УДК 517.2

А. А. БОСОВ, Л. Н. САВЧЕНКО (ДИИТ)

МНОГОМЕСТНЫЕ ФУНКЦИИ МНОЖЕСТВ

Введены многоместные функции множества и даны некоторые их применения.

Введені багатомісні функції множини і дані деякі їх застосування.

The entered multi-seater functions of great number and information are some their applications.

Во многих инженерных и экономических задачах естественным является использование функций множеств, потому что могут быть измерены те показатели, которые в математическом плане представляет собой функции множества [1].

Пусть граф $G(V,E)$ является математической моделью сети железных дорог, где V – перечень, а E – перечень путей между городами (дуги графа). Каждая дуга $e \in E$ имеет длину $l(e)$ и заданы грузопотоки и пассажиропотоки между городами. Возникает задача разбиения графа $G(V,E)$ на три графа $G_{\text{г}}(V_{\text{г}},E_{\text{г}})$, $G_{\text{п}}(V_{\text{п}},E_{\text{п}})$, $G_{\text{гп}}(V_{\text{гп}},E_{\text{гп}})$, которые описывали бы три разбиения сети железных дорог для чисто грузовых, пассажирских перевозок и совместного использования.

Насколько удачно выполнено разбиение будем оценивать следующими показателями:

– временем доставки грузов;

– временем доставки пассажиров;

– затратами на содержание в работоспособном состоянии соответствующих сетей.

Очевидно, что перечисленные показатели являются функциями множеств $V_{\text{г}}$, $E_{\text{г}}$, $V_{\text{п}}$, $E_{\text{п}}$, $V_{\text{гп}}$, $E_{\text{гп}}$, что приводит к изучению многоместных функций множеств, которые будем записывать в виде $F(A_1,A_2,...,A_n)$.

В рассмотренном примере, например, затраты на содержание в работоспособном состоянии сети z, представляют собой многоместную (шестиместную) функцию

$$z = F(V_{\text{г}},E_{\text{г}},V_{\text{п}},E_{\text{п}},V_{\text{гп}},E_{\text{гп}}).$$

Целью данной работы является рассмотрение основ исчисления многоместных функций множества.

В общем случае, когда рассматривается функция $F(A_1,A_2,...,A_n)$, природа (инженерно-экономический смысл) множеств $A_1,A_2,...,A_n$ может быть произвольной, но фиксированной.

Последнее означает, что рассматриваются множества $\Omega_1,\Omega_2,...,\Omega_n$, множества $A_1,A_2,...,A_n$ являются подмножествами соответствующих исходных множеств $\Omega_i, i=\overline{1,n}$.

Введем классы подмножеств $\mathfrak{A}(\Omega)$, $\mathfrak{A}(\Omega_1),...,$ $\mathfrak{A}(\Omega_n)$, относительно которых будем предполагать, что каждый из перечисленных классов является как минимум кольцом, т. е., если A_i и B_i принадлежат $\mathfrak{A}(\Omega_i)$, то их объединение $A_i \bigcup B_i$ и разность $A_i \setminus B_i$ также принадлежат этому кольцу.

Определение 1. Отображение классов $\{\mathfrak{A}(\Omega),\ \mathfrak{A}(\Omega_1),...,\ \mathfrak{A}(\Omega_n)\}$ на действительную ось будем называть многоместной функцией множеств и обозначать через $F(A_1,A_2,...,A_n)$.

На каждом классе $\mathfrak{A}(\Omega_i)$ определим свою меру $\mu_i(A_i)$, обладающую следующими свойствами:

1. $\forall A_i \in \mathfrak{A}(\Omega_i) \to \mu_i(A_i) \geq 0$ и если $\mu_i(A_i)=0$, то $A_i \neq 0$.

2. $\forall A_i, B_i \in \mathfrak{A}(\Omega_i) \to \mu_i(A_i \bigcup B_i) = \mu_i(A_i) + $ $+\mu_i(B_i) - \mu_i(A_i \bigcap B_i)$

Определение 2. Если $\{A_{in}\}, n=1,2,...$ последовательность множеств $\mathfrak{A}(\Omega_i)$, то множество A_i будем называть предельным множеством данной последовательности, если имеет место

$$\lim_{n\to\infty} \mu_i(A_{in} \Delta A_i) = 0, \qquad (1)$$

где Δ – операция симметричной разности двух множеств.

Заметим, что множество A_i можно определить и как предел по Э. Борелю, т. е. вводятся два множества $\overline{A}_i$ и $\underline{A}_i$, которые определяются следующим образом:

– если $\omega \in \overline{A}_i$, то ω принадлежит бесконечному числу множеств из последовательности $\{A_{in}\}$;

– – если $\omega \in \overline{A}_i$, то можно указать такой номер $n(\omega)$, что для $n > n(\omega)$ элемент ω принадлежит всем A_{in}, тогда если $\underline{A}_i = \overline{A}_i$, то $A_{i*} = \underline{A}_i = \overline{A}_i$ называется пределом по Борелю.

Теорема 1. Если существует предел по Э. Борелю и имеет место (1), то $A_{i*} = A_i$.

Доказательство. Пусть $\omega \in A_{i*}$, но $\omega \notin A_i$, тогда $\mu_i(A_{in}\Delta A_i)\geq\mu_i(\omega)>0$, что противоречит (1). Следовательно, $\omega\in A_i$ и тем самым $A_{i*}\subseteq A_i$. Если же $\omega\in A_i$, то в силу (1) можно указать такой номер $n(\omega)$, что $\omega\in A_{in}$ при $n>n(\omega)$, но это означает, что $\omega\in \underline{A}_i$, а так как $\underline{A}_i=A_{i*}$, то получаем $A_i\subseteq A_{i*}$, что и доказывает теорему.

Следствие. Понятие предела последовательности множеств является инвариантным относительно меры, удовлетворяющей условиям определения 1.

Определение 3. Многоместная функция множеств $F(A_1,A_2,...,A_i,...,A_n)$ непрерывна по множеству A_i, если имеет место

$$\lim_{k\to\infty}F(A_1,A_2,...,A_{ik},...,A_n)=$$

$$=F(A_1,A_2,...,\lim A_{ik},...,A_n)$$

на любой последовательности A_{ik}, сходящейся к A_i.

Из этого определения следует, что понятие непрерывности является свойством функции и не зависит от меры. Однако, если $\mu_i(A_*)\to 0$ при $k\to\infty$, а $A_k\to\varnothing$, то непрерывность может быть сформулирована следующим образом:

Если для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta(\varepsilon)$, то тогда из неравенства $\mu_i(A_i'\Delta A_i'')<\delta(\varepsilon)$ следует

$$|F(A_1,A_2,...,A_i',...,A_n)-F(A_1,A_2,...,A_i'',...,A_n)|<\varepsilon.$$

Пусть последовательность множеств $\{A_{ik}\}$ сходится к множеству A_i и введем в рассмотрение последовательность чисел

$$a_{ik}=\frac{F(A_1,A_2,...,A_{ik},...,A_n)-F(A_1,A_2,...,A_i,...,A_n)}{\mu_i(A_{ik}\Delta A_i)-\mu(A_i)}$$

Определение 4. Если существует предел чисел a_{ik} при $k\to\infty$, то этот предел будем называть частной производной от многоместной функции F по мере μ_i на последовательности $\{A_{ik}\}$ и записывать следующим образом

$$\left.\frac{\partial F}{\partial\mu_i}\right|_{\{A_{ik}\}}\triangleq\lim_{k\to\infty}a_{ik}.$$

Замечание. Если F одноместная функция множества, то частную производную (2) будем называть просто производной от $F(A)$ по мере μ на последовательности $\{A_k\}$.

Теорема 2. Если $F(A)\leq F'(A)$ для любого $A'\in\mathfrak{A}(\Omega)$ и существует производная на последовательности $\{A_k\}$, такой, что $A_k\subseteq A$ и $\lim\limits_{k\to\infty}A_k=B$, то имеет место

$$\left.\frac{dF(A)}{d\mu_i}\right|_{\{A_k\}\to B\subset A}\leq 0.$$

Доказательство. Рассмотрим отношение

$$\frac{F(A_k\Delta A)-F(A)}{\mu(A_k\Delta A)-\mu(A)}=\frac{F(A_k\Delta A)-F(A)}{-\mu(A_k)}\leq 0. \quad (3)$$

Так как $\mu(A_k)>0$, а $F(A_k\Delta A)-F(A)\geq 0$ по условию теоремы. Устремляя $k\to\infty$ приходим к неравенству (3). Данной теореме в предположении непрерывности $\mu(A)$ и $F(A)$ можно придать следующую форму

$$\left.\frac{dF(A)}{d\mu}\right|_{(A_k)\to B}=\frac{F(A\Delta B)-F(A)}{\mu(A\Delta B)-\mu(A)},$$

которую можно использовать для нахождения множества A.

Пример 1. Пусть

$$F(A)=\int_A f(x)\mu(dx),$$

где интеграл принимается в смысле Лебега по введеной мере μ. В этом случае имеем

$$\left.\frac{dF(A)}{d\mu}\right|_{(A_k)\to B}=\frac{F(B)-2F(A\cap B)}{\mu(B)-2\mu(A\cap B)}.$$

Если $B\subseteq A$, то

$$\left.\frac{dF(A)}{d\mu}\right|_{(A_k)\to B\subset A}=\frac{\int_B f(x)\mu(dx)}{\mu(B)}.$$

Теперь предположим, что B является одноточечным множеством $\{x\}$, тогда приходим к соотношению

$$\left.\frac{dF(A)}{d\mu}\right|_{(A_n)\to\{x\}\subset A}=\frac{f(x)\cdot\mu(x)}{\mu(x)}=f(x),$$

откуда с необходимостью приходим к определению множества A в виде

$$A=\{x\in\Omega: f(x)\leq 0\}. \quad (4)$$

Данный результат очевиден, но метод его получения применим и в случае, когда Ω является дискретным множеством, а $F(A)$ представима следующим образом

$$F(A)=\sum_{x\in A}f(x).$$

В этом случае

$$\left.\frac{dF(A)}{d\mu}\right|_{(A_n)\to\{x\}\subset A}=\frac{f(x)}{\mu(x)}$$

и с учетом того, что $\mu(x) > 0$, приходим к соотношению (4).

Пример 2. Пусть $F(A)$ определяется формулой

$$F(A) = \int_A f_1(x)dx + \int_{\Omega \setminus A} f_2(x)dx,$$

тогда с учетом (4) множество A, доставляющее минимум функции $F(A)$ с необходимостью имеет вид

$$A = \{x \in \Omega : f_1(x) - f_2(x) \le 0\}.$$

Данное представление следует из того, что $F(A)$ можно записать в виде

$$F(A) = \int_A \big(f_1(x) - f_2(x)\big)dx + \int_\Omega f_2(x)dx$$

и так как Ω фиксированное множество, то можно ограничиться рассмотрением функции

$$\tilde{F}(A) = \int_A \big(f_1(x) - f_2(x)\big)dx,$$

которая от $F(A)$ отличается на постоянное слагаемое $\int_\Omega f_2(x)dx$.

Пример 3. Пусть множество Ω разбито на три подмножества A_1, A_2, A_3 так, что $A_i \bigcap A_j = \varnothing$, если $i \ne j$ и $A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3 = \Omega$. Рассматривается трехместная функция множеств

$$F(A_1, A_2, A_3) = F_1(A_1) + F_2(A_2) + F_3(A_3).$$

Необходимо найти такое разбиение множества Ω, чтобы данная функция принимала минимальное значение.

Если на множества A_1, A_2, A_3 не наложено никаких ограничений, то с необходимостью должно иметь место

$$\left.\frac{dF(A_1, A_2, A_3)}{d\mu_i}\right|_{\{B_{ik}\} \to \{B_i\} \subset A_i} \le 0, i = \overline{1,3},$$

что следует из определения (2).

В нашем случае $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = \Omega$ и $\mu_1 = \mu_2 = = \mu_3 = \mu$ С учетом условия $A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3 = \Omega$ на последовательность множеств $B_k \in \mathfrak{A}(\Omega)$, $k = 1, 2, ...$ наложим требование, что все $B_k \subseteq A_1$ и так как $(A_1 \Delta B_k) \bigcup (A_2 \Delta B_k) \bigcup A_3 = \Omega$ имеем последовательность чисел

$$a_k = \frac{F(A_1 \Delta B_k, A_2 \Delta B_k, A_3) - F(A_1, A_2, A_3)}{\mu(A_1 \Delta B_k) - \mu(A_1)}.$$

Если эта последовательность имеет предел, то его естественно назвать условной частной производной, и в рассматриваемом случае получаем

$$\lim_{k \to \infty} a_k =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{F_1(A_1 \Delta B_k) - F_1(A_1) + F_2(A_2 \Delta B_k) - F_2(A_2)}{\mu(A_1 \Delta B_k) - \mu(A_1)}.$$

Чтобы продвинуться далее будем предполагать аддитивность функций

$$\lim_{k \to \infty} a_k = \lim_{k \to \infty} \frac{-F_1(B_k) - F_2(B_k)}{-\mu(B_k)} = \frac{F_1(B) - F_2(B)}{\mu(B)},$$

где $B = \lim_{k \to \infty} B_k$.

Если $B = \{x\}$, то имеем

$$A_1 \subset \left\{x \in \Omega : \big(F_1(\{x\}) - F_2(\{x\})\big) / \mu(\{x\}) \le 0\right\}.$$

Аналогично получаем, что

$$A_1 \subset \left\{x \in \Omega : \big(F_1(\{x\}) - F_3(\{x\})\big) / \mu(\{x\}) \le 0\right\}.$$

Следовательно, в качестве A_1 можно взять

$$A_1 = \left\{x \in \Omega : F_1(\{x\}) - F_2(\{x\}), \right.$$
$$\left. F_1(\{x\}) - F_3(\{x\}) \le 0\right\},$$

т. к. $\mu(\{x\}) > 0$, а множества A_2 и A_3 будут следующими

$$A_2 = \left\{x \in \Omega : F_2(\{x\}) - F_1(\{x\}) \le 0, \right.$$
$$\left. F_2(\{x\}) - F_3(\{x\}) \le 0\right\};$$

$$A_3 = \left\{x \in \Omega : F_3(\{x\}) - F_1(\{x\}) \le 0, \right.$$
$$\left. F_3(\{x\}) - F_2(\{x\}) \le 0\right\}.$$

Пусть

$$F_i(A_i) = \int_{A_i} f_i(x)\mu(dx),$$

где интеграл понимается в смысле Лебега–Стальтьеса, тогда

$$A_1 = \left\{x \in \Omega : f_1(x) - f_2(x); f_1(x) - f_3(x) \le 0\right\};$$

$$A_2 = \left\{x \in \Omega : f_2(x) - f_1(x); f_2(x) - f_3(x) \le 0\right\};$$

$$A_3 = \left\{x \in \Omega : f_3(x) - f_1(x); f_3(x) - f_2(x) \le 0\right\}.$$

Заметим, что в рассмотренных примерах использовались простейшие правила дифференцирования функций множества [2].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лебег А. Интегрирование и отыскание примитивных функций. – М. - Л., Гостехиздат, 1934. – 342 с.
2. Босов А. А. Функции множества и их применение. – Днепродзержинск: Изд. дом «Андрей», 2007. –182 с.

Поступила в редколлегию 19.03.2007 г.