

АЛГОРИТМ ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧІ КОНТАКТУ КОЛЕСА І РЕЙКИ

Наведений алгоритм вирішення контактної задачі силової взаємодії пари «колесо–рейка» у сучасній постановці з використанням детальнього математичного моделювання колеса і рейки методом скінченних елементів.

Приведен алгоритм решения контактной задачи силового взаимодействия пары «колесо–рельс» в современной постановке с использованием детального математического моделирования колеса и рельса методом конечных элементов.

The algorithm of decision of contact task of power co-operation of the pair «wheel–rail» is resulted in the modern raising for the detailed mathematical design of wheel and rail by the method of finite elements.

Взаємодія колеса і рейки є фізичною основою руху рухомого складу залізниць. Від параметрів цієї взаємодії суттєво залежать безпека руху і основні техніко-економічні показники господарств колії та рухомого складу.

З 80-х рр. минулого сторіччя на залізницях колії 1520 мм спостерігається значне зростання інтенсивності зношення коліс та рейок. Очевидно, що це явище пов'язане з істотними змінами навантаженості зони контакту колеса та рейки.

Розробка ефективних методів зниження зносу пари «колесо–рейка» залежить від наявності достовірних методик дослідження, контактної взаємодії пари «колесо–рейка» за допомогою чисельних методів.

Теоретичні дослідження деформацій та напружень в зонах силового контакту коліс та рейок раніше виконувались на основі використання диференціальних варіаційних принципів класичної механіки та теорії матеріалу Герца, запропонованих ще у кінці XVIII сторіччя.

Принциповим положенням теорії Герца є те, що незалежно від форми контактної ділянки (плями) загрозований напружений стан виникає не на поверхні контакту, а на деякій глибині під нею.

Практичне застосування принципів Герца досить складне через використання малознайомих в інженерній практиці і складних рівнянь теорії потенціалу. Для рішення вказаних рівнянь необхідно вводити ряд припущень та ідеалізацій. Це не дозволяє достовірно враховувати особливості геометрії профілю кочення колеса та рейки. Введення різноманітних експериментальних поправочних коефіцієнтів наближає розрахункові дані до фактичних, але вносить додаткові похибки.

У зв'язку з цим вирішено застосувати інші методи розрахунків. Алгоритм вирішення контактної задачі полягає в наступному.

Задача. Визначити деформації і напруження, які виникають на площинах контакту колеса та рейки під час руху вагона на криволінійних ділянках колії.

На колесо діє вертикальна сила P та значна за величиною горизонтальна поперечна сила Q . Колесо контактує з рейкою у двох точках, одна з яких лежить на поверхні кочення, а друга - на гребені. Така взаємодія колеса з рейкою спостерігається у незношених коліс та рейок Р65. Якщо колеса або рейки зношені, виникає можливість одноточкового контакту, але такий варіант тут не розглядається.

Колесо та рейка розбиваються на скінченні елементи таким чином, щоб кожному вузлу на поверхні кочення колеса відповідав вузол на поверхні рейки, при цьому проекції обох вузлів на площину контакту повинні співпадати. Кожній парі таких вузлів слід присвоїти однакові номери j . Вузли, в яких контакт колеса та рейки явно неможливий, слід залишити без уваги, щоб не збільшувати обсяг майбутніх розрахунків.

Рейка нерухома, а колесо може переміщуватись в вертикальному та поперечному напрямках. Відповідні координати переміщення колеса позначені через z , y (рисунок).

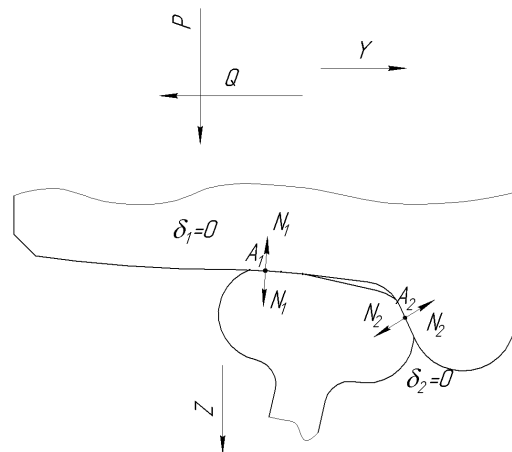


Рис. Розрахункова схема

Під зазором δ_j у парі j -х вузлів приймається довжина проекції відрізка, який з'єднує j -ті вузли моделей колеса та рейки, на вісь, перпендикулярну площині контакту. При геометричному контакті колеса з рейкою без дії навантажень ($P=Q=0$) не менш ніж дві пари вузлів скінченно-елементних моделей будуть контактувати між собою. Позначимо їх: A_1 – базисний вузол на поверхні кочення колеса (та йому відображений на рейці); A_2 – базисний вузол на гребені (та у нижній частині викружки рейки). Цим вузлам відповідають пари контактних зусиль N_1, N_2 , що нахилені до вертикалі під кутами β_1, β_2 .

Після навантаження скінченно-елементної моделі колеса силами P і Q (див. рисунок) виникнуть контактні плями, до яких увійдуть m пар вузлів. Зазори у кожній з цих пар будуть дорівнювати нулю

$$\delta_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, m. \quad (1)$$

Між кожною парою вказаних вузлів діють нормальні сили N_j . Одна з цих сил напрямлена до ободу колеса, друга – до головки рейки. Сили вважаються додатними, якщо вони викликають стискаючі напруження у контактуючих деталях. У скінченно-елементних моделях ці сили не можуть бути від'ємними, тобто

$$N_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (2)$$

Як припущення приймаємо, що тангенціальні компоненти сил контактної взаємодії не враховуються, тобто

$$F_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Іншими словами, ми нехтуємо силами тертя.

Невизначеність задачі полягає в тому, що сукупність вузлів $j = 1, 2, 3, \dots, m$ скінченно-елементних моделей, що належать до контактної плями, заздалегідь невідома. До того ж, вона залежить від величини навантажень P і Q , а також від модулів пружності матеріалів колеса та рейки. Тому спочатку включаємо до параметрів задачі завищену кількість пар вузлів n , щоб вони певно виявили обриси контактних плям. У ході рішення необхідно визначити номери тих вузлів (їх кількість позначена $m < n$), які будуть належати саме контактним плямам і передавати контактні сили, тобто для $j \in (1, \dots, m)$ виконується рівняння (1), а (2) виконується як нерівності $N_j > 0$.

Наведений нижче алгоритм працює так, що усі інші вузли у кількості $(n - m)$, які знаходяться зовні контактних плям будуть передавати нульові сили, тобто $N_j = 0$ для $j \notin (1, \dots, m)$.

Кут нахилу до вертикалі площадки контакту колеса та рейки позначений на поверхні кочення через β_i , на гребені – β_r . Величини β_j (введені для зручності) приймають одне з двох значень β_K або β_r залежно від того, чи лежить j -та точка на поверхні кочення або на гребені.

Умови рівноваги колеса:

$$\sum_j N_j \cos \beta_j - P = 0, \quad (4)$$

$$\sum_j N_j \sin \beta_j - Q = 0. \quad (5)$$

Нехай $\delta_{jk}^{(K)}, \delta_{jk}^{(r)}$ – переміщення j -го вузла колеса або рейки вздовж внутрішньої (відносно до відповідного тіла) нормалі до площадки контакту під дією одиничної сили в k -му вузлі, $\delta_j^{(0)}$ – початковий зазор в j -й точці.

Тоді величина зазору визначається так

$$\delta_j = \sum \left[\delta_{ji}^{(K)} + \delta_{ji}^{(r)} \right] N_i + \delta_j^{(0)} - z \cos \beta_j + y \sin \beta_j. \quad (6)$$

Сили P, Q задані, початкові зазори $\delta_j^{(0)}$ визначаються геометрією колеса і рейки та також визначені заздалегідь, як і елементи $\delta_{ji}^{(K)}, \delta_{ji}^{(r)}$, які визначають шляхом розрахунку напружено-деформованого стану колеса та рейки за допомогою метода скінченних елементів. Задача, таким чином, зводиться до визначення $n + 2$ (n – число вузлів на площадках контакту) величин y, z, N_1, \dots, N_n , які задовольняють співвідношення (1)–(6).

Для розв'язання задачі пропонується такий ітераційний алгоритм, ідея якого нав'язана методом Гаусса-Зайделя розв'язання системи лінійних рівнянь. Значення невідомих визначаються на кожному кроці, оцінки s -го кроку позначаються через $y^{(s)}, z^{(s)}, N_1^{(s)}, \dots, N_n^{(s)}$. Щоб їх розрахувати потрібно скористатися співвідношеннями

$$N_1^{(s)} = \max \left\{ 0, \frac{1}{\cos \beta_1} \left(P - \sum_{j=3}^m N_j^{(s-1)} \cos \beta_j \right) \right\}; \quad (7)$$

$$N_2^{(s)} = \max \left\{ 0, \frac{1}{\cos \beta_2} \left(Q - N_1^{(s)} \sin \beta_1 - \sum_{j=3}^n N_j^{(s-1)} \cos \beta_j \right) \right\}; \quad (8)$$

$$z^{(s)} = \frac{1}{\cos\beta_1} \left(\sum_{i=1}^2 [\delta_{1i}^{(k)} + \delta_{1i}^{(p)}] N_i^{(s)} + \sum_{i=3}^n [\delta_{1i}^{(k)} + \delta_{1i}^{(p)}] N_i^{(s-1)} + \delta_1^{(0)} + y^{(s-1)} \sin\beta_1 \right); \quad (9)$$

$$y^{(s)} = -\frac{1}{\cos\beta_2} \left(\sum_{i=1}^2 [\delta_{2i}^{(k)} + \delta_{2i}^{(p)}] N_i^{(s)} + \sum_{i=3}^n [\delta_{2i}^{(k)} + \delta_{2i}^{(p)}] N_i^{(s-1)} + \delta_2^{(0)} + z^{(s)} \sin\beta_2 \right); \quad (10)$$

$$N_j^{(s)} = \max \left\{ 0, -\frac{1}{\delta_{jj}^{(k)} + \delta_{jj}^{(p)}} \left(\sum_{i=1}^{n-2} [\delta_{ji}^{(k)} + \delta_{ji}^{(p)}] N_i^{(s)} + \sum_{i=3}^n [\delta_{ji}^{(k)} + \delta_{ji}^{(p)}] N_i^{(s-1)} - z^{(s)} \cos\beta_j + y^{(s)} \sin\beta_j \right) \right\}, \quad j > 2. \quad (11)$$

Рівняння (7), (8) впливають з умов (4), (5), а вирази (9)–(11) – з умов (1), (2) та виразу (6). Очевидно, що

$$N_j^{(s)} \geq 0, \quad \delta_1^{(s)} = 0, \quad \delta_2^{(s)} = 0.$$

Виконання умов

$$\delta_j^{(s)} \geq 0, \quad \delta_j^{(s)} N_j^{(s)} = 0 \quad \text{при } j > 2$$

забезпечується виразом (11) та тим чинником, що

$$\delta_{jj}^{(s)} \geq 0, \quad \delta_{jj}^{(s)} \geq 0.$$

Алгоритм вимагає виконання рівняння $\delta_1^{(s)} = 0, \delta_2^{(s)} = 0$, тому базові точки A_1, A_2 повинні лежати у тих областях, де колесо та рейка, напевно торкаються одне одного.

Початкове наближення можливо обрати довільно. Наприклад, так:

$$y^{(0)} = 0, \quad z^{(0)} = 0, \quad N_j^{(0)} = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Як тільки значення невідомих, що отримані при виконанні двох послідовних кроків, перестають помітно відрізнятися, робота алгоритму закінчується. Одна з можливих умов завершення виглядає так:

$$\max_j \left| N_j^{(s)} - N_j^{(s-1)} \right| \leq \frac{\sqrt{P^2 - Q^2}}{1000n}.$$

Сили $N_j^{(s)}$ (s – номер останнього кроку) потрібно прикласти до вузлів скінченно-елементних моделей колеса та рейки, виконати розрахунок напружено-деформованого стану цих тіл та отримати в результаті значення контактних напружень.

У малому околі рішення системи рівнянь (1)–(6) немає іншого рішення. Для того, щоб довести це, потрібно виписати однорідну систему лінійних рівнянь, якій задовольняють малі поправки до рішення, та впевнитись, що матриця коефіцієнтів цієї системи не вироджена. Останнє походить з такого твердження: якщо D – (суворо) додатно визначена матриця, а матриця N має повний рядковий ранг, то матриця (12) обратима

$$\begin{pmatrix} D & N^T \\ N & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Нехтування силами тертя зменшує достовірність оцінки навантаженості точок контакту, якщо їх дві, а якщо одна – ніяких похибок не виникає. виправдано воно може бути тим, що зовнішні навантаження, від яких навантаженість точок контакту залежить ще більше, задані узагальнено.

2-точковий контакт можливий лише при одному значенні бокового відносу колеса. Встановити положення точок контакту можливо, не вдаючись до моделювання руху колісної пари. Якщо контакт 1-точковий, без нього, взагалі кажучи, не обійтися, оскільки в цьому випадку величина бокового відносу (а разом з нею і положення точки контакту) залежить від радіуса кривої, навантажень на колісну пару, швидкості руху та т. п. Проте, припущення про рівність нулю сил тертя вимагає рівняння

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{Q}{P}, \quad (13)$$

в протилежному випадку не вдається забезпечити вимоги рівноваги колеса – немає чим компенсувати тангенціальну (по відношенню до площадки контакту) складову зовнішнього навантаження. Умову (13) можливо використати для визначення положення точки контакту, потрібно лише не забути, що отриманий результат занадто точним не буде, бо сили тертя ні в якому разі не рівні нулю.

Величини y, z при цьому не можуть розглядатися як незалежні – заборонено переміщення колеса вздовж дотичної до площадки контакту, тобто $y = -z \operatorname{tg}\beta$.

Надійшла до редколегії 25.04.2006.