

А. А. БОСОВ, Н. А. МУХИНА (ДИИТ), А. И. КУЗЬМЕНКО (Академия таможенной службы Украины)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОБРАБОТКИ ГРУЗОВЫХ ВАГОНОВ ПРИ ПЕРЕХОДЕ С КОЛЕИ 1 435 ТА 1 520 мм

Запропоновано удосконалений метод розрахунку основних показників одноканальної СМО з ерланговським входним потоком та експоненційним часом обслуговування її раціонального завантаження.

Предложен усовершенствованный метод расчета основных показателей одноканальной СМО с эрланговским входящим потоком и экспоненциальным временем обслуживания и её рациональной загрузки.

The advanced method is offered of calculation of main factors of a singular channel quene system with Erlang incomer flow and exponential service time and its rational load.

Исследованию потока поездов посвящено достаточно много публикаций, укажем на работы [1; 2], в которых особое внимание уделяется моделированию потока поездов как случайного потока с распределением интервалов времени между поездами по закону Эрланга с дифференциальной функцией распределения

$$f(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t},$$

где λ и k – параметры распределения.

Отметим, что при $k=1$ распределение Эрланга переходит в экспоненциальное, а при $k \geq 9$ приближается к нормальному. Если $k \rightarrow \infty$, то получим регулярный поток [1].

Имея в виду применение результатов моделирования на транспорте, рассмотрим отдельные технические устройства пограничной передаточной станции (сортировочную горку или вытяжной путь, пункт перегруза, пункт перестановки тележек, напольное устройство SUW-2000) как одноканальную систему массового обслуживания (СМО) с эрланговским входящим потоком и временем обслуживания, распределенным по экспоненциальному закону с параметром μ , установившийся режим которой подробно рассматривается в [3].

В данной статье предлагается новый способ расчета установившегося режима такой системы и решение задачи определения рациональных параметров с позиции минимизации потерь от простоя СМО и пребывания поездов в очереди на обслуживание.

Прежде чем рассмотреть поток Эрланга с произвольным k , положим $k=3$.

В этом случае граф возможных состояний можно представить в виде рис. 1.

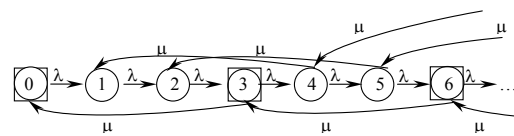


Рис. 1. Граф состояний и переходов в СМО при $k=3$

На рис. 1 кружками обозначены состояния простейшего потока, а квадратики отражают состояния СМО для потока Эрланга при $k=3$.

Дифференциальные уравнения для вероятностей состояний системы представлены в виде:

$$\frac{dP_0}{dt} = -\lambda P_0 + \mu P_k;$$

$$\frac{dP_m}{dt} = -\lambda P_m + \lambda P_{m-1} + \mu P_{m+k}, m < k;$$

$$\frac{dP_m}{dt} = -(\lambda + \mu)P_m + \lambda P_{m-1} + \mu P_{m+k}, m \geq k,$$

Установившийся режим определится следующей системой алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 0 = -\lambda P_0 + \mu P_3; \\ 0 = -\lambda P_1 + \lambda P_0 + \mu P_4; \\ 0 = -\lambda_2 P_2 + \lambda P_1 + \mu P_5; \\ 0 = -\lambda_2 P_2 + \lambda P_1 + \mu P_5; \\ *0 = -(\lambda + \mu) P_3 + \lambda P_2 + \mu P_6; \\ *0 = -(\lambda + \mu) P_4 + \lambda P_3 + \mu P_7; \\ *0 = -(\lambda + \mu) P_5 + \lambda P_4 + \mu P_8; \\ *0 = -(\lambda + \mu) P_6 + \lambda P_5 + \mu P_9; \\ \dots \end{cases} \quad (1)$$

к которой необходимо добавить начальное условие

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i = 1. \quad (2)$$

Решение системы, составленной из уравнений, помеченных (*), будем искать в виде $P_v = y^v$, где произвольное уравнение может быть представлено следующим образом:

$$-(\lambda + \mu)P_n + \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+k} = 0. \quad (3)$$

После подстановки $P_v = y^v$ в (3) получим

$$-(\lambda + \mu)y^n + \lambda y^{n-1} + \mu y^{n+k} = 0.$$

Поделив уравнение на y^{n-1} и положив при этом $r = \lambda/\mu$, получим

$$-(r+1)y + r + y^{k+1} = 0,$$

Учитывая, что $k = 3$, приходим к уравнению

$$y^4 - (r+1)y + r = 0. \quad (4)$$

Легко убедиться, что $y = 1$ является решением уравнения (4), следовательно, его можно представить в виде

$$(y-1)(y + y^2 + y^3 - r) = 0,$$

а так как значение $y = 1$ нельзя взять для определения P_v в силу условия (2), то с необходимостью приходим к решению уравнения

$$y + y^2 + y^3 = r.$$

Для произвольного k имеем

$$\sum_{v=1}^{k-1} y^v = r.$$

Данное уравнение при $r < k$ имеет единственный положительный корень, меньший 1.

В общем случае при $v \geq k$ вероятности P_v могут рассчитываться по формуле (5)

$$P_v = cy^v. \quad (5)$$

Постоянный множитель c в этом случае определяется из первого уравнения системы (1)

$$-rP_0 + cy^3 = 0$$

или в общем случае

$$-rP_0 + c \cdot y^k = 0,$$

откуда

$$c = \frac{r}{y^k} \cdot P_0,$$

что позволяет представить произвольное P_n через P_0 в виде

$$P_n = rP_0 y^{n-k}, \quad n \geq k.$$

Значение P_0 определим из условия (2) с учетом того, что

$$P_v = \frac{P_0(1-y^{v+1})}{1-y} \quad \text{при } v = 1, 2, \dots, k-1,$$

где P_v – решения системы уравнений (2), не помеченных звездочкой.

Условие (2) через P_n представим в виде

$$P_0 + \sum_{v=1}^{k-1} P_v + \sum_{n=k}^{\infty} P_n = 1$$

или

$$P_0 + \frac{P_0}{1-y} \sum_{v=1}^{k-1} (1-y^{v+1}) + rP_0 \sum_{n=k}^{\infty} y^{n-k} = 1,$$

откуда

$$P_0 = \frac{1-y}{k-y - \frac{y^2 - y^{k+1}}{1-y} + r}. \quad (6)$$

В выражении (6) y является решением уравнения

$$y + y^2 + \dots + y^{k-1} = r.$$

Для решения данного уравнения воспользуемся пакетом символьных вычислений [4].

Рассмотрим пример, когда $k = 3, r = 3, 5$, а $y = 0,883379$.

Положим

$$\mathfrak{G}_0 = P_0 + P_1 + \dots + P_{k-1};$$

$$\mathfrak{G}_1 = P_k + P_{k+1} + \dots + P_{2k-1}$$

.....

$$\mathfrak{G}_m = P_{m \cdot k} + P_{m \cdot k + 1} + \dots + P_{(m+1)k-1}$$

.....

тогда среднее число поездов в СМО будет равно

$$\bar{m} = \sum_{m=0}^{\infty} m \mathfrak{G}_m = \sum_{m=0}^{\infty} m \cdot \sum_{v=0}^{k-1} P_{m \cdot k + v}.$$

После элементарных преобразований получим

$$\bar{m} = \frac{rP_0}{(1-y^k)(1-y)}.$$

Затраты от простоя СМО и пребывания поездов в очереди будем учитывать по формуле

$$Z = P_0 + c\bar{m},$$

где c – отношение стоимости поезда-часа к стоимости СМО-часа.

Зависимость функции затрат z от параметра r при заданных k и c представлена на рис.2.

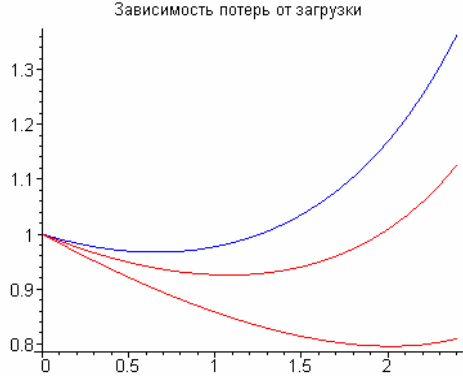


Рис.2. Зависимость $z(r)$ при трех значениях c и $k = 3$

Как следует из рисунка, при фиксированных c и k функция $z(r)$ имеет минимум.

На рис. 3 представлена зависимость параметра r как функции c , при котором z принимает минимальное значение.

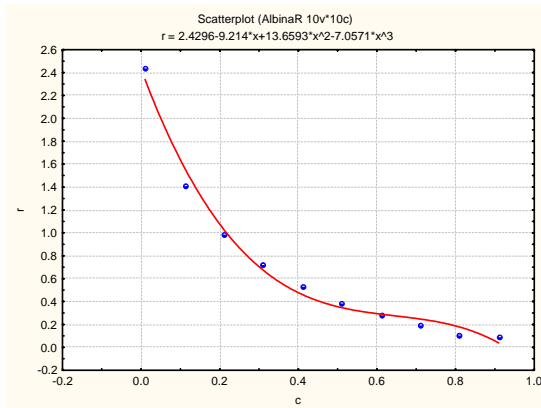


Рис. 3. Зависимость минимальных затрат $r(c)$, при которой реализуется $\min_r Z$

На рис. 4 представлена зависимость минимальных затрат как функция от параметра c .

С достаточной степенью точности данная зависимость может быть описана полиномом третьей степени

$$\min_r Z(r, c) = 0,0626 + 1,1217 \cdot c - 1,6892 \cdot c^2 + 0,8683 \cdot c^3,$$

а значение параметра $r(c)$, при котором z достигает своего наименьшего значения равно

$$r(c) = 2,4296 - 9,214 c + 13,6593c^2 - 7,0571c^3.$$

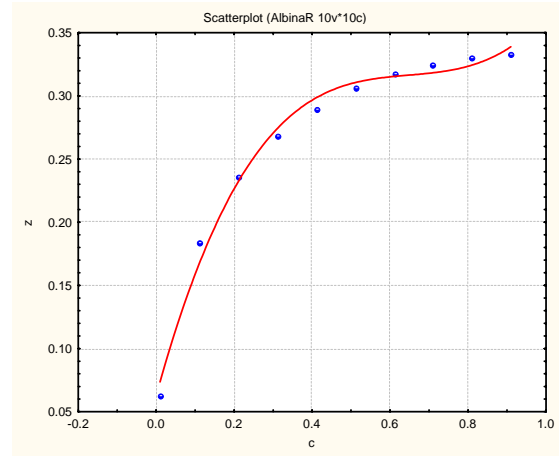


Рис. 4. Зависимость минимальных потерь Z от параметра c

Для построения аналогичных зависимостей, (см. рис. 3, 4), при произвольном k предлагается программа на языке Maple.

Программа (в среде Maple8)

```
> restart:with(plots):
```

Warning, the name changecoords has been redefined

```
> k:=3:
```

```
> f:=x->sum(x^i,i=1..k);
```

$$f: = x \rightarrow \sum_{i=1}^k x^i$$

```
> MZS:=proc(A,B,E,F) local
```

```
a,b,e,x1,x2,f1,f2,f;global
y;a:=A:e:=E:f:=F:b:=B:x1:=evalf(a+(3-
sqrt(5))*(b-a)/2, 9):x2:=evalf(a+(-
1+sqrt(5))*(b-a)/2,
9):f1:=evalf(f(x1),
9):f2:=evalf(f(x2), 9):while (b-a)>e
do if(f1<f2) then
b:=x2:x2:=x1:f2:=f1:x1:=evalf(a+(3-
sqrt(5))*(b-a)/2, 9):f1:=f(x1):b-
a:=f1:if(f1>f2) then
a:=x1:x1:=x2:f1:=f2:x2:=evalf(a+(-
1+sqrt(5))*(b-a)/2, 9):f2:=f(x2):b-
a:=f1:if(f1=f2) then a:=x1:b:=x2:b-
a:=f1:od:y:=(a+b)/2:end:
```

```
>
```

```
R:=array(1..500):ZZ:=array(1..500):C:=
array(1..500):
```

```
> m:=1:for c from 0.01 by 0.01 to 1
do z0:=1000:for r from 0.01 by 0.01
to k do A:=0.01:B:=k-
.01:E:=0.0001:F:=x->abs(f(x)-
r):MZS(A,B,E,F):po:=(1-y)^2/((1-
y)^2+(k-1)*(1-y)-y^2+y^(k+1)+r*(1-
y)):Mcp:=r*po/((1-y^k)*(1-
y)):Z:=po+c*Mcp:if z0>Z then
r0:=r:z0:=Z:Tcp0:=Tcp end if:end
do:R[m]:=r0:ZZ[m]:=5*z0:C[m]:=c:m:=m+
1:end
do:pR:=plot([C[m1],R[m1],m1=1..m-
1],color=blue):pZZ:=plot([C[m1],ZZ[m1]
],m1=1..m-1]):display({pR,pZZ});
```

Эта программа при заданном k позволяет строить кривые $r(s)$ и $\min_r Z = f(c)$ (рис. 5).

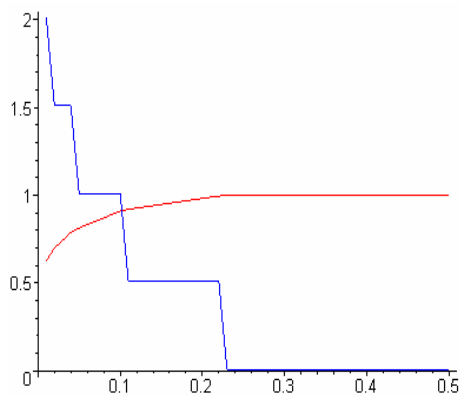


Рис. 5. Спадающая кривая – $r(c)$;
возрастающая кривая – $\min_r Z$

Заметим, что появление ступенек в кривой $r(c)$ обусловлено конечностью шага при определении минимума $Z(r, c)$ по r . Таким образом, если заданы параметры потока (λ, k) и отношение стоимостей простоя поездов к стоимости простоя СМО, то данная процедура позволяет определить рациональное значение параметра $r(c, k)$, а тем самым и свойство СМО по обработке, т. е. среднее время обработки поезда в виде

$$\frac{1}{\mu} = \frac{r(c, k)}{\lambda}.$$

Чтобы избежать ступенек (см. рис. 5), необходимо уменьшить шаг по Δr . Взяв $\Delta r = 0,01$, получим более гладкую кривую (рис. 6)

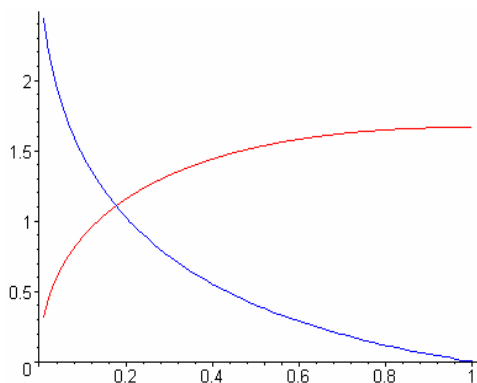


Рис. 6. Графики получены при $\Delta r = 0,01$

В этом случае машинное время, затраченное на решение задачи, составило 1531,1 с.

Для сокращения времени счета при построении графиков, в процессе решения уравнения

$$\sum_{i=1}^{k-1} x^i = r,$$

пришлось отказаться от использования стандартной операции *solve* и создать процедуру поиска минимума по методу золотого сечения [5] для унимодальной функции

$$F(x) = \left| \sum_{i=1}^{k-1} x^i - r \right|.$$

При точности поиска минимума $E = 0,0001$ время на построение кривых (см. рис. 6) составило 458,0 с, т. е. примерно в 3,3 раза затраты времени стали меньше.

Имя процедуры MZS(A,B,E,F), где A – левый конец, а B – правый конец интервала, на котором расположено значение x_* , минимизирующее $F(x)$, формальный параметр E представляет собой точность определения x_* .

Если воспользоваться приближенной формулой

$$r(c) = 2,4296 - 9,214 c + 13,6593c^2 - 7,0571c^3,$$

при этом положить $\Delta r = 0,01 \cdot k$, $A = 0,001$; $B = r(c) + \Delta r$, а далее применить процедуру MZS, то время счета составит 125 с.

Как известно, процесс передачи грузов на пограничных передаточных станциях с колеи 1435 на 1520 мм и наоборот, может осуществляться путем перегруза, перестановки тележек вагонов или с использованием раздвижных колесных пар. Рассмотрим путевое устройство SUW-2000 по изменению расстояния между колесами [6]. Обслуживание состоит в прохождении поезда по данному устройству со скоростью ϑ . Если средняя длина поезда равна L , тогда среднее время обслуживания будет равно

$$\frac{1}{\mu} = \frac{L + e}{\vartheta},$$

где e – длина устройства SUW-2000 с учетом участков пути подхода и ухода поезда. С другой стороны, это время должно удовлетворять соотношению

$$\frac{L + e}{\vartheta} = \frac{r(c, k)}{\lambda},$$

откуда можно определить рациональную скорость движения поезда по устройству SUW-2000 в виде

$$g = \frac{(L + e)\lambda}{r(c, \kappa)}.$$

При отношении стоимости простоя устройства к стоимости простоя поезда в очереди $c = 0,04$ и параметрах потока поездов $\lambda = 7,54$; $\kappa = 3$ из графика (см. рис. 6) получим $r(c, \kappa) = 1,51$. Положив $L = 1,2$ км, $e = 100 + 27,1 = 127,1$ м, определим

$$g = \frac{(1,2 + 0,1271) \cdot 7,54}{1,51} = 6,63 \text{ км/ч,}$$

при этом среднее время обслуживания поезда составит 12 мин.

Предложенный в статье подход позволит более оперативно и точно определять время пребывания поездов на технических устройствах передаточных станций и может быть использован для повышения эффективности пропуска грузовых поездов через границу.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шаболин Н. Н. Оптимизация процесса переработки вагонов на станциях. – М.: Транспорт. 1973. – 184 с.
2. Акулиничев В. М. Математические методы в эксплуатации железных дорог / В. М. Акулиничев, В. А. Кудрявцев, А. Н. Корешков. – М.: Транспорт. 1981, – 223 с.
3. Саати Т. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. – М.: Советское радио. 1965. – 510 с.
4. Васильев А. Н. Самоучитель Maple 8, – М.–СПб–К, Диалектика, 2003. – 352 с.
5. Васильев Ф. П. Численное решение экстремальных задач. – М.: Наука, 1980. – 518 с.
6. Сувальский Р. М. SUW-2000 – новое решение для железнодорожных сообщений / Р. М. Сувальский, Ю. В. Демин. // Железнодорожный транспорт №6(33), 2003. – С. 24–27.

Поступила в редколлегию 06.07.2006.