УДК 629.4

Н. А. ЛОШКАРЕВ (ПГАСА)

ПОПЫТКА РЕКОНСТРУКЦИИ ВОЗМОЖНОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА П. ФЕРМА ЕГО «ВЕЛИКОЙ ТЕОРЕМЫ»

Наведена спроба реконструкції можливого доказу «Великої теореми Ферма».

Представлена попытка реконструкции возможного доказательства «Великой теоремы Ферма».

The proof of algebraic solution of the «Great theorem of Ferm» has been presented.

Известная своей «простотой» теорема о невозможности решения уравнения

$$x^n + y^n = z^n \tag{1}$$

в целых числах при степенях $n \geq 3$ уже несколько столетий занимает умы любителей и профессиональных математиков. Утверждение Ферма о том, что доказательство ему известно, многие относят либо к его заблуждениям, либо к шутке.

Сегодня известно несколько, признанных верными, доказательств теоремы, и якобы имеется свидетельство того, что видный математик Ван-дер-Варден доказал, что она не может быть доказана конечным числом алгебраических приемов. Поэтому предлагаемое здесь алгебраическое доказательство парой простых приемов представляет, на наш взгляд, определенный интерес.

Вводя, как обычно, новые целые числа $b > a > 0$, $Y = X + a$, $Z = X + b$ теорема принимает вид

$$X^n = \sum_{i-1}^{n-1} C_n^i \left(b^i - a^i\right) X^i + \left(b^n - a^n\right). \tag{2}$$

Суть всякого решения алгебраического уравнения сводится к отысканию заданного уравнением числа величин, именуемых корнями уравнения. Формально задача состоит в определении числа «корней» в свободном члене уравнения. В применении к (1) это будет

$$X^n = \sum_{i-1}^{n-1} C_n^i \left(b^i - a^i\right) X^i + kX, \tag{3}$$

где $kX = \left(b^n - a^n\right)$.

Специфика данной задачи состоит в доказательстве того, что нет целых k при $b > a > 0$, $n \geq 3$, т. е. при целочисленных величинах в (2).

В записанном в виде (3) уравнение (2) фактически имеет степень $n-1$ и может быть выписана в степенях меньших n, $(n-1)$-кратным повторениям однообразной процедуры.

Кажется, что замена уравнения степени n уравнением степени $(n-1)$ не очень продуктивна, но в данном диофантовом уравнении простого вида эта процедура с нормировкой приводит к компактному уравнению, равносильного исходному:

$$\left(1 + \frac{bk}{b^n - a^n}\right)^n - \left(1 + \frac{ak}{b^n - a^n}\right)^n = 1. \tag{4}$$

Что при степени $n > 2$ все числа не могут быть целыми b, a, k и n достаточно раскрыть его при $n = 3$. С ростом степени n надежды на целое X, «тают на глазах». По-видимому, Ферма зная (4) и будучи математиком, видел это отчетливо.

Но к «идейной» убежденности в математике должно прилагать «весомые» аргументы, вроде $a = a$ либо $a \neq a$. В данной ситуации они содержаться в (4), а из него следует, что

$$k^n = \left(b^n - a^n\right)^{n-1} - \\ -\sum_{1}^{n-1} C_n^i k^i \left(b^i - a^i\right)\left(b^n - a^n\right)^{n-1-i}, \tag{5}$$

которая, имеет целочисленные коэффициенты, допускает целое k при условии

$$m = \frac{\left(b^n - a^n\right)}{k},$$

так, что $\left(b^n - a^n\right) = k \cdot m$.

В результате последовательной замены свободных членов получаем уравнение

$$k = \frac{m^{n-1}}{\left(b^n - a^n\right)^{(n-1)(n-2)}} - \\ -\sum_{i}^{n-2} C_n^i m^{n-1-i} \left(b^i - a^i\right)\left(b^n - a^n\right)^{i(n-i)+2n-n^2} - n\left(b^{n-1} - a^{n-1}\right),$$

в котором

$$m = \frac{\left(b^n - a^n\right)^{n-1}}{k}.$$

Поэтому искомый множитель m равен

$$m = 1\Bigg/\left(\left(\frac{1}{k}\right)^{n-1} - \right.$$

$$-\sum_{i}^{n-2} C_n^i \left(\frac{1}{k}\right)^{n-1-i} \left(b^i - a^i\right)\left(b^n - a^n\right)^{2-n} -$$

$$\left. -n\left(b^{n-1} - a^{n-1}\right)\left(b^n - a^n\right)^{-(n-1)}\right). \quad (6)$$

Из (6) следует, что m число не целое при положительных целых k, a, b и $n \geq 3$. Следовательно, (1) не может иметь целых корней, на наш взгляд, всего-навсего формальное подтверждение факта очевидного из (4), по-видимому, известного Ферма.

Форма записи в (6) принята нами в качестве иллюстративной, хотя удобно умножить числитель и знаменатель в «мультикаскадном усилителе» m на k^{n-1}.

Оказывается, что (6) предназначена для степени больше 2, справедлива для $n = 2$, при этом сумматор $\sum_{1}^{0} {}_2^i\left[f\right]\left(k,n,a,b\right)$, следует полагать равным 0. Как известно, в прямоугольных треугольниках с целочисленными длинами сторон разность гипотенузы и большего из катетов равна 1, так что для треугольника 5, 12, 13 $a = 7$ и $b = 8$ принятых обозначениях $k = 3$, а $m = 15$. Подставляя в (6) a, b и $b^2 - a^2 = 15$, убеждаемся, что при $k = 3$, $m = 5$. В этом примере есть указания на возможность получения целочисленного m, если знаменатель (6) представлен целочисленным числителем и правильной дробью. Умножая числитель и знаменатель (6) на k^{n-1}, получаем равносильную (6) формулу представления m:

$$m = k^{n-1}\Bigg/\left(1 - \sum_{1}^{n-2} C_n^i k^i \left(b^i - a^i\right)\left(b^n - a^n\right)^{2-n} - \right.$$

$$\left. -k^{n-1} n\left(b^{n-1} - a^{n-1}\right)\left(b^n - a^n\right)^{-(n-1)}\right), \quad (7)$$

В которой знаменатель представлен как $1 + c/d$, а условие получения целочисленного m сводится к $d - c = 1$

$$\left(b^n - a^n\right)^{n-2} + \frac{k^{n-1}\left(b^{n-1} - a^{n-1}\right)n}{\left(b^n - a^n\right)} -$$

$$-\frac{1}{\left(b^n - a^n\right)} = \sum_{1}^{n-2} C_n^i k^i \left(b^i - a^i\right),$$

т. е. невыполнимое для целых k при $n > 2$.

Что представляют собой дроби знаменателя (6) проиллюстрируем примером.

При $b = 2$ $a = 1$ $n = 3$; $b - a = 1$ $b^2 - a^2 = 3$ $b^2 - a^2 = 7$. Условие (2) в примерном варианте представляется уравнением

$$x^3 = 3x^2 + 9x + 7.$$

При этом $x \equiv 5{,}0455\ldots$, соответственно: $k \equiv 1{,}38489\ldots$; $m \equiv 35{,}382\ldots$ и по (6) имеем

$$m = 1/\left(0{,}521398 - 0{,}309462 - 0{,}183673\right) =$$

$$= 35{,}382,$$

а при целом $k = r$, $m \cong -6{,}8$ в противоречии с условием задачи.

Привести пример, скажем, для $n = 5$, $b = 3$, $a = 1$, здесь нельзя из-за чудовищной чувствительности (7) к округлению. Ведь только

$$\left(b^5 - a^5\right)^4 = 242^4.$$

При

$$x = 16{,}0803466, \quad k = 15{,}049427,$$

$$m = 242^4/15{,}049427 \approx 2{,}279 \cdot 10^8.$$

БИБЛИОГРФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Г. Корн и Т. Корн. Справочник по математике. – М.: Наука, 1970.
2. Данилов В. Л. Математический анализ. – М.: Физматиздат, 1961.
3. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1965.
4. П. Ферма. Наследования по теореме чисел к диофантовому анализу. – М.: Наука, 1992.
5. Башмакова И. Г. История диофантова анализа от Диофанта до Ферма. – М.: Наука, 1984.

Поступила в редколлегию 16.01.07.