УДК 510.67+519.765

В. М. ІЛЬМАН (ДІІТ)

ВЛАСТИВОСТІ ФОРМАЛЬНИХ СТРУКТУР ТА ЇХ ПІДСТРУКТУР

Для проектування систем пропонується застосовувати формальну структуру, як трикомпонентний об'єкт з множиною елементів, сигнатурою і аксіоматикою. Наведені деякі властивості структур і їх підструктур. Розглянуто проблему відтворення формально граматичних структур за мовними підструктурами.

Для проектирования систем предлагается использовать трехкомпонентную формальную структуру со множеством элементов, сигнатурой и аксиоматикой. Приведены некоторые свойства структур и их подструктур. Рассмотрена проблема восстановления формально грамматических структур по языковым подструктурам.

For designing of systems, it has been prposed to use a three-component formal structure with a set of elements, a signature and axiomatics. Some properties of the structures and their substructures have been presented. The problem of recovering the formally grammatical structures with the help of language substructures has been considered.

Проектування багатьох складних систем у тому числі й систем залізничного транспорту можливо пов'язати з побудовою деякої формальної системи, котра моделює предметну область проектування. Як відомо, формальні системи дозволяють будувати мовні конструкції предметних областей і не враховують операції, правила їх застосування та їх властивості, за якими ці операції виконуються над конструктивними об'єктами. Тобто за межами формальних систем знаходяться важливі для проектування систем алгебраїчні властивості операцій і їх алгебраїчна структура. Тому у подальшій роботі введено у розгляд новий математичний об'єкт – формальна структура. Формальна структура визначена, як упорядкована трійка з множиною елементів деякої предметної області, сигнатурою – множиною операцій та аксіоматикою – сукупністю аксіом, правил та ін. Таким чином, у межах формальних структур можливо відтворювати необхідні конструкції предметних областей як мовні конструкції і визначати структури цих конструкцій або формальних ланцюжків, які їм відповідають.

У матеріалах даної роботи розглянуто об'єкти проектування, які моделюються за допомогою формальних породжувальних граматик [1; 2], з позицій формальних структур і на цій основі запропоновано новий підхід до розв'язання задачі, відтворення формальних породжувальних граматик.

Попередні відомості. Дамо спочатку декілька важливих для подальшого визначення конструктивних об'єктів та необхідних понять і позначень.

Нехай $A=\{o,a_1,a_2,\dots a_n\}$ довільний термінальний з порожнім елементом o алфавіт, $N=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_k\}$ – будь який нетермінальний алфавіт і $V=A\bigcup N$ їх словник, тоді позначимо через $\mathbb{F}(V)$ вільну мову на словникові V. Введемо у розгляд сигнатуру Σ як множину m-місних операцій $(\cdot)^m$, наприклад, операції заміщення $(\to^2)$, операції конкатенації $(\otimes^2)$ та інших операцій і введемо [4; 5] наступний формальний об'єкт.

Визначення 1. Породжувальною формальною граматичною структурою формальної граматики з сигнатурою Σ і аксіоматикою Λ назвемо упорядковану трійку

$$C=\langle V,\Sigma,\Lambda\rangle, \qquad (1)$$

де аксіоматика Λ може складатися з: аксіом початку, аксіом виводу та інших аксіом і систем продукцій та їх властивостей.

За визначенням 1 формальна структура C є граматичною, тобто є повною у тому розумінні, що, оскільки і в граматиках всі символи словника обов'язково використовуються в аксіомах і продукціях її аксіоматики. Тому, зрозуміло, що за заданою аксіоматикою однозначно відтворюється формальна граматична структура та її граматика, а також породжується певна формальна мова. У подальшому розглядаються тільки формально граматичні структури з одноелементною сигнатурою (використовується тільки операція заміщення $(\to^2)$) і аксіомами початку та виводу, наприклад, аксіоматика Λ структури (1) може мати такий вигляд

$$\Lambda=\begin{cases}\alpha\to b\mid\alpha=b-\text{аксіома виводу},\\ \sigma\to a\alpha-\text{аксіома початку},\\ \alpha\to b\alpha;\end{cases}$$

за якою породжується така мова

$$L(A) = \{ab^k; k \in \mathbb{N}\}.$$

Очевидно, для структури (1) в основному зберігаються результати отримані для формальних граматик, наприклад, у класі формально граматичних структур можливо виділити класи BC – структур і VC – структур, які відповідають контекстно залежним і контекстно вільним граматикам відповідно. Крім того для структур (1) можливо ввести поняття еквівалентності.

Визначення 2. Дві граматичні структури C_1 і C_2 еквівалентні (слабко), якщо вони породжують одну і ту ж мову, тобто $L(A_1) = L(A_2)$.

Для класів еквівалентних структур мають місце теореми 1,2 [3].

Теорема 1. У будь якому класі еквівалентності граматичних структур завжди існує нормальна структура C_h, тобто структура продукції і аксіоми аксіоматики, якої мають властивість $(x \to y;\ x \in \mathbb{F}(N))$.

Визначення 3. Структура C зветься нескороченою, якщо продукції і аксіоми її аксіоматики задовольняють властивості

$$(x \to y;\ |x| \le |y|,\ \ x, y \in \mathbb{F}(V)).$$

Визначення 4. Структура C зветься о – вільною граматичною структурою, якщо її аксіоматика не містить в собі продукцій і аксіом типу

$$(x \to \text{o};\ x \in \mathbb{F}(V)).$$

Теорема 2. У всякому класі еквівалентності з нескороченою однозначною структурою існує однозначна о – вільна BC – структура.

Але для формальних граматичних структур можливо встановити нові результати, наприклад, структура (1) є частково універсальною відносно вільної мови $\mathbb{F}(V)$ у тому розумінні, що структура визначена на словникові $V \subset \mathbb{F}(V)$ і породжує множину ланцюжків $L(V)$, по операції заміщення за аксіоматикою Λ, таку, що має місце ланцюг за включенням

$$L(A) \subset L(V) \subset \mathbb{F}(V).$$

Визначення 5. Звичайну формальну структуру $C_1 = \left\langle V_1, \{\to^2\}, \Lambda_1 \right\rangle$ назвемо підструктурою структури $C = \left\langle V, \{\to^2\}, \Lambda \right\rangle$, якщо $V_1 \subseteq V$ і $\Lambda_1 \subseteq \Lambda$. Підструктура C_1 є порожньою підструктурою, якщо вона породжує тільки порожню мову $L = \varnothing$, тобто 1) $V_1 = \{\text{o}\} = \varnothing$ або 2) $\Lambda_1 = \{x_i \to \text{o};\ i \in J\}$, або 3) ($V_1 = \{\text{o}\}$ і $\Lambda_1 = \{x_i \to \text{o};\ i \in J\}$), або 4) аксіоматика Λ_1 не має спільних символів зі словником V_1 для виводу хоча б одного ланцюжка $y \in \mathbb{F}(V_1)$.

Зауваження 1. Очевидно, наведене визначення порожньої підструктури за умовами 1)–4) еквівалентні згідно з визначенням 2.

Зрозуміло, що довільна не порожня підструктура граматичної структури C частково зберігає за собою той же тип, який має структура C, тобто як сама структура, так і її підструктури належать до одного з класів, наприклад, BC, VC – структур, крім того ця підструктура може частково породжувати або зовсім не породжувати ні одного ланцюжка мови $L(A)$.

Визначення 6. Підструктуру C^* формальної граматичної структури (1) назвемо породжувальною підструктурою, якщо існує вивід $W(l)$ ланцюжка l у структурі $C^* \subseteq C$, такий, що $l \in L(A)$. Породжувальну підструктуру $C^* \subseteq C$, в якій виводиться тільки один ланцюжок $l \in L(A)$ формальної мови граматичної структури C назвемо структурою ланцюжка l формальної мови $L(A)$.

Отже, довільна підструктура граматичної структури C тоді і тільки тоді породжувальна, коли її аксіоматика Λ^* містить у собі хоча б по одній аксіомі виводу та початку аксіоматики структури C. Оскільки під виводом $W(l)$ ланцюжка $l \in L(A)$ розуміється упорядкована послідовність безпосередньо виведених у структурі C_l^* проміжних ланцюжків [1; 2], то взагалі між структурою ланцюжка і його виводом існує тільки гомоморфне відношення, тому вивід $W(l)$ задає тільки будову ланцюжка l.

Нескладно бачити, що будь яка підструктура C_i структури C є частково універсальною відносно вільної мови $\mathbb{F}(V_1) \subseteq \mathbb{F}(V)$, тобто і відносно мови $\mathbb{F}(V)$.

Нехай C_1 і C_2 довільні підструктур структури C, під їх об'єднанням і перетином будемо розуміти $C_1 \bigcup C_2 = \left\langle V_1 \bigcup V_2, \Sigma, \Lambda_1 \bigcup \Lambda_2 \right\rangle$ і $C_1 \bigcap C_2 = \left\langle V_1 \bigcap V_2, \Sigma, \Lambda_1 \bigcap \Lambda_2 \right\rangle$, причому перетин вважається порожнім, якщо $V_1 \bigcap V_2 = \varnothing$ або $\Lambda_1 \bigcap \Lambda_2 = \varnothing$, або ($V_1 \bigcap V_2 = \varnothing$ і $\Lambda_1 \bigcap \Lambda_2 = \varnothing$), тоді, очевидно, справедлива така теорема.

Теорема 3. Не порожній перетин (об'єднання) сукупності підструктур $\{C_i;\, i \in I\}$ o – вільної граматичної структури C також утворює підструктуру даної структури, крім того сукупність усіх підструктур структури C є структурою – решіткою.

Між двома підструктурами C_1 і C_2 можливо ввести відношення включення: по словникові $(C_1(V_1) \subset C_2(V_2);\, V_1 \subseteq V_2)$, по аксіоматиці $(C_1(\Lambda_1) \subset C_2(\Lambda_2);\, \Lambda_1 \subseteq \Lambda_2)$. Під включенням підструктур $C_1 \subset C_2$ в подальшому розуміється включення по словникові і по аксіоматиці цих підструктур. Отже, між двома підструктурами C_1 і C_2 існує відношення включення $\subset$ тоді і тільки тоді, коли мають місце включення $(V_1 \subset V_2,\, \Lambda_1 \subseteq \Lambda_2)$ або $(V_1 \subseteq V_2,\, \Lambda_1 \subset \Lambda_2)$, або таке – $(V_1 \subset V_2,\, \Lambda_1 \subset \Lambda_2)$.

Визначення 7. Сукупність (не усіх порожніх) підструктур C_i, для яких виконується умова $\left\{C_i;\, i \in I, \bigcup_i C_i = C\right\}$ називається системою утворюючих підструктур структури C. Якщо система утворюючих підструктур структури C складається з двох підструктур C_1 і C_2, таких що $C_1 \bigcup C_2 = C$ і $C_1 \bigcap C_2 = \varnothing$, то підструктура C_2 є доповненням підструктури C_1 до формальної структури C.

Система утворюючих підструктур $\{C_i\}$ формальної структури C називається повною системою у тому розумінні, що вона повністю відтворює формальну структуру C і в ній нема зайвих підструктур, які не впливають на відтворення структури C. Виходячи з того, що словник V і аксіоматика Λ формальної граматичної структури C є скінченними, приходимо до висновку, що система утворюючих підструктур $\{C_i\}$ також є скінченною множиною.

Лема 1. Нехай підструктура C_2 є доповненням підструктури C_1 до формальної структури C, тоді множину усіх підструктур $\{C_i\}$ структури C можливо розбити на три класи підструктур: $K_1 = \left\{C_j \mid C_j \subseteq C_1\right\}$, $K_2 = \left\{C_j \mid C_j \subseteq C_2\right\}$; $K_3 = \left\{C_j \mid C_j \bigcap C_1 \in K_1,\; C_j \bigcap C_2 \in K_2\right\}$.

Наслідок 1. Очевидно, що лема 1 має місце і в тому випадку, коли доповнення

$$C_2 = \bigcup_k C_k\,,$$

де $C_k \not\subset C_1$ підструктури формальної структури C.

Результат леми розбиття на класи є корисним для визначення будови множини підструктур формальної структури, зокрема, будови її системи утворюючих підструктур.

Теорема 4. У будь якій системі утворюючих підструктур

$$S = \left\{C_i;\, i \in I, \bigcup_i C_i = C\right\}$$

формальної граматичної структури C можливо виділити систему $S^* \subseteq S$ утворюючих породжувальних підструктур або побудувати на системі S систему підструктур S^* таку, що

$$S^* = \left\{C_j^*;\; j \in J \subset I, \bigcup_j C_j^* = C\right\}.$$

Для доведення теореми розіб'ємо скінченну систему S на дві підмножини S_1 – складається з породжувальних підструктур і S_2 – не породжувальні підструктури так, що $S_1 \bigcup S_2 = S$ і $S_1 \bigcap S_2 = \varnothing$. Якщо система S_1 є утворюючою, тобто $S^* = S_1$, тоді теорема доведена. У протилежному випадку за теоремою 3 на підструктурах систем S_1 і S_2 можливо утворити нові породжувальні підструктури, додаючи які до системи S_1 знову отримаємо систему утворюючих підструктур граматичної структури C. Зрозуміло, що це доведення справедливе і у випадку, коли окремо кожна з систем S_1 і S_2 є порожньою.

Серед сукупності підструктур $\{C_i\}$ граматичної структури C існують такі підструктури C_j, аксіоматика яких Λ_j повністю відтворює їх структуру, тобто $C_j = \left\langle V_j, \Sigma, \Lambda_j \right\rangle$. Назвемо такі підструктури повними підструктурами $\overline{C}_j$, а відповідні їм аксіоматики відтворюючими аксіоматиками $\overline{\Lambda}_j$.

Теорема 5. На всякій системі утворюючих підструктур S структури C можливо побудувати систему утворюючих повних підструктур

$$\overline{S} = \left\{\overline{C}_j;\; j \in J, \bigcup_j \overline{C}_j = C\right\}.$$

Для доведення теореми розглянемо довільну підструктуру $C_i \in S$. Якщо ця структура не є o – вільною, тобто на її словникові V_i за аксіоматикою Λ_i можливо вивести тільки порожній ланцюжок, тоді за визначенням 5 за умов 1), 3) і 4) підструктура C_i – порожня. За зауваженням 1 замінимо структуру C_i еквівалентною структурою з умовою 2) так, що аксіоматика $\overline{\Lambda}_j$ буде складатися тільки з процедур виду 2), після заміни правих частин процедур порожнім символом o, а словник $\overline{V}_j$ створимо з різних символів аксіоматики $\overline{\Lambda}_j$. Таким чином, у цьому випадку маємо $\overline{C}_j \in S$.

Нехай тепер структура C_i не порожня, тоді приймемо аксіоматику Λ_i за аксіоматику $\overline{\Lambda}_j$, при цьому можливі випадки:

– аксіоматика Λ_i повністю відтворює структуру C_i, тобто $V_i = \overline{V}_j$;

– аксіоматика Λ_i не повністю відтворює структуру C_i, але $\overline{V}_j \subset V_i$.

З чого по сукупності випадків 1) і 2) слідує включення, $\overline{C}_j \subset C_i$.

Якщо ж для аксіоматики $\Lambda_i = \overline{\Lambda}_i$ маємо $V_i \subset \overline{V}_i$, то розбиваючи аксіоматику $\Lambda_i = \overline{\Lambda}_j \bigcup \Lambda_{i-j}$ так, щоб $\overline{V}_j \subseteq V_i$ отримаємо і в цьому випадку включення $\overline{C}_j \subset C_i$. На цьому завершується доведення теореми.

Зауваження 2. За результатом теореми 4 маємо для систем утворюючих підструктур таке включення $\overline{S}^* \subseteq \overline{S}$ і за теоремою 5 – ланцюг по включенню $\overline{S}^* \subseteq \overline{S} \subseteq S$.

У множині усіх породжувальних підструктур формальної структури містяться також ізольовані підструктури, які визначаються так

Визначення 8. Підструктура C_1 називається ізольованою відносно підструктури C_2 у формальній структурі C, якщо $C_1 \subset C_2$ і серед виведених ланцюжків $\{l_i \mid l_i \in \mathbb{F}(V_2)\}$ у структурі C_2 знайдеться хоча б один ланцюжок l_j такий, що $l_j \notin \{l_k \mid l_k \in \mathbb{F}(V_1)\}$. Якщо підструктура C_1 ізольована відносно структури C, тоді підструктура C_1 зветься ізольованою у формальній структурі C і позначимо це так $C_1 \multimap C$.

Наведемо деякі властивості відношення $(\multimap)$. Будемо вважати, що порожня структура $\varnothing$ є ізольованою до будь якої структури. Якщо прийняти для будь якої підструктури $C_1 \subseteq C$, що $C_1 \multimap C_1$, тоді відношення $(\multimap)$ є відношенням часткового порядку на множині усіх підструктур формальної структури C, оскільки виконуються такі умови: антисиметрії $(C_1 \multimap C_2,\, C_2 \multimap C_1;\, C_1 = C_2)$ та транзитивності $(C_1 \multimap C_2,\, C_2 \multimap C_3;\, C_1 \multimap C_3)$. З теореми 3 та визначення 8, для сімейства підструктур $\{C_i\}$ структури C таких, що $C_i \multimap C_1$, маємо

Наслідок 2. $\bigcap_i C_i \multimap C_1$ у формальній структурі C.

Звичайно ізольовані підструктури відносно формальної структури C можуть бути породжувальними і повними підструктурами.

З'ясуємо тепер питання критеріїв, за якими можливо встановити існування систем утворюючих підструктур формальної граматичної структури і визначимо ефективні критерії, за якими можливо відтворити граматичну структуру за структурами утворюючих ланцюжків заданої формальної мови.

Розв'язок проблеми повноти для систем утворюючих підструктур. Для розв'язку проблема існування критеріїв про знаходження систем утворюючих підструктур скористуємося алгебраїчним підходом, який спирається на застосування максимальних підалгебр універсальних алгебр [3].

Нехай C довільна граматична структура (1), тоді підструктура C_m структури C називається максимальною підструктурою $C_m \subset C$, якщо не існує такої підструктури $C_1 \subset C$, за для якої мало б місце власне включення $C_m \subset C_1$. Позначимо через p_i довільну продукцію аксіоматики Λ структури C. Тепер, як нескладно бачити, підструктура C_m буде максимальною відносно структури C тоді і тільки тоді, коли для будь якого елементу $v \in C \setminus C_m$ такого, що $v \in V \bigcup \{p_i,\, i \in I\}$ має місце $C_m \bigcup \{v\} = C$. Тут під різницею $C \setminus C_m$ розуміється підструктура: $\langle V \setminus V_m, \Sigma, \Lambda \rangle$ або $\langle V, \Sigma, \Lambda \setminus \Lambda_m \rangle$, або $\langle V \setminus V_m, \Sigma, \Lambda \setminus \Lambda_m \rangle$; формальної граматичної структури C.

Зрозуміло, що граматична структура C має скінченну кількість максимальних підструктур, позначимо через M множину усіх підструктур максимальних відносно структури C. Для подальшого необхідна наступна лема розширення будь якої підструктури граматичної структури $C = \langle V, \Sigma, \Lambda \rangle$.

Лема 2. Будь яку підструктуру $C_1 \subset C$ можливо розширити до максимальної підструктури $C_m \in M$ структури C.

За ствердженням леми маємо, що для довільної підструктури C_1 структури C у множині M існує така підструктура C_m, що можливе тільки таке включення $C_1 \subseteq C_m$, бо у протилежному випадку виконується включення $C_1 \supset C_m$ і підструктура C_1 не є власною підструктурою структури C. Припустимо, що для підструктури C_1 у множині M не існує підструктури $C_m \supset C_1$. Тоді приєднуючи до підструктури C_1 усі елементи $v \in V \bigcup \{p_i,\, i \in I\}$, яких нема у цій підструктурі крім одного $v^* \notin C_1$, за скінченну кількість кроків отримаємо максимальну підструктуру $C_{1,m}$ відносно структури C, що призводе до протиріччя з припущенням. Таким чином, будь яку власну підструктуру граматичної структури завжди конструктивно можливо розширити до максимальної підструктури.

Перейдемо тепер до розгляду критерію, за яким визначається, що система підструктур граматичної структури є утворюючою системою. За певною аналогією структур з алгебрами назвемо його критерієм Поста, як це зроблено в алгебрах [3].

Теорема 6. Для того, щоб система підструктур $S = \{C_i;\, i \in I\}$ граматичної структури C була утворюючою необхідно і достатньо, щоб для будь якої підструктури $C_m \in M$ у системі S знайшовся хоча б один елемент $v \in \left\{V_i \bigcup \{p_{i,j};\ j \in J\};\, i \in I\right\}$ такий, що $v \notin C_m$.

За необхідністю система S – утворююча відносно структури C, тобто $\bigcup\limits_{i \in I} C_i = C$ і оскільки для максимальної підструктури $C_m \in M$, за її визначенням існує такий елемент $v \notin C_m$, що $v \in C \setminus C_m$, то в системі S існує хоча б одна підструктура C_j, для якої $v \in C_j$.

При доведенні достатності розглянемо таку систему S, що для будь якої максимальної підструктури $C_m \in M$ структури C в ній існує хоча б один елемент $v \in C_i \in S$ такий, що $v \notin C_m$. Доведемо, що система S є утворюючою, тобто $\bigcup\limits_{i \in I} C_i = C$.

Припустимо, що система S не є системою утворюючих підструктур – $\bigcup\limits_{i \in I} C_i \neq C$, тоді користуючись результатами леми 2, будь яку підструктуру $C_i \in S$ розширимо до максимальної підструктури $C_{i,m} \in M$ структури C з чого маємо включення $C_i \subset C_{i,m}$. Але за умовою у підструктурі C_i існує такий елемент v_i, для якого $v_i \notin C_{i,m}$, що призводе до порушення включення $C_i \subset C_{i,m}$. Таким чином, наше припущення про те, що сукупність підструктур S не є системою утворюючих підструктур породжувальної граматичної структури C не вірне і теорема доведена.

Зауваження 3. Нескладно бачити, що теорема 6 виконується також для систем породжувальних підструктур S^* і повних підструктур $\overline{S}$ граматичної структури C.

Визначення 9. Виведена множина ланцюжків у структурах $\overline{C}_i^*$ системи утворюючих підструктур $\overline{S}^*$ структури C називається зразком s_l формальної мови $L(A)$.

Отже, за результатами леми 1 та теореми 6 можливо запропонувати схему побудови системи утворюючих підструктур формальної структури і дослідити будову цієї утворюючої системи підструктур:

– побудувати множину максимальних підструктур M;

– за елементами, які не входять до максимальних підструктур, побудувати систему утворюючих підструктур, що містять у собі ці відсутні елементи;

– на системі утворюючих підструктур формальної системи побудувати структурний граф залежності підструктур;

– виділити у системі утворюючих підструктур ізольовану підструктуру і доповнену до неї підструктуру, відносно яких за лемою 1 побудувати три класи $K_i;\, i = 1,2,3$;

– з класів K_1 і K_2 виділити незалежні підструктури, тобто такі $C_i^1, C_i^2 \in K_i$, для яких $C_i^1 \bigcap C_i^2 \notin K_i$ і $C_i^1 \not\subset C_i^2$ або $C_i^2 \not\subset C_i^1$;

– на об’єднанні незалежних структур класів K_1 і K_2 побудувати повну систему утворюючих підструктур формальної структури.

Застосуємо наведену схему до формальної структури з аксіоматикою

$$\Lambda = \begin{cases} p_1 : \sigma \to a\alpha, \text{аксіома початку;} \\ p_2 : \alpha \to a\alpha; \\ p_3 : \alpha \to b\beta; \\ p_4 : \beta \to b\beta; \\ p_5 : \beta \to c\gamma; \\ p_6 : \gamma \to c\gamma; \\ \text{аксіоми виводу:} \\ p_7 : \gamma \to c; \\ p_8 : \beta \to c. \end{cases}$$

та мовою $L = \{a^k b^n c^m; k, n, m \in \mathbb{N}\}$. (2)

Побудуємо породжувальну систему $\overline{S}^*$ граматичної структури з аксіоматикою (2). Оскільки система $\overline{S}^*$ повна, тому для неї і максимальної множини M достатньо скористатися відповідними аксіоматиками, так множина аксіоматик для повної сукупності M є $\{\Lambda \setminus p_8, \Lambda \setminus p_7, \Lambda \setminus p_6, \Lambda \setminus p_5, \Lambda \setminus p_4, \Lambda \setminus p_2\}$. З чого видно, що система утворюючих підструктур повинна включати продукції: p_2, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8. Такою системою буде утворююча система з аксіоматиками:

$$\{\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4, \Lambda_5\}, \qquad (3)$$

де

$$\Lambda_1 = \{p_1, p_3, p_8\}, \quad \Lambda_2 = \{p_1, p_2, p_3, p_8\},$$

$$\Lambda_3 = \{p_1, p_3, p_4, p_8\}, \quad \Lambda_4 = \{p_1, p_3, p_5, p_7\},$$

$$\Lambda_5 = \{p_1, p_3, p_5, p_6, p_7\}.$$

Структурний граф системи утворюючих підструктур формальної структури C за включеннями виглядає так, як наведено на рисунку.

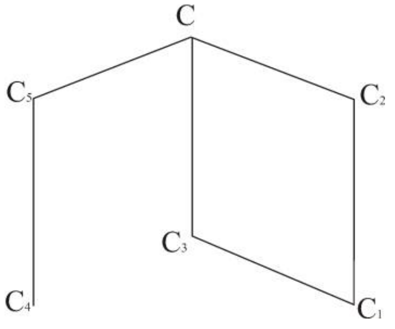

Рис.

Ізольованою підструктурою відносно структури C серед системи підструктур (3) є структура $\overline{C}_5^*$, для якої доповненою до формальної структури C буде структура $\overline{C}_2^* \cup \overline{C}_3^*$, тому система утворюючих підструктур розбивається на класи $K_1 = \{\overline{C}_4^*, \overline{C}_5^*\}$ і $K_2 = \{\overline{C}_1^*, \overline{C}_2^*, \overline{C}_3^*\}$. Очевидно, на незалежних підструктурах цих класів можливо отримати повну систему утворюючих породжувальних підструктур $\{\overline{C}_2^*, \overline{C}_3^*, \overline{C}_5^*\}$. Побудована таким чином повна система утворюючих підструктур не є єдиною. Тому, що за основні утворюючі підструктури можливо взяти кінцеві породжувальні структури графу C_1 і C_4 з відповідними аксіоматиками та додати до них підструктури з аксіоматиками $\Lambda_5 \setminus \Lambda_4$, $\Lambda_3 \setminus \Lambda_1$ і $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$. Отже, отримаємо нову систему утворюючих підструктур структури C з такою системою аксіоматик $\{\Lambda_1, \Lambda_4, \Lambda_2 \setminus \Lambda_1, \Lambda_3 \setminus \Lambda_1, \Lambda_5 \setminus \Lambda_4\}$. Таким чином, на структурах двох простих ланцюжків l_1 і l_4 та рекурсивних продукціях p_2, p_4 і p_6 аксіоматики (2) відтворюється формальна граматична структура C. Систему утворюючих підструктур структури C побудовану на кінцевих породжувальних підструктурах структурного графу назвемо мінімальною системою утворюючих підструктур S_0 структури C, а відповідну формальну структуру C назвемо мінімальною структурою C_0.

Зауваження 4. Запропоновану методику побудови повної системи утворюючих підструктур також зручно застосовувати у тому випадку, коли відомі дерева виводів утворюючих ланцюжків, при цьому слід звернути увагу на те, що однозначне відтворення формальних систем можливе тільки для VC – структур.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Гинзбург С. Математическая теория контекстно свободных языков. – М.: Мир, 1970. – 328 с.
2. Гладкий А. В. Формальные грамматики и языки. – М.: Наука, 1973. – 368 с.
3. Глушков В. М. Алгебра, языки, программирование. 2-е изд., перераб. / В. М. Глушков, Г. Е. Цейтлин, Е. Л. Ющенко – К.: Наук. думка, 1978. – 320 с.
4. Ильман В. М. Структурный подход в формальных системах / В. М. Ильман, С. Ю. Разумов // Проблеми математичного моделювання. Міжнар. науково-метод. конфер. Тези доповідей. Дніпродзержинськ. 2005. – С. 147–148.
5. Ільман А. В. Формально – структурний підхід до моделювання економічних систем / А. В. Ільман, В. М. Ільман // Проблеми економіки транспорту: VI Міжнар. наук. конфер. Тези доповідей. – Д., 2005. – С. 58–58.

Надійшла до редколегії 06.07.06