

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ БАЗОВИХ МЕТОДІВ ЦИФРОВОГО МОДЕЛЮВАННЯ АНАЛОГОВОЇ СИСТЕМИ

Розглянуто основні методи цифрового моделювання аналогової системи: метод дискретизації диференціального рівняння, метод дискретизації імпульсної характеристики та білінійний метод. На прикладі коливальної ланки, як аналогового прототипу, розраховані похибки цифрового моделювання частотно-часових характеристик. Наведено висновки відносно точності цифрового моделювання різними методами.

Рассмотрены основные методы цифрового моделирования аналоговой системы: метод дискретизации дифференциального уравнения, метод дискретизации импульсной характеристики и билинейный. На примере колебательного звена, как аналогового прототипа, рассчитаны ошибки цифрового моделирования частотно-временных характеристик. Приведены выводы относительно точности цифрового моделирования разными методами.

Basic methods of digital design of the analog system – that of digitization of differential equation, of digitization of impulsive description and a bilinear one – have been considered. On the example of an oscillating link, as an analog prototype, errors of frequency-time of digital design descriptions have been calculated. Conclusions in relation to exactness of digital design by different methods have been drawn.

Вступ

Розвиток автоматизованих систем управління є одним з напрямків підвищення ефективності залізничного транспорту України [1]. На теперішній час при побудові пристроїв автоматики широко застосовують цифрові засоби обробки сигналів. У порівнянні з аналоговими цифрові пристрої обробки сигналів мають ряд переваг: висока точність, стабільність параметрів, можливість одержувати найрізноманітніші характеристики пристроїв, гнучкість та ін.

Відомі декілька методів синтезу дискретної моделі лінійної аналогової системи, зокрема, метод дискретизації диференціального рівняння, метод дискретизації імпульсної характеристики і білінійний метод [2]. Дискретну модель аналогової системи в загальному випадку будемо називати цифровим фільтром (ЦФ). При синтезі цифрового фільтра характеристики синтезованого фільтра намагаються зробити подібними до відомих характеристик аналогового прототипу.

Метою даної роботи є дослідження різних методів синтезу цифрових фільтрів, визначення методу, який точніше моделює аналогову систему.

Огляд основних методів синтезу цифрових фільтрів

Метод дискретизації імпульсної характеристики полягає в тому, що передатну функцію $W(z)$ дискретної системи одержують стандартним z -перетворенням імпульсної характеристики $p(t)$ аналогового прототипу за формулою

$$W(z) = Z\{p(t)\} = Z\{p(nT)\}. \quad (1)$$

Зворотне z -перетворення від $W(z)$, тобто

$$Z^{-1}\{W(z)\} = Z^{-1}\{Z\{p(nT)\}\} = p(nT), \quad (2)$$

дає імпульсну характеристику $p(nT)$ дискретного фільтра, яка в точках дискретизації nT ($n = 0, 1, 2, \dots$) співпадає з характеристикою аналогового прототипу. У зв'язку з останнім методом дискретизації імпульсної характеристики називають також методом інваріантної імпульсної характеристики.

У методі дискретизації диференціального рівняння диференціальне рівняння неперервної системи замінюють його дискретним варіантом, який називається різницевою рівнянням. Для цього в диференціальному рівнянні неперервної системи замінюють неперервні похідні дискретними, зокрема, першу і другу похідні можна замінити згідно з такими правилами:

$$\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{x(nT) - x(nT - T)}{T},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{x(nT) - 2x(nT - T) + x(nT - 2T)}{T^2}, \quad (3)$$

де $T = 1/F$ – інтервал дискретизації і $F = 1/T$ – частота дискретизації.

Для переходу від різницевого рівняння до дискретної передатвальної функції $W(z)$ дискретні функції $x(nT - kT)$, $y(nT - kT)$ згідно з властивістю про запізнення оригіналу заміню-

ють їх зображеннями виду $z^{-k}X(z)$, $z^{-k}Y(z)$, після чого дискретну передавальну функцію $W(z)$ визначають як відношення зображення вихідного сигналу $Y(z)$ до зображення вхідного сигналу $X(z)$.

Метод білінійного перетворення виник з намагання прямої заміни змінної s в передавальній функції $W(s)$ на змінну z за правилом

$$s = (1/T) \ln z, \quad (4)$$

яке виходить з того, що $z = \exp(sT)$. Однак така заміна призводить до значних труднощів при аналізі дискретної системи, оскільки дробово-раціональний вираз для передавальної функції неперервної системи перетворюється в трансцендентний для дискретної системи. Вихід був знайдений в наближеній заміні s на z згідно з виразом

$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}, \quad (5)$$

взятий з розкладання $\frac{1}{T} \ln z$ в ряд Тейлора:

$$s = \frac{1}{T} \ln z = \frac{2}{T} \left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^3 + \dots \right], |z| > 0. \quad (6)$$

Обмеження в (6) першим (лінійним) членом ряду і дає правило наближеної заміни (3), яке називають прямим білінійним перетворенням.

Для дослідження різних методів синтезу ЦФ виконаємо синтез цифрової коливальної системи, аналоговим прототипом якої є коливальна ланка.

Синтез цифрової коливальної системи

Параметри коливальної ланки: k_1 – коефіцієнт передачі; T_1 – постійна часу; ξ – коефіцієнт демпфірування.

Випишемо аналітичні вирази для характеристик коливальної ланки [3]:

- передавальна функція

$$W(s) = \frac{k_1}{T_1^2 s^2 + 2\xi T_1 s + 1} \quad 0 < \xi < 1; \quad (7)$$

- диференціальне рівняння

$$T_1^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\xi T_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_1 \cdot x(t); \quad (8)$$

- імпульсна характеристика

$$p(t) = \frac{k_1}{T_1 \sqrt{1-\xi^2}} e^{-\frac{\xi}{T_1} t} \sin \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_1} t, \quad t \geq 0; \quad (9)$$

- перехідна характеристика

$$h(t) = k_1 \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\frac{\xi}{T_1} t} \times \sin \left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_1} t + \varphi_1 \right) \right], \quad (10)$$

де

$$\varphi_1 = \arctg \sqrt{1-\xi^2} / \xi, \quad t \geq 0;$$

- амплітудно-частотна характеристика (АЧХ)

$$A(\omega) = k_1 / \sqrt{(1-T_1^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 T_1^2 \omega^2}; \quad (11)$$

- фазо-частотна характеристика (ФЧХ)

$$\varphi(\omega) = -\arctg \left[2\xi T_1 \omega / (1-T_1^2 \omega^2) \right]. \quad (12)$$

Дискретизація диференціального рівняння (8) заміною неперервних похідних дискретними за правилами (3) приводить до різницевого рівняння виду

$$y_n = a_0 x_n + b_1 y_{n-1} + b_2 y_{n-2}, \quad (13)$$

де

$$a_0 = \frac{k_1 T^2}{D}, \quad b_1 = \frac{2T_1 + 2\xi T_1 T}{D},$$

$$b_2 = \frac{-T_1}{D}, \quad D = T_1 + 2\xi T_1 T + T^2. \quad (14)$$

Метод інваріантної імпульсної характеристики зводиться до z -зображення імпульсної характеристики (9), яку перепишемо в такому вигляді:

$$p(t) = k_p e^{-\alpha t} \sin \omega_p t, \quad (15)$$

$$\text{де } \omega_p = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_1}, \quad K_p = \frac{k_1}{\omega_p T_1^2}, \quad \alpha = \frac{\xi}{T_1}.$$

Скориставшись таблицею z -перетворень, одержимо z -зображення імпульсної характеристики (15), яке являє собою передавальну функцію цифрової моделі, в такому вигляді:

$$P(z) = W(z) = \left[k_p \left(z e^{-\alpha T} \sin \omega_p T \right) \right] / \left[z^2 - 2z e^{-\alpha T} \cos \omega_p T + e^{-2\alpha T} \right]. \quad (16)$$

Прийнявши до уваги, що $W(z) = Y(z)/X(z)$, з (16) одержуємо різницеве рівняння системи в такому вигляді:

$$y_n = a_1 x_{n-1} + b_1 y_{n-1} + b_2 y_{n-2}, \quad (17)$$

де

$$a_1 = k_p e^{-\alpha T} \sin \omega_p T,$$

$$b_1 = 2e^{-\alpha T} \cos \omega_p T, \quad b_2 = -e^{-2\alpha T}.$$

Метод інваріантних частотних характеристик дозволяє з $W(s)$ білінійним перетворенням, тобто підстановкою (6), зразу одержати $W(z)$ у вигляді:

$$W(z) = \frac{k_1 T^2 z^2 + 2k_1 T^2 z + k_1 T^2}{B}, \quad (18)$$

де

$$B = (4T^2 + 4\xi T_1 T + T^2)z^2 + (2T^2 - 8T_1^2)z + (4T_1^2 - 4\xi T_1 T + T^2).$$

З (18) різницеве рівняння одержуємо в такому вигляді:

$$y_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + b_1 y_{n-1} + b_2 y_{n-2}, \quad (19)$$

де

$$a_0 = \frac{k_1 T^2}{D}, \quad a_1 = \frac{2k_1 T^2}{D}, \quad a_2 = \frac{k_1 T^2}{D},$$

$$b_1 = \frac{8T_1^2 - 2T^2}{D}, \quad b_2 = \frac{4T_1 T - 4T_1^2 - T^2}{D},$$

$$D = 4T_1^2 + 4\xi T_1 T + T^2.$$

Порівнюючи різницеві рівняння, одержані різними методами, помічаємо що вони відрізняються між собою. Тому постає питання, який метод синтезу цифрового фільтра точніше моделює аналогову систему.

Для отримання відповіді на це питання виконане дослідження точності моделювання різними методами за допомогою спеціально створеної програми «Методи синтезу цифрової моделі аналогового об'єкта».

Опис програми

Програма реалізує алгоритм роботи одержаних цифрових фільтрів та дозволяє виміряти їх часові і частотні характеристики: імпульсну характеристику $p(nT)$, перехідну характеристику $h(nT)$, амплітудно-частотну $A(kF_1)$ та фазочастотну характеристики $\varphi(kF_1)$. Програма також розраховує відповідні характеристики неперервної системи та порівнює їх з характеристиками цифрової моделі. Розбіжність між характеристиками оцінюється похибками моделювання ε_p , ε_h , ε_A і ε_φ . Крім похибки моделювання окремих характеристик розрахована загальна похибка моделювання ε кожним методом. Головне вікно програми зображено на рис. 1.

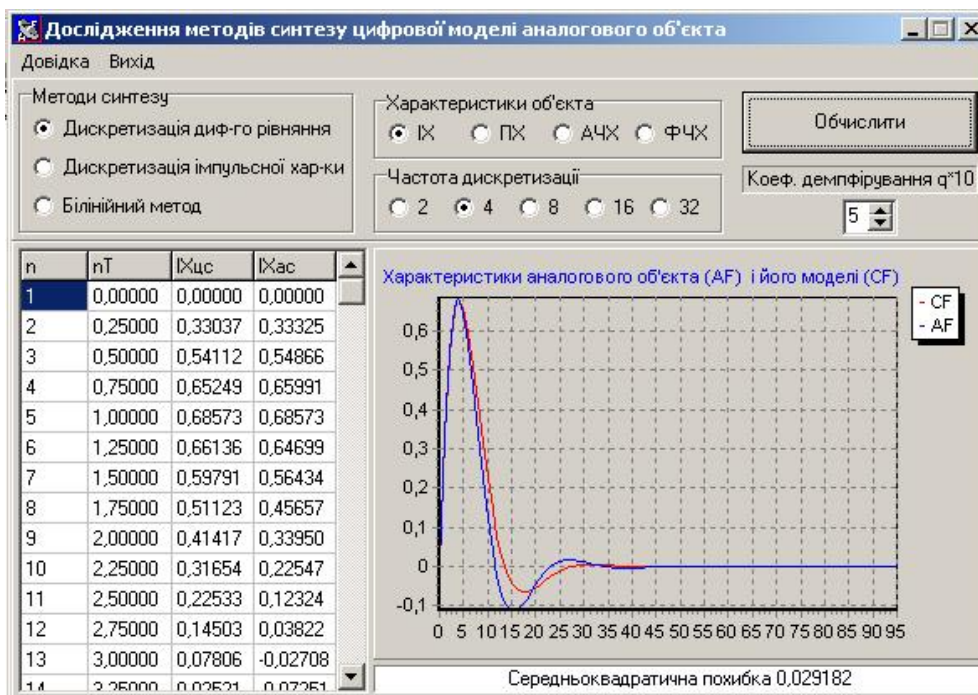
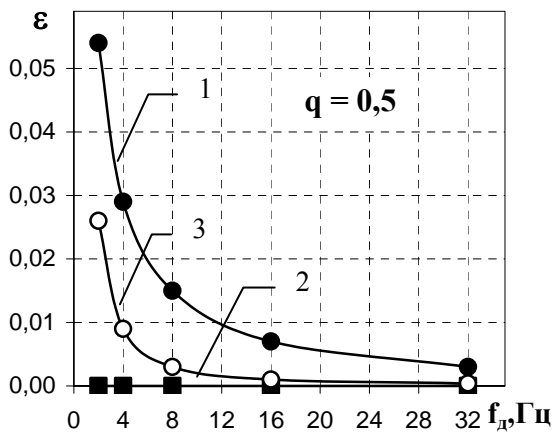


Рис. 1. Вікно програми «Методи синтезу цифрової моделі аналогового об'єкта»

Слід зазначити, що характеристики $p(nT)$, $h(nT)$, $A(kF_1)$, $\varphi(kF_1)$ цифрових моделей програма одержує шляхом «безпосереднього вимірювання» на моделі за допомогою вимірювальних сигналів (дельта функції для одержання імпульсної характеристики, одиничної ступеневої функції для перехідної характеристики і синусоїдальних коливань різних частот kF_1 , $k=1..64$ для частотних характеристик). Результати моделювання виводяться на екран у вигляді графіків та таблиць.

Для кожної характеристики і кожного методу моделювання досліджувалась залежність похибки моделювання від коефіцієнта демпфірування коливальної ланки (q), який уособлює фактор складності характеристик ланки, і від частоти дискретизації (f_d). Нормовані параметри ланки (c)

$$k_1 = 1; \quad T_1 = 1/2\pi,$$



частота спряження (Гц)

$$f_1 = 1/2\pi \quad T_1 = 1.$$

Результати дослідження

На рис. 2–5 наведено отримані в результаті дослідження залежності середньоквадратичної похибки моделювання характеристик аналогового прототипу від частоти дискретизації і коефіцієнта демпфірування коливальної ланки для різних методів синтезу.

Як показують отримані залежності, найбільша похибка моделювання всіх характеристик має місце для методу дискретизації диференціального рівняння. Причому для всіх трьох методів похибка моделювання зменшується зі збільшенням частоти дискретизації. Похибка також зменшується зі збільшенням коефіцієнта демпфірування коливальної ланки, тобто зі зменшенням складності аналогового прототипу.

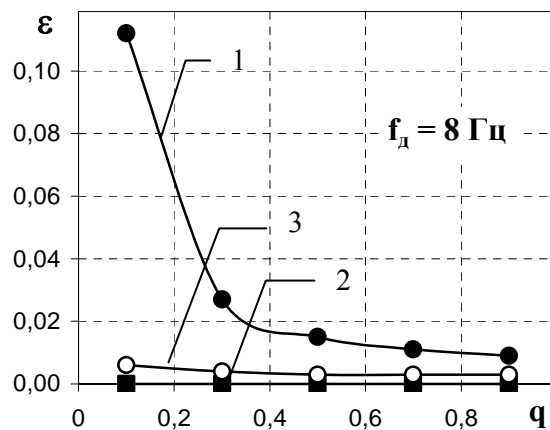


Рис. 2. Результати дослідження похибки моделювання імпульсної характеристики:

1 – дискретизація диференціального рівняння; 2 – дискретизація імпульсної характеристики; 3 – білінійний метод

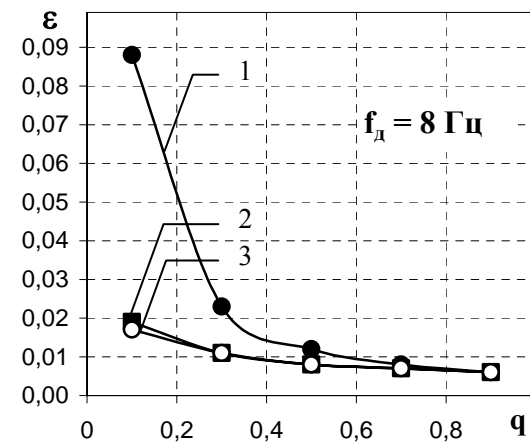
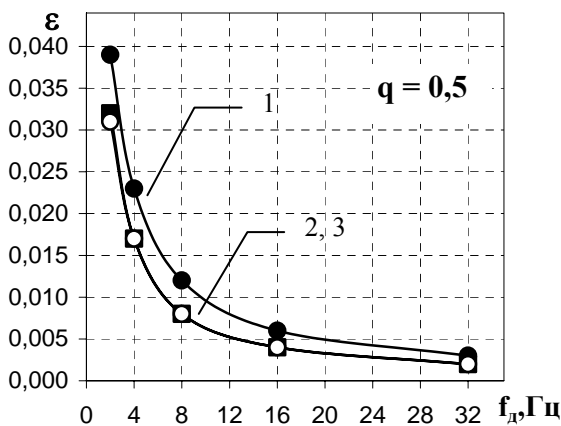
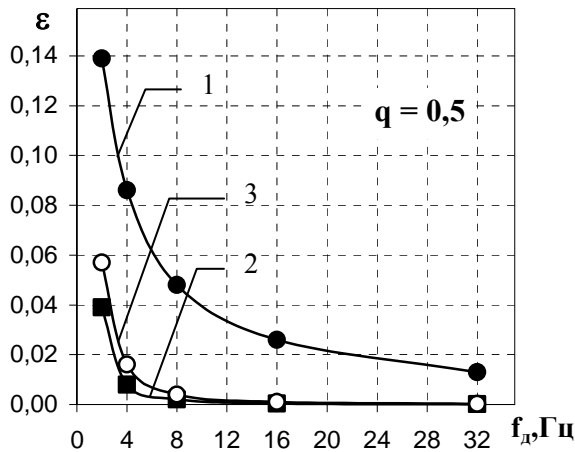
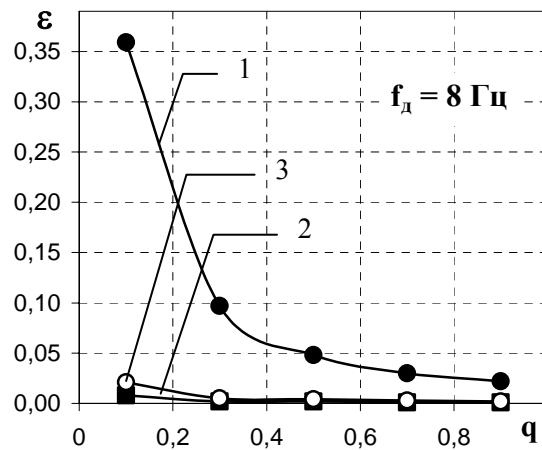


Рис. 3. Результати дослідження похибки моделювання перехідної характеристики:

1 – дискретизація диференціального рівняння; 2 – дискретизація імпульсної характеристики; 3 – білінійний метод



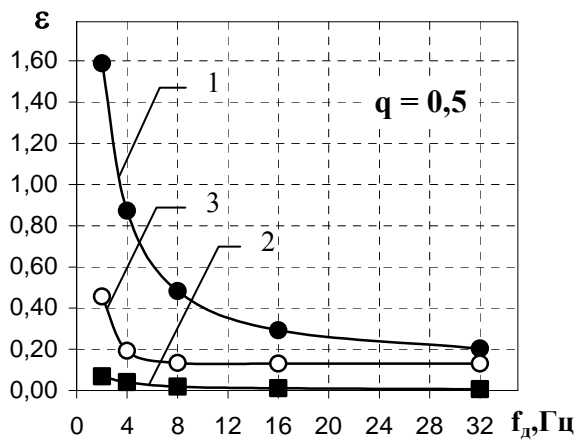
a)



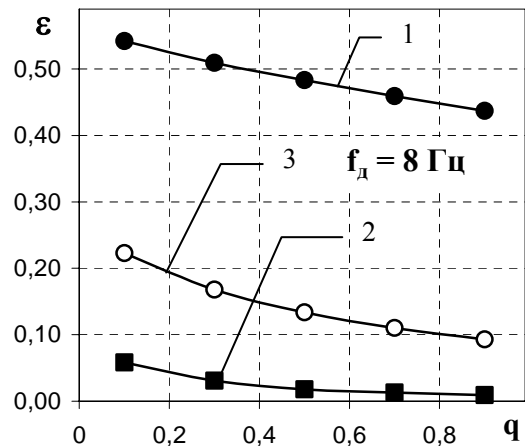
б)

Рис. 4. Результати дослідження похибки моделювання АЧХ:

1 – дискретизація диференціального рівняння; 2 – дискретизація імпульсної характеристики; 3 – білінійний метод



a)



б)

Рис. 5. Результати дослідження похибки моделювання ФЧХ:

1 – дискретизація диференціального рівняння; 2 – дискретизація імпульсної характеристики; 3 – білінійний метод

Як і слід було чекати, похибка моделювання імпульсної характеристики для методу дискретизації імпульсної характеристики дорівнює нулю (див. рис. 2). У разі моделювання перехідної і амплітудно-частотної характеристик для методу дискретизації імпульсної характеристики і білінійного методу виходять практично однакові похибки (див. рис. 3, 4). У той же час у разі моделювання фазочастотної характеристики метод дискретизації імпульсної характеристики дозволяє отримати найменшу похибку зі всіх трьох методів (див. рис. 5).

Висновки

Виконане дослідження показує, що середньоквадратична похибка за сукупністю відтворення усіх характеристик (частотних і часових) найменша при рівних інших умовах для методу дис-

кретизації імпульсної характеристики і найбільша для методу дискретизації диференціального рівняння. При цьому точність відтворення амплітудно-частотної та часових характеристик білінійним методом наближена до точності методу дискретизації імпульсної характеристики. Слід також зазначити, що точність всіх методів підвищується у разі збільшення частоти дискретизації.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Концепція та програма реструктуризації на залізничному транспорті України. – К.: НАБЛА, 1998. – 145 с. – Офіційне видання.
2. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высш. шк., 1988. – 448 с.
3. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Сов. радио, 1971. – 671 с.

Надійшла до редколегії 06.02.2006.