УДК 629.4.014.6

Г. Н. КОДОЛА (УкрГХТУ)

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОГРАНИЧЕНИЙ В ЗАДАЧЕ УЧЕТА СПРОСА НА ПАССАЖИРСКИЕ ПЕРЕВОЗКИ

Розглядається задача векторної оптимізації розподілення попиту на перевезення пасажирів між станціями з новим підходом до перетворення обмежень.

Рассматривается задача векторной оптимизации распределения спроса на пассажирские перевозки между станциями с новым подходом к преобразованию ограничений.

The problem of vector optimization of demand distribution for passenger transportations between stations with the new approach to transformation of restrictions is considered.

В работах [1; 2] были рассмотрены математические модели учета спроса на пассажирские перевозки в поездах дальнего следования, где в качестве модели рассматривалась задача векторной оптимизации с ограничениями. При решении данной задачи в [2] возникла трудность распределения мест, чтобы удовлетворить спрос.

Рассмотрим задачу из [2]

$$\begin{pmatrix} F_1(Y) \\ -F_2(Y) \end{pmatrix} \to \min \tag{1}$$

при условиях

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{j=3}^{n} y_{2j} \le y_{12} \\ \sum_{j=4}^{n} y_{3j} \le y_{13} + y_{23} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{j=i+1}^{n} y_{ij} \le \sum_{k=1}^{i-1} y_{ki} \end{array}\right\} \tag{2}$$

где $F_1(Y)$ – средние потери; $F_2(Y)$ – средняя прибыль; $y_{ij}(t)$ – число мест, которые могут быть проданы в A_i для поездки в A_j;

$$Y = (y_{12}, y_{13}, ..., y_{1n}, y_{23}, y_{24}, ..., y_{2n}, ..., y_{n-1n});$$

n – количество станций.

Преобразуем условия (2). Для этого из правой части перенесем все y_{ij}, для $i \ne 1$ в левую часть:

$$\sum_{j=3}^{n} y_{2j} \le y_{12},$$

$$-y_{23} + \sum_{j=4}^{n} y_{3j} \le y_{13},$$

$$-y_{24} - y_{34} + \sum_{j=5}^{n} y_{4j} \le y_{14}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$-\sum_{k=2}^{i-1} y_{ki} + \sum_{j=i+1}^{n} y_{ij} \le y_{1i}, \ i = \overline{2, n-1}.$$

Запишем преобразованные условия в матричной форме

$$C \cdot Y_1 \le Y_2,$$

где

$$Y_1 = \begin{pmatrix} y_{23} \\ y_{24} \\ \dots \\ y_{2n} \\ y_{34} \\ y_{35} \\ \dots \\ y_{3n} \\ \dots \\ y_{n-1n} \end{pmatrix};$$

$$Y_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{13} \\ y_{14} \\ \dots \\ y_{1n-1} \end{pmatrix},$$

а матрица C представляет собой:

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & ... & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ... & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 0 & ... & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Размерность матрицы C составит:

$$(n-2)\times(n-2)n-\sum_{i=2}^{n-1} i .$$

Рассмотрим пример, для $n=5$.

Выпишем условия (2):

$$y_{23}+y_{24}+y_{25}\le y_{12},$$

$$y_{34}+y_{35}\le y_{13}+y_{23},$$

$$y_{45}\le y_{14}+y_{24}+y_{34}.$$

Преобразуем данные неравенства, как описано выше

$$y_{23}+y_{24}+y_{25}\le y_{12},$$

$$-y_{23}+y_{34}+y_{35}\le y_{13},$$

$$-y_{24}-y_{34}+y_{45}\le y_{14}.$$

В матричной форме

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_{23} \\ y_{24} \\ y_{25} \\ y_{34} \\ y_{35} \\ y_{45} \end{pmatrix}\le\begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{13} \\ y_{14} \end{pmatrix}.$$

Разобьем матрицу C на две матрицы и вектор Y_1 на два вектора, тогда преобразованные условия (2) в матричной форме примут вид:

$$A\cdot\begin{pmatrix} y_{23} \\ y_{24} \\ y_{25} \end{pmatrix}+B\cdot\begin{pmatrix} y_{34} \\ y_{35} \\ y_{45} \end{pmatrix}\le\begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{13} \\ y_{14} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда, если существует обратная матрица к матрице A, решение системы неравенств (3) будет следующим:

$$\begin{pmatrix} y_{23} \\ y_{24} \\ y_{25} \end{pmatrix}\le A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{13} \\ y_{14} \end{pmatrix}+A^{-1}\cdot B\cdot\begin{pmatrix} y_{34} \\ y_{35} \\ y_{45} \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы A равен 1. Обратная матрица представляет собой:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы получить решение системы неравенств (3) достаточно задаться значениями:

$$\begin{pmatrix} y_{34} \\ y_{35} \\ y_{45} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{13} \\ y_{14} \end{pmatrix}.$$

Рассматривая случай для $n=6$, определитель матрицы A также равен 1, и т. д. Выпишем условия (3) для общего случая:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & .. & 1 & 1 \\ -1 & 0 & .. & 0 & 0 \\ 0 & -1 & .. & 0 & 0 \\ ... & ... & .. & ... & ... \\ 0 & 0 & .. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .. & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{23} \\ y_{24} \\ y_{25} \\ ... \\ y_{2n-1} \\ y_{2n} \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & .. & 1 & 1 & .. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & .. & ... & ... & .. & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & .. & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & .. & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .. & -1 & 0 & .. & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{34} \\ y_{35} \\ ... \\ y_{3n} \\ y_{45} \\ ... \\ y_{4n} \\ ... \\ y_{n-1n} \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{13} \\ y_{14} \\ ... \\ y_{1n-1} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Можно выделить следующие свойства матрицы A:

Определитель матрицы A для любой размерности будет равен 1.

Обратная матрица к матрице A размерности n будет следующей:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

тогда решение системы неравенств (4) имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_{23} \\ y_{24} \\ y_{25} \\ ... \\ y_{2n-1} \\ y_{2n} \end{pmatrix} \le A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_{34} \\ y_{35} \\ ... \\ y_{3n} \\ y_{45} \\ ... \\ y_{4n} \\ ... \\ y_{n-1n} \end{pmatrix} + A^{-1} \cdot B \cdot \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{13} \\ y_{14} \\ ... \\ y_{1n-1} \end{pmatrix},$$

где A^{-1} определяется как (5).

Рассмотрим численный пример из [2], где рассматривается задача распределения мест по станциям для 4 городов на поезд с одним типом мест.

Информация о спросе представлена в виде:

$$A_{\min} = \begin{bmatrix} 10 & & \\ 20 & 5 & \\ 60 & 30 & 4 \end{bmatrix},$$

$$A_{\max} = \begin{bmatrix} 15 & & \\ 25 & 10 & \\ 80 & 50 & 10 \end{bmatrix},$$

где матрица $A_{\min}$ содержит информацию о минимальной величине спроса, матрица $A_{\max}$ – о максимальной величине спроса на поездки. Информация разбита по столбцам, т. е. первый столбец показывает спрос на поездки из первой станции до второй, третьей и четвертой.

При этих исходных данных было получено следующее решение задачи:

$$Y = \begin{pmatrix} 11,4 & & \\ 21,4 & 6,41 & \\ 65,6 & 35,7 & 5,69 \end{pmatrix},$$

т. е. из первой станции до второй выделяется 11 мест, из первой до третей – 21 место, из первой до четвертой – 66 мест, из второй до третьей станции выделяется 6 мест, из второй до четвертой – 36 мест, при чем ограничения (2) по второй станции для данного решения не выполняются, т. е.

$$(y_{23} + y_{24}) \geq y_{12},$$

сделаны были выводы, что бронирование мест по второй станции необходимо перераспределить.

Для решения задачи перераспределения воспользуемся представленным выше методом.

Запишем ограничения (2) с учетом преобразования:

$$\begin{cases} y_{23} + y_{24} \quad \leq y_{12}, \\ -y_{23} + y_{34} \leq y_{13}. \end{cases}$$

Решением данной системы неравенств будет следующее:

$$\begin{cases} y_{24} \leq 26, \\ y_{23} \geq -15. \end{cases}$$

Откуда следует, что по второй станции недостаток мест на данный поезд до третьей станции составляет 15 мест.

Один из вариантов решения данной задачи представлен в [3], где в ограничения (2) включено новое слагаемое, учитывающее свободные места, следующие от станции A_1 до станции A_i, и будут записаны как

$$\sum_{j=3}^{n} y_{2j} = y_{12} + y_{12}^{0}$$

$$\sum_{j=4}^{n} y_{3j} = y_{13} + y_{23} + y_{13}^{0}$$

....

$$\sum_{j=i+1}^{n} y_{ij} = \sum_{k=1}^{i-1} y_{ki} + y_{1i}^{0}$$

$$Y \geq 0, \quad y_{1i}^{0} \geq 0,$$

где y_{1i}^{0} – свободные места, следующие от станции A_1 до станции A_i.

С учетом этого выпишем ограничения (2) по второй станции для рассматриваемого примера

$$y_{23} + y_{24} \leq y_{12} + y_{12}^{0},$$

где y_{12}^{0} – свободные места, следующие от станции A_1 до станции A_2.

Поэтому, чтобы удовлетворить спрос по второй станции необходимо от первой станции до второй пустить дополнительные места в количестве $y_{12}^{0} = 15$, при этом от первой станции до второй они будут идти порожняком. Как вариант для сокращения убытков от порожнего пробега дополнительных мест в стоимость билета необходимо включать затраты по холостому пробегу.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Босов А. А. Определение эффективной структуры пассажирского поезда / А. А. Босов, Е. А. Момот // Вісник Дніпропетр. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – Д.: Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту залізн.. трансп. ім. акад. В. Лазаряна, 2003. – № 1. – С. 91–95.
2. Аксенов И. М. Математическая модель композиции пассажирских составов / И. М. Аксенов, Г. Н. Кодола, Е. А. Момот // Залізничний транспорт України. – 2005. – № 1. – С. 47–50.
3. Кодола Г. Н. Математическая модель учета спроса на пассажирские перевозки // Проблемы и перспективы развития железнодорожного транспорта: Тезисы LXVI Междунар. научно-практической конф. – Д.: Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна, 2006. – С. 296–297.

Поступила в редколлегию 07.10.2006.