

## ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ ПОЛЯРНОГО СПОСОБА СЪЕМКИ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ КРИВЫХ

Розглянуто питання точності нового полярного способу зйомки залізничних кривих.

Рассмотрены вопросы точности нового полярного способа съемки железнодорожных кривых.

Questions of accuracy new polar way of shooting of railway curves are considered.

С появлением электронных тахеометров появилась возможность выполнять координатную съемку железнодорожных кривых полярным методом. Целью данной работы является системный анализ точности съемки кривых полярным способом вообще и сравнительная оценка точности при разных комбинациях измеряемых величин.

Общий случай съемки состоит в совместном определении координат точек железнодорожной кривой и пунктов съемочного обоснования в виде полигонометрических знаков, располагаемых вблизи железнодорожного пути, по одновременно измеренным величинам – углам, горизонтальным проложениям и стрелам. Методика исследования толерантна к измерениям любых величин вплоть до того, что координаты точек трактуются как измеренные величины. Известно, что параметрический способ исчисления средних значений методом наименьших

квадратов, сопровождающийся одновременным расчетом точности и меры связи ошибок средних значений, при заданной точности измеряемых величин, позволяет наилучшим способом исследовать методику измерений, вплоть до элиминации любых комбинаций «избыточных» измеряемых величин. Тем самым, имеется возможность исследовать зависимость точности координат снимаемых точек от числа измеренных величин, их вида и взаимного положения снимаемых точек. Конечно, при универсальной методике исследование остается конкретным в смысле геометрической определенности пространственного положения снимаемых точек.

В качестве примера принята кривая длиной 800 и радиусом 1 000 м с точками деления пути через 100 м (пикеты), с системой координат с пикета 0 на пикет 8 и полигонометрический ход съемочного обоснования с четырьмя пунктами (рис. 1).

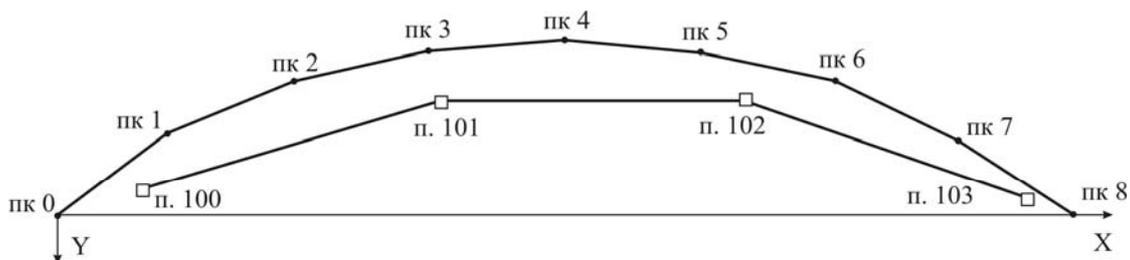


Рис. 1

При этом в полной модели для определения 23 координат 12 точек (15-ти координат точек деления пути и 8-ми координат 4-х пунктов полигонометрического хода 100...103) предполагаются измеренными 49 величин: 8 расстояний при разбивке точек деления пути; 15 линейных засечек на пикеты с пунктов полигонометрии, 3 расстояния между пунктами полигонометрического хода и 20 горизонтальных углов. Вся система симметрична относительно середины кривой, линии полигонометрического хода приняты длиной по 250 м.

Исходная матрица производных 49 измеренных величин по 23-м определяемым координатам  $B (49 \times 23)$  была организована так, чтобы ее удобно было «урезать», исключая определенные виды измерений. Например, исключая первые 8 строк, рассматриваем вариант без строгой разбивки точек деления пути, а, исключая первые 27 строк, получаем вариант угловых засечек с пунктов полигонометрического хода без строгой разбивки точек деления пути. Тем самым, рассмотрено, помимо полного еще 6 вариантов возможных съемочных стратегий вплоть до полной трилатерации (без угловых измерений).

Сразу отметим, что ввиду специфики задачи, пункты съемочного обоснования должны располагаться вблизи железнодорожной кривой. Следовательно, углы при засекаемых точках могут быть не очень благоприятными. Не рассматривался вариант с измерением углов поворота хорд, хотя такой вариант съемки (как в способе Гоникберга) возможен.

В исследуемой модели дисперсии горизонтальных углов и горизонтальных проложений приняты равными  $10 \text{ с}^2$  и  $10 \text{ мм}^2$  соответственно. Измерения с такой точностью обыкновенны при работе с электронными тахеометрами. Корреляции углов засечек, выполняемых с одной точки полигонометрического хода и равные  $5 \text{ с}^2$ , не позволяли принять весовую матрицу измеренных величин единичной.

Как и следовало ожидать, стратегия полного набора измерений обеспечила не только наибольшую расчетную точность определения координат, но и наименьшие корреляции ошибок по осям координат.

Так как ошибки определения положения снимаемых точек характеризуются двумерной случайной величиной, для решения практических задач необходимо для каждой определяемой точки рассчитать эллипс ошибок по двумерным ковариационным матрицам

$$\sigma_{xy}^2 = \frac{1}{2} \left( \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \pm \sqrt{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)^2 + 4K_{xy}^2} \right) \quad (1)$$

и угол поворота его большего диаметра относительно оси  $X$

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctg \left[ \frac{2K_{xy}}{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)} \right]. \quad (2)$$

В таблице приведены величины диаметров эллипсов ошибок  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ , вычисленные по формуле (1) в миллиметрах, и углы поворотов  $\alpha$  их осей (2) относительно исходной системы координат в градусах для четырех съемочных стратегий.

Таблица

ПК	Стратегии											
	1			2			3			4		
	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\alpha$									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	2,1	1,3	-22	3,0	1,7	-26	3,3	1,8	-20	21,3	2,8	-19
2	2,7	2,1	-13	4,0	1,9	-14	4,3	2,4	-18	40,6	10,2	-14
3	2,9	2,6	+32	3,4	2,5	-4	5,3	3,1	-16	42,5	8,1	-8
4	3,0	2,8	+131	3,4	2,6	+1	6,0	3,2	-12	31,9	7,1	-7
5	3,1	2,8	+38	3,6	2,5	+4	6,7	3,1	-9	42,5	8,7	+1
6	3,3	2,3	+12	3,9	1,9	+6	7,2	3,1	-5	34,6	9,6	0
7	3,4	1,5	+6	4,0	1,5	+7	7,6	1,8	+2	32,5	9,6	+4
8	3,6	0	0	4,0	0	0	8,0	0	0	32,8	0	0

Первая съемочная стратегия выполняется со строгой разбивкой точек деления пути, полигонометрическим ходом, угловыми и линейными засечками пикетов с пунктов полигонометрического хода. Во 2-й стратегии измеряются те же величины, но без строгой разбивки точек деления пути. В первом случае измерялось 49 величин, во втором – 41. Уменьшение точности (увеличение осей эллипсов ошибок в столбцах 5 и 6 по сравнению с числами в столбцах 2 и 3), разумеется заметное, но небольшое. Поэтому с практической точки зрения, выполнять точные

(и трудоемкие) измерения расстояний между точками деления пути нецелесообразно.

Применение 3-й стратегии угловых засечек, даже с трудоемкой строгой разбивкой точек деления пути оказалось менее точным (столбцы 8 и 9).

Приводить численные характеристики всех других возможных стратегий съемок нет необходимости. Примером неприемлемо малой точности служит стратегия 4 в таблице (угловые засечки без строгой разбивки точек деления пути) (столбцы 11 и 12).

Следует отметить, что линейные засечки при углах близких к  $180^\circ$  фактически означают повторные измерения расстояний и почти не уточняют определение координат по оси  $Y$ , а угловые засечки при этом уточняют координаты по оси  $Y$  и не участвуют в измерении положения снимаемых точек по оси  $X$ .

На рис. 2 приведена схема эллипса ошибок на ПК 4 для стратегии 1.

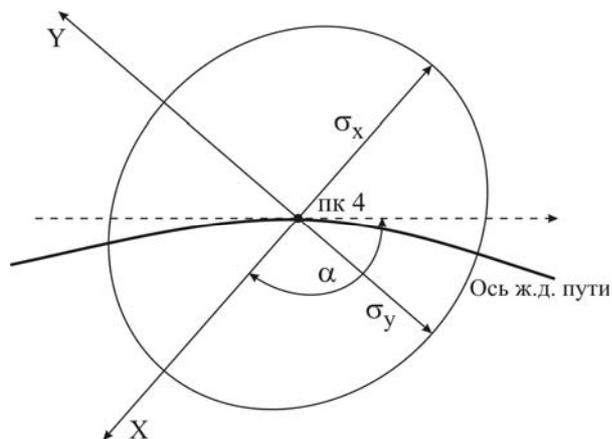


Рис. 2

Завершая анализ возможных стратегий съемки, считаем важным подчеркнуть, что именно применение комбинированных засечек позволяет ослабить неблагоприятные последствия недопустимых в обычной геодезической практике угловых засечек.

В рассмотренном примере из всей совокупности измерений на все точки деления пути одновременно обрабатываются лишь относящиеся к пикетам. Теоретически возможна обработка сразу всех измерений, но округление величин производных в матрице  $B$ , при большом ее размере, неизбежно приведет к проблеме обращения матриц, близких к вырожденным. В связи с этим, вычисления координат точек деления пути, расположенных между пикетами, целесообразно вести во вторую очередь, опираясь на координаты пунктов полигонометрии и их ковариационные матрицы.

Как уже было видно из сравнения двух первых стратегий, ввиду незначительного возможного уточнения координат пикетов при совместной обработке всех измерений, этим уточнением можно пренебречь. Принимая во внимание почти линейное изменение величин дисперсий координат от пикета к пикету, можно определить их для промежуточных точек путем интерполяции. Условие же комбинированной засечки остается необходимым, но решать ее можно и не строгим способом.

Помимо расчетной точности определения координат точек деления пути, однозначно соответствующей проектируемой точности измерений (задаваемой матрицей  $K_{ll}$ ), необходима вероятностная оценка результатов полевых измерений на предмет соответствия их точности проектной. Это нужно и для исключения грубых ошибок, и для построения доверительных интервалов координат точек.

Например, при заданном доверительном интервале для координат наиболее слабой снимаемой точки (точнее доверительного эллипса ошибок) может быть рассчитана проектная матрица  $K_{ll}$  измеряемых величин. С другой стороны, отклонения измеренных величин от усредненных (вычисленных по координатам точек) характеризуют совокупную фактическую точность измерений и могут обнаруживать наличие грубых ошибок.

Надежность статистических оценок при соблюдении стационарных условий измерений определяется, в первую очередь, числом степеней свободы – так называемых «избыточных измерений». В нашем случае это разность числа измеренных величин и числа определяемых координат. В полной модели эта разность равна  $49 - 23 = 26$ . Грубо говоря, каждая из координат определяется как бы дважды.

В варианте без строгой разбивки точек деления пути число степеней свободы на 8 меньше, всего 18. И в первом и во втором варианте съемки можно вычислить вектор-столбец отклонений ( $V$ ) измеренных величин ( $L$ ) от средних ( $\bar{L}$ ), соответствующих вектору средних координат точек  $\bar{X}$ :

$$V = L - \bar{L} \quad (3)$$

размером 49 в первом случае и 41-во втором.

Вероятная «взвешенная» сумма квадратов компонентов этих векторов при нормальном распределении описывается  $\chi^2$ -распределением [1]. Ее интервал строится по числу степеней свободы и принятой доверительной вероятности. Он может быть и двухсторонним, если есть основания предполагать возможность фактического выхода за расчетные пределы в обе стороны.

Итак, контроль качества измерений будет состоять в построении доверительного интервала:

$$\chi_{m,1-p}^2 \geq V^T \cdot K_{ll}^{-1} \cdot V \geq \chi_{m,p}^2, \quad (4)$$

где  $m$  – число степеней свободы;  $p$  – половинный уровень значимости (например, при доверительной вероятности 95 % уровень значимости равен 5 %).

Если же строится односторонний интервал, то критерий определяют на полный уровень значимости. При односторонней функции риска (существенна величина ошибки, а не ее знак) число в (4) не должно превышать теоретического, а  $p$  принимается равным уровню значимости. Например, если уровень значимости 5 %, а число степеней свободы 26 – табличное значение  $\chi_{26;95}^2 = 38,9$ .

Если число, вычисленное по (4) окажется больше, то с вероятностью 0,95 придется заключить, что фактическая точность полевых измерений ниже проектной. После проверки гипотезы о точности измерений для координат каждой точки может быть построен эллипс вероятных наибольших ошибок путем увеличения размера его полуосей в  $k$  раз.

При доверительной вероятности 95 % этот множитель равен 1,96. Кстати, характеризуя точность измерений, обычно подразумевают двойную стандартную ошибку. Так что точность съемки пикета 4 характеризуется эллипсом с полуосями 6,0 и 5,6 мм (столбцы 2 и 3) при самой точной из рассмотренных нами стратегий съемки.

В определенных случаях необходимо знать точность определения снимаемых точек по некоторым выделенным направлениям. Например, для расчета рихтовок кривых требуется знать вероятные радиальные ошибки.

Дирекционные углы из центра кривой на  $i$ -й пикет вычисляются по формуле

$$\alpha_i = 100i/R - 0,5(\varphi + \pi), \quad (5)$$

где  $R$  – радиус кривой;  $\varphi$  – угол поворота;  $i$  – номер пикета.

Угол, составленный большой полуосью эллипса ошибок, равен разности дирекционного угла полуоси  $\alpha_{i3}$  и дирекционного угла радиуса

$$\gamma_i = \alpha_{i3} - 100i/R + 0,5(\varphi + \pi), \quad (6)$$

а стандартная радиальная ошибка на пикете вычисляется по формуле

$$\sigma_{R,i} = \frac{\sigma_{x,i} \cdot \sigma_{y,i}}{\sqrt{\sigma_{x,i}^2 \sin^2 \gamma_i + \sigma_{y,i}^2 \cos^2 \gamma_i}}. \quad (7)$$

Приведенные в таблице эллипсы ошибок и их ориентации как раз и нужны для этой цели. В принятой системе координат координаты пикета 0 безошибочны. Но радиальная ошибка на пикете 8 нулю не равна.

Чрезвычайно полезным может быть использование эллипсов ошибок для нахождения значений координат существующей кривой для расчетов выправки кривой. В этом случае находят математическое выражение для плавной кривой, которая проходит через все эллипсы ошибок. Для дальнейших расчетов выправки предполагают, что истинное положение существующей кривой совпадает с найденным математическим описанием.

### Выводы

1. Данная методика исследования и расчета точности проектируемой съемки железнодорожного пути может с успехом применяться при обработке результатов съемки.
2. При съемке точек деления пути с пунктов полигонометрии, располагаемых вдоль пути, необходимо применять комбинированные засечки.
3. Достаточную точность съемки пути обеспечивает электронный тахеометр.
4. Точки деления пути должны быть маркированы, расстояния между ними можно не измерять.
5. Координаты точек деления пути между пикетами необходимо вычислять во вторую очередь, используя координаты точек хода и пикетов.
6. Эллипсы ошибок могут быть использованы для нахождения математического описания существующей кривой

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Г. Г. Абезгауз и др. Справочник по вероятностным расчетам. – М.: Воениздат Минобороны СССР. 1970. – 536 с.

Поступила в редколлегию 26.04.2006.