УДК 629.45.016.56

П. А. ЯГОДА (ДИИТ)

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ КОНСТРУКЦИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ СОВРЕМЕННЫХ ПРОГРАММНЫХ КОМПЛЕКСОВ

На прикладі шкворневої балки пасажирського вагона вирішується задача оптимізації з допомогою системи просторового моделювання Solid Works з інтегрованим модулем кінцево-елементного аналізу Cosmos Works.

На примере шкворневой балки пассажирского вагона решается задача оптимизации с помощью системы пространственного моделирования Solid Works с интегрированным модулем конечно-элементного анализа Cosmos Works.

The task of optimization by the system of the spatial design Solid Works with the integrated module of the eventual-element analysis Cosmos Works decides on the example of pivot beam of passenger carriage

Одной из задач, которая стоит перед конструкторами подвижного состава железных дорог, является задача оптимизации конструкции основных несущих элементов. Поэтому выбор метода оптимизации является очень важным этапом предпроектных исследований.

Задачи оптимизации – это любые задачи, в которых необходимо найти экстремум функций или функционалов: локальные, глобальные или абсолютные на множествах, которые определяются некоторыми ограничениями (условиями) [1]. Для постановки задачи оптимизации строят математическую модель. В модель входят: выбор функции $f(x)$, что описывает процесс, область ее определения (в виде уравнений и неравенств), ограничения, которые накладываются на функцию, а также целевая функция, которую необходимо оптимизировать.

К наиболее простым и часто используемым методам решения задачи оптимизации относятся:

– метод деления отрезка пополам;

– метод золотого сечения;

– метод случайных испытаний (Монте-Карло);

классический метод Ньютона.

Ниже приведено краткое описание перечисленных методов. Подробно суть этих и других методов оптимизации изложена в [1–3].

Метод деления отрезка пополам

Простейшим методом минимизации функции одной переменной, не требующей вычисления производной, является метод деления отрезка пополам. Предполагается, что минимизируемая функция $J(u)$ унимодальна на отрезке $J(u)$. Поиск минимума $J(u)$ на $[a,b]$ начинается с выбора двух точек $u_1 = (a+b-\delta)/2$ и $u_1 = (a+b+\delta)/2$, где δ – постоянная, являющаяся параметром метода, $0<\delta<b-a$. Величина δ выбирается вычислителем и может определяться целесообразным количеством верных десятичных знаков при задании аргумента u. Точки u_1 и u_2 расположены симметрично на отрезке $[a,b]$ относительно его середины и при малых δ делят его почти пополам – этим и объясняется название метода. После выбора точек u_1 и u_2 вычисляются значения $J(u_1)$, $J(u_2)$ и сравниваются между собой. Если $J(u_1) \le J(u_2)$, то полагают $a_1 = a, b_1 = u_2$; если же $J(u_1) \ge J(u_2)$, то $a_1 = u_1, b_1 = b$. Так как $J(u)$ унимодальна на $[a,b]$, то, ясно, что отрезок $[a_1,b_1]$ имеет общую точку со множеством U^* точек минимума $J(u)$ на $[a,b]$ и его длина $b_1 - a_1 = \frac{(b-a-\delta)}{2} + \delta$.

Повторные вычисления производят до достижения необходимого уровня точности.

Метод золотого сечения

Данный метод минимизации унимодальной функции на отрезке, столь же простой, как метод деления отрезка пополам, но позволяет решить задачу с требуемой точностью при меньшем количестве вычислений значений функции.

Как известно, золотым сечением отрезка называется деление отрезка на две неравные части так, чтобы отношение длины всего отрезка к длине большей части равнялось отношению длины большей части к длине меньшей части отрезка. Золотое сечение отрезка $[a,b]$ производится двумя точками

$$u_1 = a + \\ +\left(3-\sqrt{5}\right)(b-a)/2 = a + 0{,}38196...(b-a)$$

и

$$u_2 = a + (\sqrt{5}-1)(b-a)/2 = a + 0{,}61803...(b-a),$$

расположенными сим-метрично относительно середины отрезка, причем

$$a < u_1 < u_2 < b,$$

$$(b-a)/(b-u_1) = \\ = (b-u_1)/(u_1-a) = (b-a)/(u_2-a) = \\ = 1{,}61803.$$

Точка u_1 в свою очередь производит золотое сечение отрезка $[a,u_2]$, а точка u_2 – отрезка $[u_1,b]$. Опираясь на это свойство золотого сечения можно предложить следующий метод минимизации унимодальной функции на отрезке $[a,b]$.

Положим $a_1 = a$, $b_1 = b$ на отрезке $[a_1,b_1]$ возьмем точки u_1, u_2 производящие золотое сечение, и вычислим значения $J(u_1)$, $J(u_2)$. Далее, если $J(u_1) \le J(u_2)$, то примем $a_2 = a_1$, $b_2 = u_2$, $u_2^* = u_1$; если же $J(u_1) > J(u_2)$, то $a_2 = u_1$, $b_2 = b_1$, $u_2^* = u_2$. Так как функция $J(u)$ унимодальна на $[a,b]$, то отрезок $[a_2,b_2]$ имеет хотя бы одну общую точку со множеством U^* точек минимума $J(u)$ на $[a,b]$. Кроме того,

$$b_2 - a_2 = \left(\sqrt{5}-1\right)(b-a)/2,$$

и весьма важно то, что внутри $[a_2,b_2]$ содержится точка u_2^* с вычисленным значением

$$J\left(u_2^*\right) = \min\left\{J(u_1); J(u_2)\right\},$$

которая производит золотое сечение отрезка $[a_2,b_2]$.

Число вычислений значений $J(u)$ ограничивается необходимой точностью.

Метод случайных испытаний (Монте-Карло)

Алгоритмы решения многоэкстремальных задач, которые относятся к классу методов случайных испытаний, характеризуются отсутствием каких-либо итераций локального спуска. При этом точка $x^{(k+1)}$ очередного испытания выбирается из соотношения $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \xi^{(k)}$, где $\xi^{(k)}$ – реализация случайного вектора, распределение вероятностей которого определяется конкретным типом алгоритма случайного поиска.

Характерной чертой таких алгоритмов является ограниченность нормы вектора $\xi^{(k)}$, то есть точка $x^{(k+1)}$ находится в сравнительно малом окружении точки $x^{(k)}$, и изменение свойств механизма порождения векторов $\xi^{(k)}$, в зависимости от результатов предыдущих испытаний (адаптация случайного поиска). Таким образом, последовательность $\left\{x^{(k)}\right\}$, которая генерируется по вышеприведенному соотношению, можно рассматривать как реализацию случайного процесса, которая при возрастании величины *k*, должна пересечься с заданным окружением точки глобального минимума. При чем желательно, чтобы алгоритм обеспечивал достаточно высокую вероятность нахождения точки $x^{(k)}$, начиная с некоторого шага k_0, в этом окружении. Последнее требование предусматривает существование такой вероятности.

Классический метод Ньютона

Если целевая функция $f(x)$ в задаче безусловной минимизации дважды непрерывно дифференцирована и частные производные первого и второго порядка определяются достаточно просто, то для нахождения решений этой задачи целесообразно применять методы минимизации, которые используют квадратичную часть разложения функции $f(x)$ в ряд Тейлора. Такие методы называют методами второго порядка. Они, как правило, являются более эффективными, чем градиентные методы. Это обуславливается тем, что квадратичная функция локально точнее аппроксимирует функцию $f(x)$, чем линейная.

Последовательность точек $x^{(0)}, x^{(1)}, ...x^{(k)}, ...$, которая генерируется по методу Ньютона, строится, исходя из следующих соображений.

Пусть функция $f(x)$ выпуклая и дважды дифференцирована на R^n. Тогда в окрестности точки $x^{(k)}$ имеет место выражение

$$f(x) = f(x^{(k)}) + \left\langle f'(x^{(k)}), x - x^{(k)} \right\rangle +$$
$$+\frac{1}{2}\left\langle f''(x^{(k)})(x - x^{(k)}), x - x^{(k)} \right\rangle +$$
$$+o\left(\left\| x - x^{(k)} \right\|^2\right),$$

где

$$x = (x_1, ..., x_n)^T, x^{(k)} = (x_1^{(k)}, ..., x_n^{(k)})^T,$$

$$f'\left(x^{(k)}\right) = \left(\frac{\partial f\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_n}\right)^T.$$

Для определения следующей точки $x^{(k+1)}$ итерационного процесса метода Ньютона целевую функцию $f(x)$ аппроксимируют квадратичной формой

$$f_k(x) = f(x^{(k)}) + \left\langle f'(x^{(k)}), x - x^{(k)} \right\rangle +$$
$$+\frac{1}{2}\left\langle f''(x^{(k)})(x - x^{(k)}), x - x^{(k)} \right\rangle.$$

Рассмотрим задачу оптимизации выпуклой функции $f_k(x)$ на R^n. Как известно такая функция имеет одну точку минимума, а необходимое и достаточное условие оптимальности для нее имеет вид

$$f_k'(x) = f'(x^{(k)}) + f''(x^{(k)})(x - x^{(k)}) = O_n.$$

Решив полученную систему линейных уравнений в матричном виде и приняв найденную точку минимума за $x^{(k+1)}$, имеем

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - (f''(x^{(k)}))^{-1} f'(x^{(k)}).$$

Это соотношение и выражает итерационный процесс метода Ньютона в его классической форме.

Таким образом, метод Ньютона является методом последовательного поиска точек минимума квадратичных аппроксимирующих функций.

Современный уровень развития ЭВМ позволяет решать задачи оптимизации настолько быстро, что основные затраты времени приходятся на создание математической модели, а разнообразные программные комплексы с удобным интуитивно понятным интерфейсом позволяют свести это время к минимуму.

Одним из таких комплексом является система пространственного моделирования Solid Works с интегрированным модулем конечно-элементного анализа Cosmos Works.

Для примера рассмотрим задачу оптимизации конструкции шкворневой балки пассажирского вагона (рис. 1).

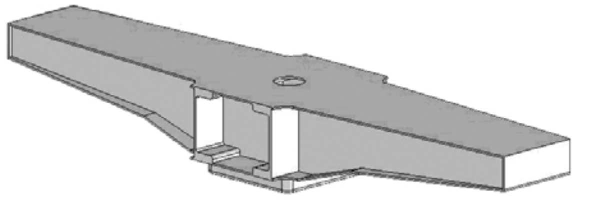

Рис. 1. Модель шкворневой балки вагона

Местами закрепления выбраны зоны скользунов и пятниковый узел (рис. 2).

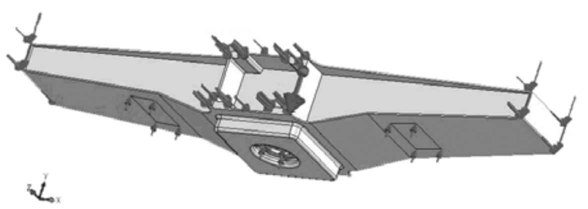

Рис. 2. Ограничения и нагрузки

Приложим следующие нагрузки (см. рис. 2):

- **в продольном направлении:**

– в зоне хребтовой балки – 175 т;
– по торцам (зона нижней обвязки) – 37,5 т;

- **в вертикальном направлении:**

– по торцам (зона нижней обвязки)– 8,7 т;
– собственный вес.

Нагрузки приблизительно соответствуют I-му расчетному режиму.

Следующим шагом является автоматическая разбивка на объемные конечные элементы. Пользователь может задавать размеры элементов, влияя тем самым на плотность сетки. Зададим свою сетку конечных элементов для рассматриваемой шкворневой балки пассажирского вагона (рис. 3).

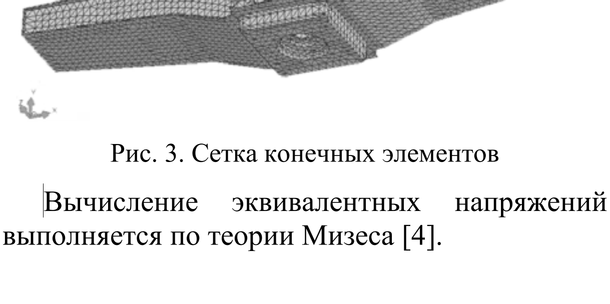

Рис. 3. Сетка конечных элементов

Вычисление эквивалентных напряжений выполняется по теории Мизеса [4].

Результаты расчета приведены на рис. 4. Поскольку максимальные напряжения превышают допустимые для Ст3, то ставится задача оптимизации конструкции шкворневой балки. Ограничением выступают максимальные эквивалентные напряжения. Задано значение 250 МПа. Параметрами для оптимизации являются толщины вертикальных и торцевых листов. Исходная толщина составляет 8 мм, максимальное увеличение толщины – 20 мм. Эти исходные данные нами задаются, как пользователями.

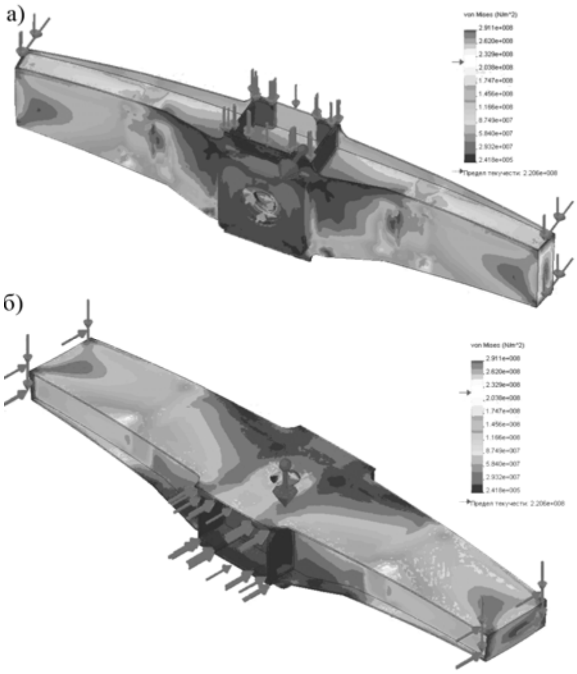

Рис. 4. Напряженно-деформированное состояние шкворневой балки:
а – вид снизу; *б* – вид сверху

После выполнения расчета выдаются рекомендуемые значения толщин листов: для вертикальных – 15,75 мм, для торцевых – 11,67 мм. Округляем значения до 16 мм и 12 мм соответственно, и производим статический расчет с новыми толщинами листов. Результат показан на рис. 5.

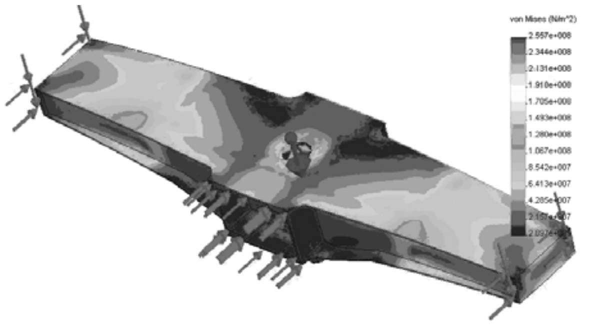

Рис. 5. Напряженно-деформированное состояние шкворневой балки после оптимизации

Максимальные напряжения практически соответствуют заданному значению 250 МПа. Последующие решения задачи оптимизации с откорректированными исходными данными позволит добиться желаемого результата.

Естественно, задачу оптимизации шкворневой балки пассажирского вагона правильно было бы решать, используя модель кузова. Но цель данного примера заключается в том, чтобы показать возможности современных программных комплексов, а не добиться конкретного результата при оптимизации конструкции. Поэтому, в результате выполнения расчетов подтверждается возможность применения стандартных пакетов прикладных программ для оптимизации конструкции основных несущих элементов пассажирских вагонов и кузова вцелом.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Овчинников П. П. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 2. – К.: Техніка, 2000. – 792 с.
2. Жалдак М. І. Основи теорії і методів оптимізації: Навчальний посібник. – Черкаси: Брама-Україна / М. І. Жалдак, Ю. В. Триус, 2005, – 608 с.
3. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980, – 520 с.
4. Алямовский А. А. Solid Works/ COSMOS Works. Инженерный анализ методом конечных элементов. – М.: ДМКПресс, 2004. – 432 с.

Поступила в редколлегию 31.05.2007.