УДК 510.67+658.012

Д. В. ЗАЛІЗНЮК, А. В. ІЛЬМАН, В. М. ІЛЬМАН (ДІІТ)

ДИНАМІЧНІ ПРОЦЕСИ У ВІДКРИТИХ ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМАХ

Розглянуто зв’язану схему розвитку динамічних процесів у відкритих економічних системах за визначеною ієрархією, математично динамічна модель представляється системою диференційних рівнянь. Наведений приклад коливань активних засобів у відкритій відокремленій системі.

Рассмотрено связанную схему развития динамических процессов в открытых экономических системах при определенной иерархической зависимости, математически динамическая модель описывается системой дифференциальных уравнений. Приведен пример колебаний активных средств в открытой обособленной системе.

It is considered the concerned scheme of development of the dynamic processes in the opened economic systems at the certain hierarchical dependence, at the mathematics this dynamic process is describing as a system of the differentiable equations. There is an example of variations of the active resources at the opened isolated system.

Вступ

Аналіз економічної діяльності окремих підприємств різних форм власності у тому числі й залізничної галузі показує, що їх функціонування відбувається за складними законами стохастичної динаміки, які є невід’ємною частиною поведінки загальної економічної системи. Це обумовлено форс-мажорними обставинами та випадковими характеристиками взаємодій між елементами системи, тощо. Зрозуміло, що стохастична поведінка будь якої економічної системи пов’язана з критичними або особливими станами, в яких може опинитися система під впливом зовнішніх та внутрішніх чинників – параметрів. Наприклад, зміна податкового навантаження на виробничі підприємства, зміна ставок кредитування для вітчизняних резидентів, а також інші зміни внутрішніх та зовнішніх чинників системи можуть призвести до критичного стану − економічної доцільності існування виробництв або призвести до суттєвого зростання економічних показників резидентів. Але регулярна поведінка параметрів системи також може призводити до нерегулярної поведінки систем [1]. Тому при змінах чинників економічні системи її слід розглядати як параметричне сімейство з позицій стійкості коливання, хаосу та інше, тобто досліджувати їх поведінку навколо критичних станів або досліджувати структурну стійкість поведінки систем за їх штучно створеними моделями в залежності від змін параметрів системи.

Відомо, що динаміка розвитку економічних систем, супроводжується короткими циклами коливання, тривалістю 7−11 років, та глобальними циклами М. Д. Кондрат’єва, тривалістю 48−55 років. Виникає питання існування циклів коливання в окремих частково ізольованих економічних підсистемах: підприємствах, галузях, фірмах тощо. На позитивну відповідь відносно цього питання нам вказують раніше виконані дослідження про взаємодію елементів системи за двомірною нелінійною параметричною моделлю економічної динаміки [2]. За цими дослідженнями з’ясовано існування гістерезисних коливань між елементами економічних підсистем, що і дає можливість зробити відповідне припущення. Наведені нижче результати досліджень частково розглянуто в доповідях конференції [3].

Моделювання динаміки відокремленої економічної системи

Розглянемо деякий об’єкт загальної економічної системи держави: підприємство, галузь, тощо. На цей об’єкт будемо дивитися, як на відокремлену економічну підсистему S, яка пов’язана через свої вектори входів Q і виходів W з іншими об’єктами загальної системи. В свою чергу підсистема S, як білий ящик складається з підрозділів $\{s_1, s_2, ..., s_m\}$ − зв’язаних елементів. В загалі зв’язковість у системі S може бути досить великою і складною, тому подальше «безсистемне» моделювання на зв’язках системи приведе також до складних моделей. Спрощення зв’язковості у системі можна досягти завдяки наведенню певного порядку по зв’язках. Для цього скористуємося ієрархічною підпорядкованістю елементів s_i за деякою ознакою або метою. Крім того введення ознаки (мети) P призводе до напрямку дослідження системи, наприклад, для підприємства: виробнича, фінансова або інші види діяльності.

Тепер маємо можливість перейти до побудови економіко-математичної моделі M_P за обраною ознакою P. Клас динамічних моделей досить широкий і на даний момент його складно охопити, але досить поширені в цьому класі прості для застосування матричні моделі (дивися, наприклад, роботу [1]). У своїх дослідженнях ми будемо застосовувати інший підхід.

Нехай елементи системи S і зв'язки між ними ієрархічно підпорядковані за ознакою P так, що моделі орієнтованих зв'язків визначаються деякими неперервними функціями $\varphi_{ij}(s_i, s_j)$. Далі припустимо, що підрозділи s_i системи S характеризуються певними економічними показниками r_i, змінними в часі, і моделі $\varphi_{ij}(s_i, s_j)$ визначають інтенсивність змін показників r. Тоді в системі S відтворюється динамічний процес розповсюдження збурень показників $r_i(t)$ за вибраною ієрархією. Так як показник елемента s_i в момент часу $t+\Delta t$ залежить від значення цього ж показника в попередній момент часу і також залежить від інтенсивностей на зв'язках з суміжними елементами ієрархії, тому процес змін показника r_i елементу s_i на часі Δt можна записати наступним чином:

$$r_i(t+\Delta t) = r_i(t) + \sum_{j=1}^{k} \varphi_{ji}(s_j, s_i) z_j(t) \Delta t, \quad ; \qquad (1)$$
$$i = 1, 2, ..., m$$

де $z_j(t)$ − функція, яка враховує зміни показника r_j на суміжному до s_i елементі s_j; причому її значення, залежності від умов, може бути від'ємним або додатнім.

Від квантованої у часі моделі (1) можна перейти, при $\Delta t \to 0$, до моделі M_P розповсюдження збурень показників $r_i(t)$, $i = 1, 2, ..., m$ системи S

$$\frac{dr_i}{dt} = \sum_{j=1}^{k} \varphi_{ji}(s_j, s_i) z_j(t), \quad i = 1, 2, ..., m. \qquad (2)$$

Наприклад, для дворядної трьохрівневої ієрархічної системи визначеної на елементах $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$, які рознесені по трьох рівнях: до першого рівня s_4, s_5; до другого рівня s_2, s_3 та до третього рівня s_1 і між, якими маються зв'язки з інтенсивностями φ_{ji} за схемою зображеною на рис. 1, можна отримати наступну динамічну модель:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dr_1}{dt} = Q(t) + (\beta_1 - \varphi_{21}) z_2 + (\alpha_1 - \varphi_{31}) z_3 + \\
&+\beta_2 z_4 + \alpha_2 z_5, \\
&\frac{dr_2}{dt} = (\eta_1 \varphi_{21} - \beta_1) z_2 - \varphi_{42} z_4 - \varphi_{52} z_5, \\
&\frac{dr_3}{dt} = (\rho_1 \varphi_{31} - \alpha_1) z_3 - \varphi_{43} z_4 - \varphi_{53} z_5, \\
&\frac{dr_4}{dt} = (\eta_2 (\varphi_{42} + \varphi_{43} + \varphi_{45}) - \beta_2) z_4 - \\
&-\varphi_{54} z_5 - (1 - \beta_2) W_1, \\
&\frac{dr_5}{dt} = (\rho_2 (\varphi_{52} + \varphi_{53} + \varphi_{54}) - \alpha_2) z_5 - \\
&-\varphi_{45} z_4 - (1 - \alpha_2) W_2.
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

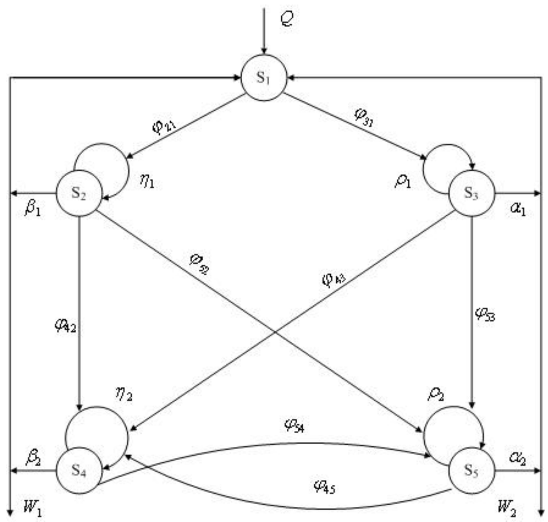

Рис. 1. Нелінійна ієрархічна схема міжелементних зв'язків

Де позначки петель на рис. 1 вказують на деяку швидкість переробки інтенсивностей відповідними елементами системи, а коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2 \le 1$ і $\beta_1, \beta_2 \le 1$ визначають частки відтоку значень показників r_i.

Вводячи у вирази (3) різні модифікації інтенсивностей зв'язків φ і збурень z можна отримати різноманітні моделі поведінки системи. Зрозуміло, що при значеннях часток відтоку $\alpha_2 = \beta_2 = 1$ виходи W_1, W_2 з системи неможливі. Отже маємо замкнену систему.

Дискретна модель поведінки системи (1) дозволяє, наприклад, виконати дослідження процесу збурення в будь який момент часу при відомих початкових значеннях показників $r_i(0)$ і збурень $z_i(0)$. Так, якщо інтенсивності φ_{ij} задати постійними елементами $a_{ij} = \varphi_{ij}$ деякої матриці A, то дослідити збурення у системі в цілі моменти часу можна за допомогою матричного підходу [1], за яким процес, що починається з елементу s_i розвивається за формулами:

$$\left.\begin{aligned} z_j(t) &= (A^t)_{ij}; \\ r_j(t) &= r_i(0) + (E + \sum_{k=1}^{t} A^k)_{ij}, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

де A^t – матриця в ступіні t, а $(A^t)_{ij}$ – її елемент $(\cdot)_{ij}$.

Якщо ж відомі функції інтенсивностей зв'язків $\varphi(t)$ і збурень $z(t)$, то процес збурення в системі можна дослідити за результатами розв'язку задачі Коші для звичайних диференційних рівнянь (2).

Звернемося тепер до питання стійкості поведінки економічних систем. Взагалі питання стійкості динамічних систем пов'язуюється зі стійкістю за Ляпуновим [4], тобто досліджують поведінку системи в часі під впливом малих змін початкових значень показників елементів системи. Але малі зміни показників свідчать про деяку «стабільність» в системі і не дають гарантії того, що економічна система в своїй стабільності не досягла деякої критичної межі, за якою, можливо, вона неспроможна функціонувати в загалі. Тому введемо деякі необхідні для подальшого визначення.

Визначення 1. Динамічну поведінку економічної системи, за якою економічний показник $r_i \geq 0$ стає меншим, ніж його критичне значення (межа) r_i^0 назвемо банкрутством системи S за цим показником.

Визначення 2. Систему S назвемо збанкрутілою, якщо її поведінка призведе до банкрутства системи за всіма її показниками r_i, $i = \overline{1,m}$.

Зрозуміло, щоб не допустити банкрутства системи необхідно щоб її поведінка не виходила за межі області $r_i > r_i^0 \geq 0$ Межа цієї області $r_i = r_i^0$ визначає межу банкрутства системи S. Таким чином динамічний процес поведінки системи в межах області $D = \{r_i;\, r_i > r_i^0,\, i = \overline{1,m}\}$ відповідає стійкості системи S за Лагранжем. Тому доцільно досліджувати процес розповсюдження збурень в економічних системах при таких значеннях параметрів системи, котрі б не призводили до виходу значень її показників на межу банкрутства або досліджувати вплив значень параметрів системи на процес виходу системи на межу банкрутства. Очевидно, дослідження систем за другим варіантом передбачає попереднє знання показників банкрутства r_i^0.

Перейдемо тепер до розгляду конкретного прикладу і розглянемо його за запропонованою схемою досліджень динамічних процесів в економічній системі.

Динаміка активних засобів у виділеній системі

Розглянемо просту динаміку активних засобів у деякій відокремленій системі S, яка складається з трьох елементів $\{s_0, s_1, s_2\}$, наприклад: s_0 – активні засоби, s_1 – ресурс і s_2 – активні операції. Припустимо, що зв'язки між елементами системи лінійні і представляються однорядною трьохрівневою ієрархічною схемою, як показано на рис. 2. Передбачається, що економічна система S інвестується з постійною інтенсивністю Q і відбір активних засобів із системи відбувається з інтенсивністю W.

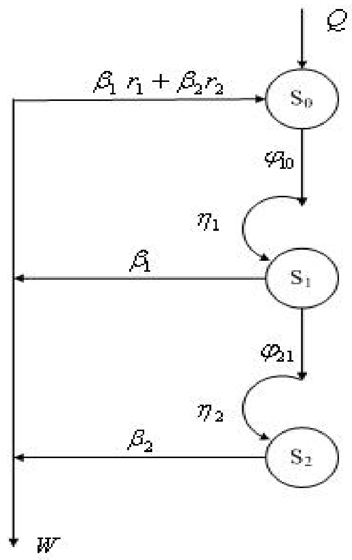

Рис. 2. Ієрархічна схема активних засобів.

Зрозуміло, що схема зображена на рис.2 є частковим випадком схеми представленої на рис.1, де для нашого випадку інтенсивність змін показників активів визначено наступним чином $\varphi_{10} = \varphi_{10}(r_0)$, $\varphi_{21} = \varphi_{21}(r_1)$ і збурення визначені на елементах s_1 та s_2 задані як $z_1 = r_1(t)$, $z_2 = r_2(t)$, а величини η_1, η_2 є коефіцієнтами переробки потоків активів відповідними елементами системи. Обернений зв'язок на схемі рис. 2 вказує на виведену частку активів, яка повертається в обіг системи.

Якщо через $\alpha \leq 1$ позначити долю активів в обороті системи, тоді частка грошових коштів, що вилучаються із обігу може бути підрахована за формулою:

$$W = (1-\alpha)(\beta_1 r_1 + \beta_2 r_2)\,.$$

Динамічну модель (3) за схемою рис. 2 тепер можливо переписати наступним чином:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr_0}{dt} &= Q - \varphi_{10} r_1 + \alpha(\beta_1 r_1 + \beta_2 r_2),\\ \frac{dr_1}{dt} &= (\eta_1 \varphi_{10} - \beta_1) r_1 - \varphi_{21} r_2,\\ \frac{dr_2}{dt} &= (\eta_2 \varphi_{21} - \beta_2) r_2. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Попередній аналіз моделі (5) показує, що система S нелінійна (інтенсивності φ залежать від грошових показників r) і замкнена при значеннях параметрів $\eta_1 = \eta_2 = 1$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$, $\alpha = 1$; $W = 0$, $Q = 0$. При значеннях параметрів $\eta_1, \eta_2 < 1$, та $\beta_1, \beta_2 < 1$ і $0 \le \alpha < 1$ система за рис. 2 відкрита.

У трьохмірному просторі показників (r_0, r_1, r_2) відкрита система за моделлю (5) має дві точки рівноваги (r_0^1, r_1^1, r_2^1) і (r_0^2, r_1^2, r_2^2), для яких: r_0^1 – знаходиться за розв'язком рівняння

$$\varphi_{10}(r_0^1) = \frac{\beta_1}{\eta_1}\,,$$

а $r_1^1 = \dfrac{Q\eta_1}{\beta_1(1-\alpha\eta_1)}$, і $r_2^1 = 0$;

r_0^2 – задовольняє наступному рівнянню:

$$\varphi_{10}(r_0^2) = \frac{Q + \alpha\beta_1 r_1^2}{(1-\alpha\eta_1\eta_2) r_1^2}\,,$$

r_1^2 – є розв'язком рівняння $\varphi_{21}(r_1^2) = \dfrac{\beta_2}{\eta_2}$ і останнє значення –

$$r_2^2 = \frac{\eta_2}{\beta_2}\,\frac{Q\eta_1 + (\alpha\eta_1(1-\eta_2) - 1)\beta_1 r_1^2}{1-\alpha\eta_1\eta_2}\,.$$

Динамічна система (5) визначена не менше як в п'ятимірному параметричному сімействі й її поведінка суттєво залежить від значень цих параметрів, так при інтенсивності φ_{21} меншій за відношення β_2/η_2 активні операції в системі знижуються.

Для подальшого параметричного аналізу поведінки системи виконаємо деякі перетворення в моделі (5).

Тому введемо такі позначення:

$$\beta_2 t = \tau,\ \frac{r_0}{Q}\beta_2 = x,\ \frac{r_1}{Q}\beta_2 = y \ \text{і}\ \frac{r_2}{Q}\beta_2 = z\,;$$

тоді система (5) в нових позначеннях прийме вигляд:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= 1 + \alpha z - \left(\frac{\varphi_{10}}{\beta_2} - \mu\alpha\right) y,\\ \frac{dy}{d\tau} &= \left(\eta_1 \frac{\varphi_{10}}{\beta_2} - \mu\right) y - \frac{\varphi_{21}}{\beta_2} z,\\ \frac{dz}{d\tau} &= \left(\eta_2 \frac{\varphi_{21}}{\beta_2} - 1\right) z; \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

де $\mu = \beta_1/\beta_2$.

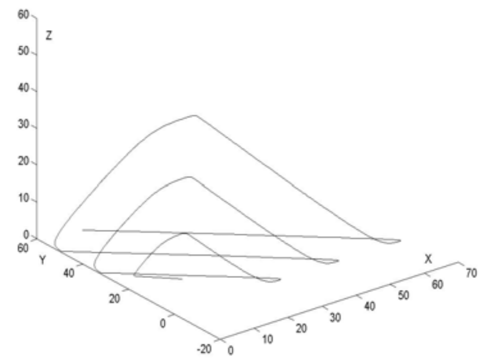

Рис. 3. Процес коливань в замкненій системі.

Далі система (6) досліджувалася чисельно, коли інтенсивності показників x і y задані експоненційно–стабілізуючими функціями [2].

Зокрема їх вибрано у такому вигляді

$$\frac{\varphi_{10}}{\beta_2} = d((a + a_1 x + a_2 x^2) e^{-\delta x} + 1);$$

$$\frac{\varphi_{21}}{\beta_2} = c((b + b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3) e^{-\gamma y} + 1).$$

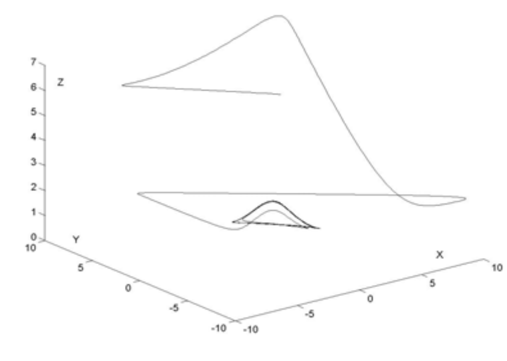

Рис. 4. Процес усталених коливань.

Наведемо деякі сценарії результатів досліджень за моделлю (5). На рис.3 наведена циклічна поведінка фазової траєкторії замкненої системи при $d = 5$, $a = -1$, $c = 1.8$, $b = -1$, $b_1 = \delta = \gamma = 1$ і $a_1 = a_2 = b_2 = b_3 = 0$; за якою маємо зростання активів по ресурсах і активним операціям.

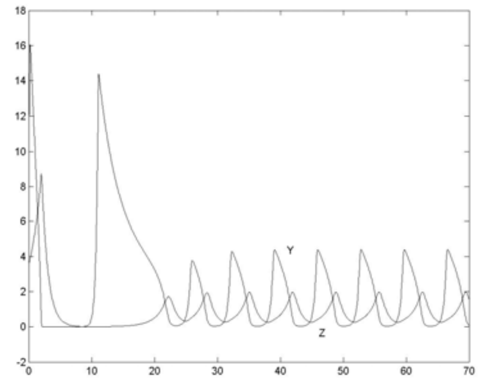

Рис. 5. Усталені коливання по показниках x, y .

На рис.4 і рис. 5 наведено динаміку поведінки частково відкритої системи при значеннях параметрів: $d = 5.1$, $a = -1$, $c = 2$, $b = -1$, $b_1 = \delta = \gamma = 1$, $\eta_1 = 0.9$, $\eta_2 = 0.8$, $\alpha = 0.85$, $\mu = 1.5$ і $a_1 = a_2 = b_2 = b_3 = 0$. Як видно з цих рисунків економічна система в часі стабілізується і в даній системі виникають періодичні коливання. При інших значеннях параметрів процес стабілізації може бути більш тривалим, типічна поведінка фазових траєкторій для таких випадків наведена на рис. 6.

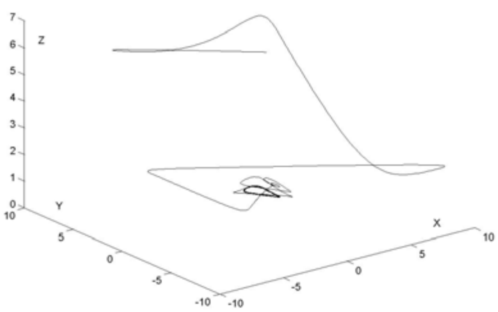

Рис. 6. Типічний процес коливань.

Висновки

Чисельний аналіз впливу параметрів економічної системи, за схемою зображеною на рис. 2, на її поведінку показав наступне:

1) зменшення значень коефіцієнтів переробки потоків активів призводе до зниження активних операцій в системі, при їх зниженні приблизно на п'ятдесят відсотків коливання в системі зникають, що призводе до банкрутства системи за показником активних операцій r_2;

2) відкрита економічна система досить чутлива до змін параметрів відтоку β_1 і β_2, так збільшення відтоку активів приблизно на п'ять – десять відсотків, в залежності від значень інших параметрів, знижує коливальні процеси в системі і може призвести до банкрутства системи по показниках ресурсів та активних операцій;

3) так як банкрутство в системі за показником r_2 відбувається з деяким запізненням, тому краще збільшувати відтік за параметром β_2, ніж за параметром β_1;

4) як правило, коливальний процес у відкритій системі спочатку відбувається хаотично, а потім через деякий час наближається до регулярного, але в системі може виникати коливання за схемою дивного атрактора, про що свідчить наявність у моделі (5) системи двох рівноважних станів;

5) коливання у замкненій економічній системі призводять до «розігріву» її активних засобів;

6) зникнення процесів коливання у відокремленій економічній системі під впливом внутрішніх параметрів призводе до часткового банкрутства або загального банкрутства системи.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Черемных Ю.Н. Анализ поведения троекторий динамики народнохозяйственных моделей. − М.: Наука, 1982.
2. Ільман А.В., Ільман В.М. Моделювання деяких особливостей поведінки економічних систем // Проблеми економіки транспорту: Матеріали п'ятої наук. конф. – Д.: ДНУЗТ, 2006. – С. 31-32.
3. Залізнюк Д.В., Ільман В.М. Моделювання коливань активних засобів у відкритих економічних системах. // Проблеми економіки транспорту: Матеріали шостої наук. конф. – Д.: ДНУЗТ, 2007. – С. 174.
4. Егоров А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 384 с.

Надійшла до редколегії 31.05.07.