 60 мм, длина балки 30 м, балка регулярная по длине, массе и жесткости пролетов; момент инерции сечения  $I = 108 \text{ см}^4$ ; модуль упругости для стали 20600 кН/см<sup>2</sup>; погонная масса 0,27714 кН/м. Жесткость левой упругой опоры 20 кН/м, жесткость правой – 40 кН/м.

Относительную приведенную жесткость упругих опор определяем по формуле (2) относительно любого пролета (в данном случае не имеет значения ввиду регулярной схемы балки) и будет равна соответственно для левой и правой упругих опор 50 и 100.

Таблица

Формы	Варианты расчета							
	МКЭ		по формуле (6) без учета погрешности по формам, по приведенным выше правилам для выбора жесткости опор		по формуле (6) с учетом погрешности		непосредственное составление частотного уравнения (точный метод)	
	Частота, Гц	Погрешность, %	Частота, Гц	Погрешность, %	Частота, Гц	Погрешность, %	Частота, Гц	Погрешность, %
1	1,028	0,00	0,9675	-6,25	1,028	0,00	1,028	0,00
2	1,309	0,00	1,3141	0,387	1,309	0,00	1,309	0,00
3	1,394	0,00	1,3940	-0,003	1,394	0,00	1,394	0,00

Как видно из таблицы с более чем достаточной точностью можно определить частоты собственных колебаний трехпролетной балки на центральных упругих опорах используя для этого только формулу (6) и графики, показанные на рис. 2–4. Использование графиков, показанных на рис. 6–8, также происходит по аналогичному принципу, что тоже позволяет с достаточной точностью определить частоты, не прибегая к непосредственному составлению частотного уравнения.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гуржий К. В. Исследование влияния незначительных нерегулярностей на изменение собственных частот неразрезных балок на жестких опорах / К. В. Гуржий, К. И. Солдатов // Межвузовский сборник, – Д., 1993, – С. 63–74.
2. Гуржий К. В. Особенности динамики систем близких к регулярным применительно к двухпролетным неразрезным балкам с промежуточной упругой опорой / К. В. Гуржий, К. И. Солдатов // Межвузовский сборник, – Д., 1994, – С. 70–83.
3. Солдатов К. И. Частные случаи задачи о собственных колебаниях регулярных упруго опертых балок. // Труды ДИИТа. – Д., 1971, – Вып. 127, – С. 72–79.
4. Ананьев И. В. Справочник по расчету собственных колебаний упругих систем. – М.: ОГИЗ, 1946. – 224 с.
5. Эйхе Г. Н. Анализ структуры уравнения частот и форм колебаний прямолинейных цепных стержневых систем и свободные колебания стержневых систем и свободные колебания радиально-вантовых мостов, Дисс. канд. техн. наук, – 183 с.
6. Солдатов К. И. Дослідження динаміки нерегулярних по довжинах прольотів мостових конструкцій / К. И. Солдатов, Г. С. Железняк, К. В. Гуржий // Вісник ДПТУ, – Д., 2004, – С. 221–226.
7. Солдатов К. И. О жесткости опор реальных мостовых конструкций / К. И. Солдатов, Г. С. Железняк, К. В. Гуржий // Вісник ДПТУ, – Д., 2004, – С. 154–160.
8. Железняк Г. С. Исследование собственных колебаний квазирегулярной трехпролетной балки / Г. С. Железняк, К. И. Солдатов // Вісник ДПТУ, – Д., 2005, – С. 166–173.

Поступила в редколлегию 10.11.2007.