УДК 625.173

И. П. КОРЖЕНЕВИЧ (ДИИТ)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЛАНА СУЩЕСТВУЮЩЕГО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ПУТИ

Запропонована математична модель плану існуючої залізничної колії, що має вищу точність в порівнянні з традиційною.

Предложена математическая модель плана существующего железнодорожного пути, имеющая более высокую точность по сравнению с традиционной.

The article offers a mathematical model of the plan of existing railway track with higher accuracy as compared to the traditional one.

При различных расчетах выправки (переустройства) плана большую роль играет математическое представление существующего пути. Уже почти 100 лет в качестве такой модели используется представление кривизны отдельных точек пути в виде кривизны отрезка круговой кривой, проходящей через три соседних точки. К сожалению, такой подход использован даже в работах, в которых рассматриваются достаточно серьезные математические модели [1].

При такой модели план представляется пересекающимися отрезками круговых кривых (рис. 1).

Рис. 1. Традиционная модель существующей кривой

Простота такого подхода облегчает расчеты кривизны существующего пути, но приводит к существенным погрешностям модели, которые проявляются на участках изменения кривизны. Особенно велики такие погрешности в начале и в конце переходных кривых (рис. 2).

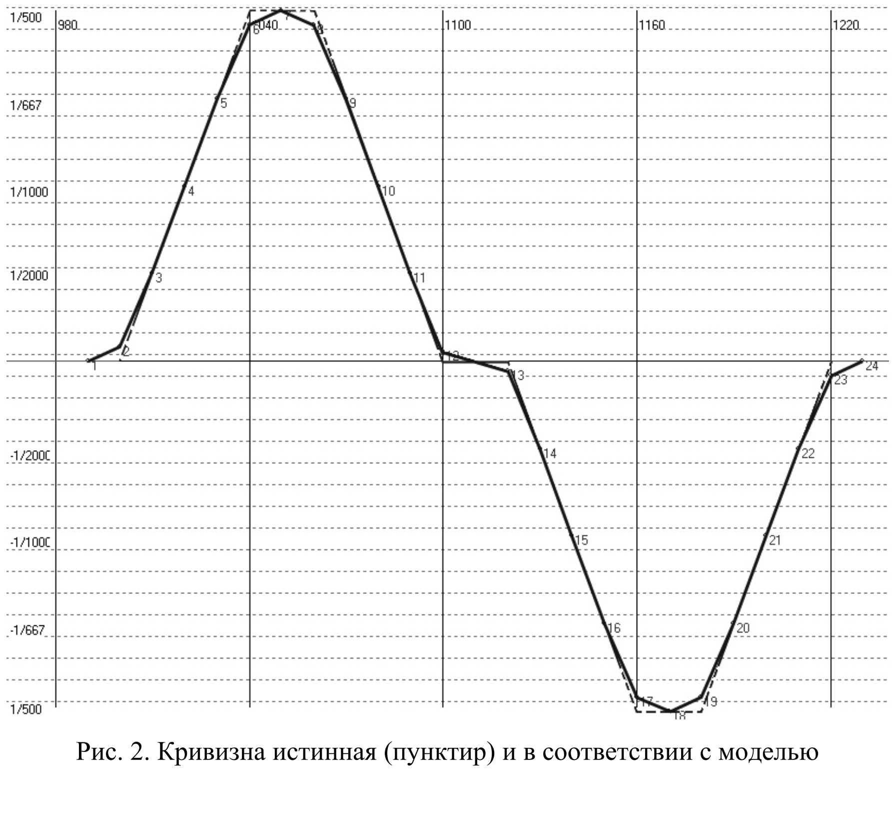

Рис. 2. Кривизна истинная (пунктир) и в соответствии с моделью

Учитывая, что в абсолютном большинстве случаев сегодня расчеты выправки выполняются на компьютерах, требование простоты моделей отступает на второй план.

Автор исследовал возможности применения в качестве модели кривых второго порядка (как известно [2], кривая второго порядка обязательно проходит через 5 точек) и кубической параболы. Решения, получающиеся для таких моделей, ведут себя нустойчиво и неприменимы для автоматического применения.

В последнее время в различных инженерных задачах широко используются сплайны [3–5]. Анализ сплайновых моделей показал, что для математического описания плана существующего пути наилучшим образом подходят кубические параметрические сплайны специального вида. Для простоты последующей математической обработки такой сплайн в диапазоне между точками i и $i+1$ запишем в следующем виде:

$$Y(t) = \omega_i Y_{i+1} + \overline{\omega}_i Y_i + l_i^2 \Big[\left(\omega_i^3 - \omega_i\right)\gamma_{i+1} + \left(\overline{\omega}_i^3 - \overline{\omega}_i\right)\gamma_i \Big],$$

$$X(t) = \omega_i X_{i+1} + \overline{\omega}_i X_i + l_i^2 \Big[\left(\omega_i^3 - \omega_i\right)\delta_{i+1} + + \left(\overline{\omega}_i^3 - \overline{\omega}_i\right)\delta_i \Big],$$

где X_i, Y_i – координаты i-й точки;

$$\omega = \frac{t - t_i}{l_i};$$

$l_i = R(i, i+1)$ – расстояние между точками i и $i+1$; $t_1 = 0$; $t_i = t_{i-1} + l_{i-1}$; δ_i, γ_i - коэффициенты сплайна.

Коэффициенты сплайна определяются из условий равенства в точках пути координат, а также первой и второй производных. Вторые производные в первой и последней точках принимаются равными нулю.

Полученная трехдиагональная матрица легко решается. В результате план пути описывается параметрическим кубическим сплайном, что позволяет определять кривизну и находить векторы нормалей в отдельных точках. Для этого необходимо найти первые и вторые производные:

$$\dot{X} = \frac{X_{i+1} - X_i}{l_i} + l_i \Big[\left(3\omega_i^2 - 1\right)\delta_{i+1} - \left(3\overline{\omega}_i^2 - 1\right)\delta_i \Big]$$

$$\dot{Y} = \frac{Y_{i+1} - Y_i}{l_i} + l_i \Big[\left(3\omega_i^2 - 1\right)\gamma_{i+1} - \left(3\overline{\omega}_i^2 - 1\right)\gamma_i \Big]$$

$$\ddot{X} = 6\omega_i \delta_{i+1} + 6\overline{\omega}_i \delta_i$$

$$\ddot{Y} = 6\omega_i \gamma_{i+1} + 6\overline{\omega}_i \gamma_i .$$

Координаты центра кривизны и саму кривизну можно найти по известным [2] формулам:

$$X_c = X - \frac{\dot{Y}\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2\right)}{\dot{X}\ddot{Y} - \dot{Y}\ddot{X}}$$

$$Y_c = Y + \frac{\dot{X}\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2\right)}{\dot{X}\ddot{Y} - \dot{Y}\ddot{X}}$$

$$k = -\frac{\dot{X}\ddot{Y} - \dot{Y}\ddot{X}}{\sqrt{\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2\right)^3}} .$$

Зная коэффициенты сплайна, можно также достаточно точно рассчитывать кривизну, вектора нормалей и координаты промежуточных точек на плане существующего пути, что позволяет решать ряд дополнительных задач при проектировании выправки (переустройства) плана.

Данная модель плана существующего пути в виде кубического параметрического сплайна реализована в программе проектирования переустройства плана RWPlan 1.2.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дюнин А. К. Аналитический метод проектирования переустройства железнодорожного пути в плане / А. К. Дюнин, А. И. Проценко. – Новосибирск: Изд-во НИИЖТ. – 1967. – 226 с.
2. Корн Г. Справочник по математике / Корн Г., Корн Т. – М.: Наука. – 1973. – 832 с.
3. Алберг Дж. Теория сплайнов и ее приложения / Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. – М.: Мир, 1972. – 316 с.
4. Игнатов М. И. Натуральные сплайны многих переменных / М. И. Игнатов, А. Б. Певный. – Л.: Наука. 1991. – 125 с.
5. Голованов Н. Н. Геометрическое моделирование. – М.: Изд-во физико-математической литературы. – 2002. – 472 с.

Поступила в редколлегию 12.09.2006.