УДК 681.04

Ю. Д. ПОЛИССКИЙ (НИИАЧМ)

АЛГОРИТМ ВЫПОЛНЕНИЯ ОПЕРАЦИИ ДЕЛЕНИЯ ЧИСЕЛ НА ДВА В СИСТЕМЕ ОСТАТОЧНЫХ КЛАССОВ

Розглянуто метод розв'язання задачі ділення на два чисел у системі залишкових класів. Метод алгоритмічно простий та нескладний для схемної реалізації при створенні ефективних обчислювальних структур.

Рассмотрен метод решения задачи деления на два чисел в системе остаточных классов. Метод алгоритмически прост и несложен для схемной реализации при создании эффективных вычислительных структур.

The method of solving problem of division on two for numbers in residue class system are observed. The method is algorithmically simple and not complicated to scheme realization for making of effective computing's structures.

Введение

Применение непозиционной системы остаточных классов (СОК) [1] открыло новые возможности повышения производительности вычислительных структур и надежности вычислений. По данным руководителя научной школы в Украине проф. М. В. Синькова [2] СОК «…нашла воплощение в серийных универсальных ЭВМ и многих оригинальных разработках. К ним относятся работы по созданию универсальной ЭВМ в институте дальней радиосвязи, бортовых специализированных ЭВМ, созданных на авиационных предприятиях, специализированных моделирующих устройств, разработанных в Ленинградской военной Академии». Достоинства СОК заключаются [2], [3] в высокой степени параллелизма при выполнении арифметических операций сложения, вычитания и умножения. Несколько сложнее обстоят дела при реализации немодульных операций, требующих знания всего числа в целом, к которым относится операция деления числа на два.

Постановка задачи

При изложении статьи будем использовать определения и обозначения, приведенные в [4]. Таким образом, СОК называется система счисления, в которой произвольное число N представляется в виде набора наименьших неотрицательных остатков по модулям $m_1, m_2, \ldots, m_n$, т. е.

$$N = [N(\operatorname{mod} m_1), N(\operatorname{mod} m_2), \ldots, N(\operatorname{mod} m_n)]$$

или

$$N = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n). \qquad (1)$$

Здесь $\alpha_i = N(\operatorname{mod} m_i)$. При этом, если числа m_i взаимно простые, то представление числа N в виде (1) является единственным, а объем диапазона $[0, M)$ представимых чисел в этом случае равен

$$M = m_1 m_2 \ldots m_n. \qquad (2)$$

В дальнейшем рассматриваются числа вида (1), для которых один из модулей $m_n = 2$.

Будем отличать числа, большие $M/2$ и меньшие $M/2$. При этом, если $0 \le N < M/2$, то N – число первой половины. Если же $\frac{M}{2} \le N < M$, то N – число второй половины.

Пусть в системе с основаниями $m_1, m_2, \ldots, m_n = 2$ даны два числа $N_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $N_2 = 2 = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ и пусть $E = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ – частное от деления N_1 на N_2. Тогда, если деление точно выполнимо, т.е. N_1 кратно N_2, то E принадлежит первой половине. При этом все остатки частного, кроме остатка по модулю m_n, определяются формальным делением остатков α_i на остатки β_i. Для модуля m_n имеем неопределенность $\frac{0}{0}$, которую требуется раскрыть.

Основная часть

Пусть системой оснований полиадического кода также является система $m_1, m_2, \ldots, m_n = 2$. Тогда число E в полиадическом коде представляется следующим образом

$$E = \pi_1 + \pi_2 m_1 + \pi_3 m_1 m_2 + \ldots + \pi_i m_1 m_2 \ldots m_{i-1} + \\ + \ldots + \pi_{n-1} m_1 m_2 \ldots m_{n-2} + \pi_n m_1 m_2 \ldots m_{n-1},$$

где $0 < \pi_i \le m_i - 1$.

Пусть

$$E_1 = \pi_1 + \pi_2 m_1 + \pi_3 m_1 m_2 + \ldots +$$
$$+ \pi_i m_1 m_2 \ldots m_{i-1} + \ldots + \pi_{n-1} m_1 m_2 \ldots m_{n-2}. \quad (3)$$

Число

$$0 \le \pi_1 + \pi_2 m_1 + \pi_3 m_1 m_2 + \ldots + \pi_i m_1 m_2 \ldots m_{i-1} +$$
$$+ \ldots + \pi_{n-1} m_1 m_2 \ldots m_{n-2} < \frac{M}{2},$$

т. е. является числом первой половины. Поэтому задача нахождения ε_n сводится, таким образом, к определению четности числа E_1

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 0, & E_1 \text{ четное}, \\ 1, & E_1 \text{ нечетное}. \end{cases} \quad (4)$$

Поскольку все модули (3) нечетные, четность E_1 определяется значением

$$I = \pi_1 + \pi_2 +, \ldots, + \pi_{n-1},$$
$$I = (\varepsilon_n).$$

Следовательно, метод базируется на получении значения π_i и подсуммировании его к ε_n^{i-1}. При этом $\varepsilon_n^i = 0$, $i = 0$.

Получение π_i осуществляется итеративным путем, при котором на i-й итерации находится π_i и рассчитывается $E_1^i = E_1^{i-1} - \Delta^i$, где

$$\Delta^i = \pi_1 \; m_1 m_2 \ldots m_{i-1}.$$

Перепишем (3) в виде

$$E_1 = \pi_1 + m_1 \left(\pi_2 + m_2 \left(\pi_3 + \ldots + m_{i-1} \left(\pi_i + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \ldots + m_{n-2} \pi_{n-1} \right)\right)\right).$$

Тогда

$$\pi_1 = E_1 (\mathrm{mod}\, m_1) = \varepsilon_1$$

и

$$\Delta^i = \pi_1 = \varepsilon_1,$$
$$s^i = \pi_1 = \varepsilon_1.$$

Получаем

$$E_1^1 = E_1 - \Delta^1 = m_1 \left(\pi_2 + m_2 \left(\pi_3 + \ldots + m_{i-1} \left(\pi_i + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \ldots + m_{n-2} \pi_{n-1} \right)\right)\right)$$

$$I^1 = I + s^1$$

и

$$E_1^1 = \left(\varepsilon_1^1, \varepsilon_2^1, \ldots, \varepsilon_{n-1}^1 \right),$$
$$I^1 = \left(\varepsilon_n^1 \right).$$

При этом $\varepsilon_1^1 = \varepsilon_1 - \Delta_1^1$, $\varepsilon_2^1 = \varepsilon_2 - \Delta_2^1, \ldots,$ $\varepsilon_{n-1}^1 = \varepsilon_{n-1} - \Delta_{n-1}^1$, $\varepsilon_n^1 = 0 + s_n^i$,

где

$$\Delta_1^1 = \pi_1 (\mathrm{mod}\, m_1) = \varepsilon_1, \; \Delta_2^1 = \pi_1 (\mathrm{mod}\, m_2),$$
$$\Delta_3^1 = \pi_1 (\mathrm{mod}\, m_3), \ldots, \; \Delta_i^1 = \pi_1 (\mathrm{mod}\, m_i), \; \ldots,$$
$$\Delta_{n-1}^1 = \pi_1 (\mathrm{mod}\, m_{n-1})$$

и

$$s_n^1 = \pi_1 (\mathrm{mod}\, m_n).$$

Таким образом, результат первой итерации

$$E_1^1 = \left(0, \varepsilon_2^1, \ldots, \varepsilon_{n-1}^1 \right),$$
$$I^1 = \left(\varepsilon_n^1 \right).$$

На второй итерации выполняется деление E_1^1 на m_1 с сокращением объема рабочего диапазона в m_1 раз. Получаем

$$\overline{E}_1^2 = \frac{E_1^1}{m_1} = \pi_2 + m_2 \left(\pi_3 + \ldots + m_{i-1} \left(\pi_i + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \ldots + m_{n-2} \pi_{n-1} \right)\right).$$

При этом

$$\delta_2^2 = \left(\frac{\varepsilon_2^1}{m_1} \right) (\mathrm{mod}\, m_2), \; \delta_3^2 = \left(\frac{\varepsilon_3^1}{m_1} \right) (\mathrm{mod}\, m_3), \; \ldots,$$
$$\delta_i^2 = \left(\frac{\varepsilon_i^1}{m_1} \right) (\mathrm{mod}\, m_i), \qquad \ldots,$$
$$\delta_{n-1}^2 = \left(\frac{\varepsilon_{n-1}^1}{m_1} \right) (\mathrm{mod}\, m_{n-1})$$

и

$$\Delta^2 = \pi_2 = \delta_2^2, \quad s^2 = \pi_2 = \delta_2^2.$$

Далее на этой же итерации выполняем

$$E_1^2 = \overline{E}_1^2 - \Delta^2$$

и

$$I^2 = I^1 + s^2.$$

Получаем

$$E_1^2 = m_2\left(\pi_3 + \ldots + m_{i-1}\left(\pi_i + \ldots + m_{n-2}\pi_{n-1}\right)\right)$$

и

$$E_1^2 = \left(\varepsilon_2^2, \ldots, \varepsilon_{n-1}^2\right), \quad I^2 = \left(\varepsilon_n^2\right).$$

При этом

$$\varepsilon_2^2 = \delta_2^2 - \Delta_2^2, \ldots, \varepsilon_{n-1}^2 = \delta_{n-1}^2 - \Delta_{n-1}^2, \varepsilon_n^2 = \varepsilon_n^1 + s_n^2,$$

где

$$\Delta_2^2 = \delta_2^2, \ \Delta_3^2 = \pi_2\left(\mathrm{mod}\, m_3\right), \ \ldots,$$
$$\Delta_i^2 = \pi_2\left(\mathrm{mod}\, m_i\right), \ \ldots, \ \Delta_{n-1}^2 = \pi_2\left(\mathrm{mod}\, m_{n-1}\right)$$

и

$$s_n^2 = \pi_2\left(\mathrm{mod}\, m_n\right).$$

Таким образом, результат второй итерации

$$E_1^2 = \left(0, \varepsilon_3^2, \ldots, \varepsilon_{n-1}^2\right), \quad I^2 = \left(\varepsilon_n^2\right).$$

После выполнения аналогичных действий на каждой итерации получаем последовательно $\pi_3, \ldots, \pi_i, \ldots, \pi_{n-1}$. Результат $(n-1)$-ой итерации $E_1^{n-1} = \varepsilon_{n-1}^{n-1} = 0$,

$$I^{n-1} = \left(\varepsilon_n^{n-1}\right) = \left(\varepsilon_n\right).$$

Проиллюстрируем изложенное на примере для системы модулей $m_1 = 5$, $m_2 = 7$, $m_3 = 3$, $m_4 = 11$, $m_5 = 2$. Диапазон чисел 0…2309. Делимое $N_1 = 1846 = (1,5,1,9,0)$, делитель $N_2 = 2 = (2,2,2,2,0)$.

Результат формального деления

$$E = \left(\varepsilon_1 = 3, \varepsilon_2 = 6, \varepsilon_3 = 2, \varepsilon_4 = 10, \varepsilon_5 = \frac{0}{0}\right).$$

Индикаторное число $I = 0$.

На первой итерации

$$\pi_1 = 3,$$
$$\Delta^1 = 3,$$
$$s^1 = 3,$$
$$\Delta_1^1 = 3,$$
$$\Delta_2^1 = 3(\mathrm{mod}\,7) = 3,$$
$$\Delta_3^1 = 3(\mathrm{mod}\,3) = 0,$$
$$\Delta_4^1 = 3(\mathrm{mod}\,11) = 3,$$
$$s_5^1 = 3(\mathrm{mod}\,2) = 1$$

и

$$\varepsilon_1^1 = 0,$$
$$\varepsilon_2^1 = 3,$$
$$\varepsilon_3^1 = 2,$$
$$\varepsilon_4^1 = 7,$$
$$\varepsilon_5^1 = 1,$$
$$E_1^1 = (0,3,2,7),$$
$$I^1 = (1).$$

На второй итерации

$$\delta_2^2 = \left(\frac{3}{5}\right)(\mathrm{mod}\,7) = 2, \quad \delta_3^2 = \left(\frac{2}{5}\right)(\mathrm{mod}\,3) = 1,$$

$$\delta_4^2 = \left(\frac{7}{5}\right)(\mathrm{mod}\,11) = 8$$

и

$$E_{1,t}^2 = (2,1,8).$$

Далее

$$\pi_2 = \delta_2^2 = 2,$$
$$\Delta^2 = 2$$
$$s^2 = 2,$$
$$\Delta_2^2 = 2,$$
$$\Delta_3^2 = 2(\mathrm{mod}\,3) = 2,$$
$$\Delta_4^2 = 2(\mathrm{mod}\,11) = 2,$$
$$s_5^2 = 2(\mathrm{mod}\,2) = 0$$

и

$$\varepsilon_2^2 = 0,$$
$$\varepsilon_3^2 = 2,$$
$$\varepsilon_4^2 = 6,$$
$$\varepsilon_5^2 = 1,$$
$$E_1^2 = (0,2,6),$$
$$I^2 = 1.$$

На третьей итерации

$$\delta_3^3 = \left(\frac{2}{7}\right)(\mathrm{mod}\,3) = 2, \ \delta_4^3 = \left(\frac{6}{7}\right)(\mathrm{mod}\,11) = 4$$

и

$$E_{1,t}^3 = (2,4).$$

Далее

$$\pi_3 = \delta_3^3 = 2,$$
$$\Delta^3 = 2$$
$$s^3 = 2,$$
$$\Delta_3^3 = 2,$$
$$\Delta_4^3 = 2(\mathrm{mod}\,11) = 2,$$
$$s_5^3 = 2(\mathrm{mod}\,2) = 0$$

и

$$\varepsilon_3^3 = 0,$$
$$\varepsilon_4^3 = 2,$$
$$E_1^3 = (0,2),$$
$$I^3 = 1.$$

На четвертой итерации

$$\delta_4^4 = \left(\frac{2}{3}\right)(\mathrm{mod}\,11) = 8$$

и

$$E_{1,t}^4 = (8).$$

Далее

$$\pi_4 = \delta_4^4 = 8,$$
$$\Delta^4 = 8,$$
$$s^4 = 8,$$
$$\Delta_4^4 = 8(\mathrm{mod}\,11) = 8,$$
$$s_5^4 = 8(\mathrm{mod}\,2) = 0$$

и

$$\varepsilon_4^4 = 0,$$
$$E_1^4 = (0),$$
$$I^4 = 1.$$

Поскольку $I^4 = 1$, то число E_1=(3, 6, 2, 10) нечетное. Следовательно, $\varepsilon_5 = 1$.

Таким образом, результат деления

$$E = 923 = (3,6,2,10,1).$$

Процедуру определения ε_5 можно упростить, выполняя на каждой итерации лишь операции вычитания путем простой выборки констант из соответствующих таблиц. С этой целью необходимо предварительно для принятой системы модулей и выбранного их упорядочения рассчитать в соответствии с приведенными выше зависимостями для каждого значения ε_i^{i-1} константы $\Delta_{i+1}^i, \Delta_{i+2}^i, \ldots, \Delta_n^i$, которые следует вычитать из остатков $\varepsilon_{i+1}^{i-1}, \varepsilon_{i+2}^{i-1}, \ldots, \varepsilon_{n-1}^{i-1}$ и добавлять к ε_n^{i-1} на i-й итерации. Тогда на каждой итерации будет выполняться лишь операция вычитания для все сокращающегося количества остатков.

В качестве примера выполним для той же системы модулей деление $N_1 = 1846 = (1,5,1,9,0)$ на $N_1 = 2 = (2,2,2,2,0)$ с помощью вычитания констант из соответствующих таблиц.

$$E = \left(\varepsilon_1 = 3, \varepsilon_2 = 6, \varepsilon_3 = 2, \varepsilon_4 = 10, \varepsilon_5 = \frac{0}{0}\right).$$

Индикаторное число $I = 0$.

На первой итерации для $\varepsilon_1 = 3$ выбираем из табл.1 $\Delta_2^1 = 3$, $\Delta_3^1 = 0$, $\Delta_4^1 = 3$, $s_5^1 = 1$ и получаем $E_1^1 = (0,3,2,7)$, $I^1 = (1)$.

Таблица 1

Остатки для mod	Константы для mod			
$m_1=5$	$m_2=7$	$m_3=3$	$m_4=11$	$m_5=2$
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	0
3	3	0	3	1
4	4	1	4	0

На второй итерации для $\overline{\varepsilon_2} = 3$ выбираем из табл. 2 $\Delta_3^2 = 1$, $\Delta_4^2 = 10$, $s_5^2 = 0$ и получаем $E^2 = (0,1,8)$, $I^2 = (1)$.

Таблица 2

Остатки для mod	Константы для mod		
$m_2=7$	$m_3=3$	$m_4=11$	$m_5=2$
0	0	0	0
1	0	4	1
2	0	8	0
3	1	10	0
4	1	3	1
5	2	5	1
6	2	9	0

На третьей итерации для $\overline{\varepsilon_3} = 1$ выбираем из табл. 3 $\Delta_4^3 = 4$, $s_5^3 = 0$ и получаем $E^3 = (0,4)$, $I^3 = (1)$.

Таблица 3

Остатки для mod	Константы для mod	
$m_3 = 3$	$m_4 = 11$	$m_5 = 2$
0	0	0
1	2	1
2	4	0

На четвертой итерации для $\overline{\varepsilon_4} = 4$ выбираем из табл. 4 $s_5^4 = 0$ и получаем $E^4 = (0)$, $I^4 = (1)$.

Таблица 4

Остатки для mod	Константы для mod
$m_4 = 11$	$m_5 = 2$
0	0
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	1

Поскольку $I^4 = (1)$, то действительное значение $\varepsilon_5 = 1$. Следовательно, результат деления $E = 923 = (3, 6, 2, 10, 1)$.

Таким образом, рассмотрено решение задачи деления на два числа, представленного в системе остаточных классов. Метод решения базируется на определении четности числа, определяемого остатками частного по остальным модулям системы. Такое определение выполняют последовательным вычитанием констант из полученных приведенных остатков частного. При этом константы на каждой итерации выбираются в зависимости от значения остатка, полученного на предыдущей итерации. Предложенный метод имеет высокое быстродействие и позволяет повысить производительность вычислительных структур и надежность вычислений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Акушский И. Я. Машинная арифметика в остаточных классах / И. Я. Акушский, Д. И. Юдицкий - М.: Советское радио, 1968. - 440 с.
2. Синьков М. В. Нетрадиционная система остаточных классов и ее основоположник И. Я. Акушский / М. В. Синьков, Т. В. Синькова, А. В. Федоренко, А. А. Чапор - Сайт http://www.isfcst.kiev.ua, 2001.
3. Червяков Н. И. Методы и принципы построения модулярных нейрокомпьютеров. Сайт http://www.computer-museum.ru, 2005
4. Полисский Ю. Д. О выполнении сложных операций в системе остаточных классов // Электронное моделирование. – 2006. – Т.28. – № 3. – С. 117–123.

Поступила в редколлегию 09.02.07.