УДК 517.518.2

А. А. БОСОВ (ДИИТ), Г. Н. КОДОЛА (УкрГХТУ), Л. Н. САВЧЕНКО (АИТ)

ВЕКТОРНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ПО ДВУМ ПОКАЗАТЕЛЯМ

Используя аналитическое представление конуса Парето, предложен алгоритм решения задачи векторной оптимизации.

Використовуючи аналітичне представлення конуса Парето, було запропоновано алгоритм вирішення задачі векторної оптимізації.

The algorithm of a problem multicriteria optimization decision is offered with using analytical representation Pareto cone.

В работе [1] Л. Эйлер указывал на то, что какую реальную задачу ни рассматривали рано или поздно приходим к задаче на максимум или минимум.

Математическая формулировка задач классической оптимизации представляет собой

$$f(x) \to \min$$

при условии

$$x \in X \subset E_n,$$

где E_n – n-мерное эвклидово пространство.

Постановка задачи в таком виде весьма общая.

Различные предположения о функции $f(x)$ и области допустимых значений X, позволяют рассматривать вопросы существования решения и методов его определения [2].

Однако, реальные задачи инженерной практики и экономики выдвигают задачи, которые в классическую схему не укладываются.

Основной чертой таких задач является разумное (рациональное) использование ресурсов.

Насколько рационально используются ресурсы, как правило, оценивается по нескольким показателям $f_i(x)$, $i=\overline{1,k}$, каждый из которых желательно сделать как можно меньшим при заданных ресурсах X.

Формальная запись таких задач представляет собой

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \to \min$$

при условии $x \in X$.

Польза от столь общей постановки только в том, что она позволяет делать задачи оптимизации обозримыми и сформулировать принятие решения.

Решение задач такого типа неоднозначно.

В математической литературе подобные задачи формулируются с использованием бинарных отношений [3,4].

Как критерий отбора вариантов для сформулированной задачи используется бинарное отношение Парето.

Изучению свойств такого рода задач посвящено множество литературы. Обратим внимание на работы [5-6], в которых представлен подробный обзор литературы о задачах векторной оптимизации, методах решения и изучению их свойств.

Обычно, методы векторной оптимизации сводятся к построению обобщенной целевой функции (AOF) [7]. Наиболее широко распространенный способ построения функции AOF в виде линейной (весовой) комбинации целевых функций. Существенным недостатком данного метода является определение весовых коэффициентов.

В работах [7-9] были получены необходимые условия для обобщенной функции цели (AOF), с помощью которой определяется полная Парето поверхность, используя один из следующих методов.

Широкое распространение нашел метод NBI (Normally Boundary Intersection) описанный в работе [10]. Однако, данный метод захватывает также и точки не оптимальные по Парето, а также локальные точки, которые требуют процедуры фильтрации. Новый метод NC (Normal Constraint), предложенный в работах [11-12] гарантирует полное представление Парето границы, хотя также может захватить точки не оптимальные по Парето, но делает это менее вероятно, чем метод NBI.

В данной работе будет предложен новый подход к построению Парето границы для решения задачи векторной оптимизации, который близок к изложенному в работах А. Мессака (A. Messac). Для удобства геометрической интерпретации рассмотрим задачу векторной оптимизации по двум показателям $f_1(x)$ и $f_2(x)$, $x \in R_n$. Каждый из показателей желательно сделать как можно меньше, формальная запись этого желания представляет собой

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \to \min ,$$

а на значение x накладывается условие

$$x \in X \subseteq R_n .$$

Полагая

$$y_1(x) = f_1(x) ;$$

$$y_2(x) = f_2(x) ,$$

получаем возможность отобразить множество X в множество $Y \subseteq R_2$ и исходную задачу сформулировать в виде

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \to \min \qquad (1)$$

при условии $y \in Y$.

Напомним, что решением задачи (1) является множество Y_*, такое что все его точки несравнимы по Парето.

Пусть $y_* \in Y_*$, а K – конус, вершина которого находится в точке y_*, причем для любого $y \in K$ выполняется условие

$$\begin{cases} y_1 \le u_1 \cdot t; \\ y_2 \le u_2 \cdot t, \end{cases}$$

где u_1, u_2 – компоненты единичного вектора u, такого что

$$\begin{cases} y_{1*} = u_1 \cdot t; \\ y_{2*} = u_2 \cdot t, \end{cases}$$

тогда имеет место

$$K \bigcap Y = \{y_*\} . \qquad (2)$$

Условие (2) является необходимым и достаточным, чтобы y_* принадлежало решению задачи (1).

Геометрическая интерпретация условия (2) дана на рис. 1.

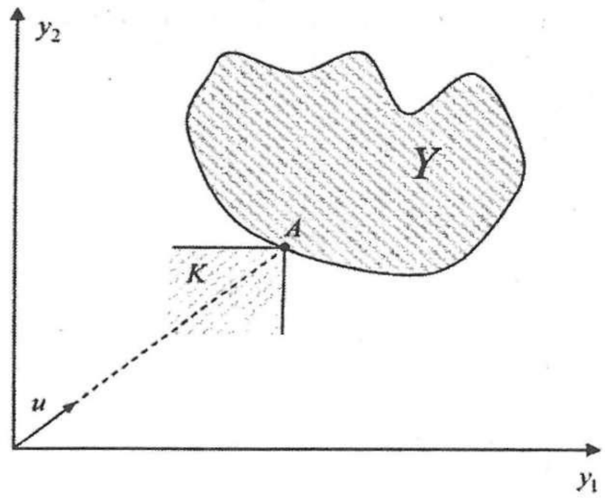

Рис. 1. Геометрическая интерпретация условия (2)

В дальнейшем будем предполагать, что множество Y задается следующим образом:

$$Y = \{y \in R_2 : h_i(y) \le 0, i = \overline{1,k}\}$$

Пусть $y(1)$ является решением задачи

$$y_1 \to \min ,$$

при условии $y \in Y$, а $y(2)$ при этом же условии является решением задачи

$$y_2 \to \min .$$

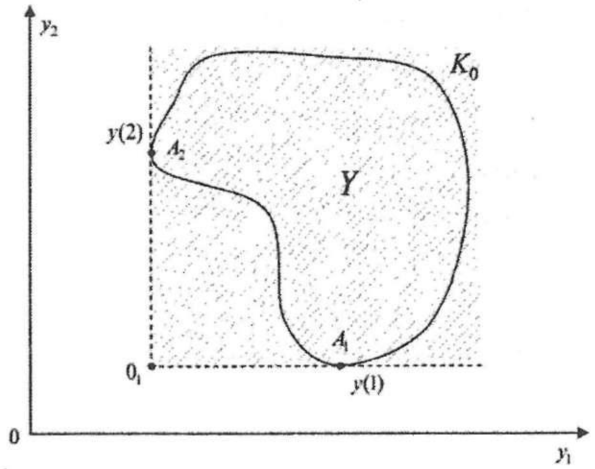

Рис. 2. Геометрическая интерпретация решения задач $y_1 \to \min$; $y_2 \to \min$

Далее перенесем начало координат в точку 0_1, в качестве осей возьмем $0_1 A_1$ и $0_1 A_2$, и тогда область $Y \in K_0$ (см. рис. 2). В этой системе координат имеет место представление «старых» координат через «новые» $\tilde{y}_1$ и $\tilde{y}_2$

$$\begin{cases} y_1 = \tilde{y}_1 + y(1); \\ y_2 = \tilde{y}_2 + y(2). \end{cases} \qquad (4)$$

Чтобы не загромождать обозначения вектор с компонентами $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ будем обозначать через (y_1, y_2), что эквивалентно допущению, смысл которого очевиден из рис. 3.

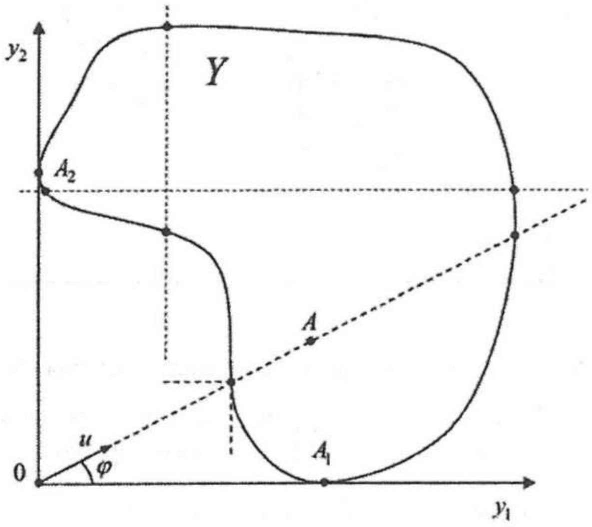

Рис. 3. Геометрическое представление области Y после преобразования (4)

Пусть вектор u имеет координаты

$$\begin{cases} u_1 = \cos\varphi, \\ u_2 = \sin\varphi, \end{cases} \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},$$

а точка A, лежащая на луче, порождаемым вектором u имеет координаты

$$\begin{cases} y_{1A} = u_1 \cdot t; \\ y_{2A} = u_2 \cdot t, \end{cases} \quad 0 \le t.$$

Введем функцию $H(y)$, определяемую по формуле

$$H(y) = \max_{1 \le i \le k} \{h_i(y)\}. \qquad (5)$$

Заметим, что имеет место

$$H(y) = \begin{cases} > 0, \text{ åñëè } y \notin Y; \\ < 0, \text{ åñëè } y \in Y; \\ = 0, \text{ åñëè } y \in \text{ ãðàí èöå } Y. \end{cases}$$

Задав угол φ рассмотрим задачу

$$L = t \to \min \qquad (A)$$

при условии

$$H(u \cdot t) = 0$$

Пусть t_* является решением задачи (A), тогда имеет место следующая теорема

Теорема. Если множество Y выпукло, то этого достаточно, чтобы точка $y = u \cdot t_*$ принадлежала Y_*.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$U(y_1, y_2) = \max\left\{\frac{y_1}{u_1}, \frac{y_2}{u_2}\right\},$$

тогда множество

$$U(y_1, y_2) \le t_*$$

представляет собой конус K, вершина которого находится в точке $y_{1*} = u_1 \cdot t_*$; $y_{2*} = u_2 \cdot t_*$ (см. рис. 3), находящейся на границе множества Y, а пересечение этого конуса с выпуклым множеством Y будет указанная точка, тогда в силу условия (2) получаем доказательство теоремы.

Заметим, что задача (A) позволяет определять точку y_* и для невыпуклой области Y, если она удовлетворяет условию, накладываемому на область, которое обозначим как условие B.

Суть условия B поясним, используя рис. 3.

1. Любая вертикальная линия, имеющая пересечения с границей Y имеет точку, у которой вторая компонента (y_2) минимальна и не превосходит вторую компоненту точки A_2.
2. Любая горизонтальная линия, имеющая пересечения с границей Y имеет точку, у которой первая компонента (y_1) минимальна и не превосходит первую компоненту точки A_1.

Или в математических терминах:

Пусть $\min y_2$ – минимальная вторая компонента точек пересечения вертикальной прямой с границей области Y, а $\min y_1$ – минимальная первая компонента точек пересечения горизонтальной прямой с границей области Y, тогда условие B можно сформулировать в виде

$$(\min y_1, \min y_2) \notin Y, \ (\min y_1, \min y_2) \in K_0 \qquad (B)$$

где конус K_0 содержит в себе область Y.

Линейная задача векторной оптимизации

Данная задача для двух показателей имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \to \min$$

при условии

$$Ay \le b\,;\; y \ge 0\,.$$

Так как область Y в данной постановке представляет собой выпуклое множество, то может быть применена теорема, и приходим к задаче типа (А).

$$L = t \to \min$$

$$Au \cdot t - b \le 0\,.$$

Так, например, когда ограничения представляют собой

$$\begin{aligned} &y_1 + y_2 \ge 5;\\ &y_1 + 3y_2 \ge 8;\\ &6y_1 + y_2 \ge 14;\\ &7y_1 + 4y_2 \le 39,\end{aligned}$$

и пополнив

$$\begin{aligned} &0 \le y_1 \le u_1 \cdot t;\\ &0 \le y_2 \le u_2 \cdot t,\end{aligned} \quad t \ge 0$$

при заданном векторе u приходим к обычной задаче линейного программирования.

Код программы для решения данной задачи в среде символьных вычислений Maple 7 будет следующим

```
>X:=array(1..1000, []);
>Y:= array(1..1000, []);
>k:=0:
>for x0 from 0.01 by 0.01 to 3.14/2 do
    k:=k+1:
    s:={y[1]+y[2]>=5,
    y[1]+3*y[2]>=8,
    6*y[1]+y[2]>=14,
    7*y[1]+4*y[2]<=39,
    y[1]<=cos(x0)*t,
    y[2]<=sin(x0)*t}:
    L:=minimize(L, s, NONNEGATIVE):
    for z in A do
      if op(1,z)<>t then
        if op(1,op(1,z))=1 then
X[k]:=op(2,z)
          else Y[k]:=op(2,z):
        end if:
      end if:
    end do:
  end do:
  >plot([X[j], Y[j], j=1..k], style=point, thick-
ness=3);
```

Результат работы этой программы представлен на рис. 4.

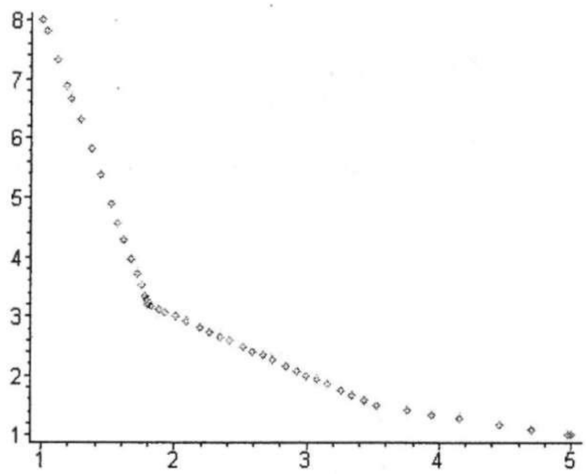

Рис. 4. Геометрическое представление работы программы решения задачи векторной оптимизации в линейной постановке

Как уже говорилось ранее, предложенный в данной работе метод построения Парето границы близок по подходу изложенному в работах А. Мессака (A. Messac). Так, например, в работе [11] сформулирована задача NBI, которая близка к задаче (А). основной идеей метода NBI является введение квази-нормального вектора n. В нашей задаче (А) введен вектор u, что позволяет строить конус K и пользоваться необходимым и достаточным условием (2).

В заключении приведем пример из работы [7], когда множество Y не является выпуклым, но удовлетворяет условию В.

Программа в среде Maple 7 решения данного примера имеет вид:

```
> X:=array(1..1000,[]);Y:=array(1..1000,[]);
> h[1]:=1-y[1]^2-y[2]^2/9;
> h[2]:=16-y[1]^4-y[2]^4;
> h[3]:=1-1/27*y[1]^3-y[2]^3;
```

$$h_1 := 1 - y_1^{\,2} - \frac{1}{9}y_2^{\,2}$$

$$h_2 := 16 - y_1^{\,4} - y_2^{\,4}$$

$$h_3 := 1 - \frac{1}{27}y_1^{\,3} - y_2^{\,3}$$

```
> H:=max(h[1], h[2], h[3]);
> k:=0:
> for x0 from 0.1 by 0.01 to 1.47 do
    k:=k+1:
    Hmax:=-10:
    for t from 0.01 by 0.01 to 10 do
      y[1]:=cos(x0)*t:
      y[2]:=sin(x0)*t:
      if H<0 and H>Hmax then
          Hmax:=H:
          tmin:=t:
      end if:
```

```
    end do:
    X[k]:=cos(x0)*tmin:
    Y[k]:=sin(x0)*tmin:
end do:
>plot([X[j], Y[j], j=1..k],style=line, thickness=3);
```

Результат работы данной программы представлен на рис. 5

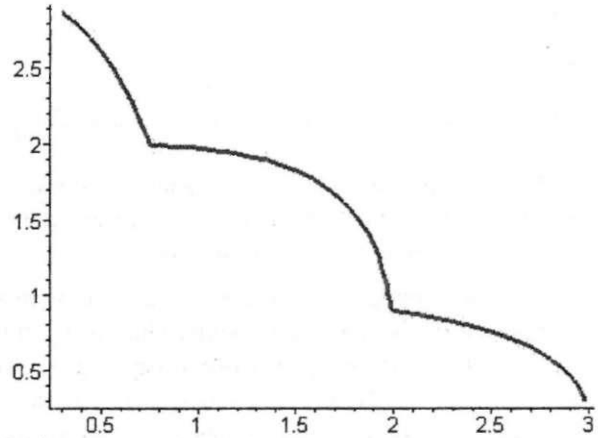

Рис. 5. Решение задачи векторной оптимизации из работы [7], с использованием задачи (А)

На основании изложенного можно сделать выводы:

- если множество Y удовлетворяет условию В, то определение множества Парето Y_* сводится к последовательности решения задач типа (А);
- если множество Y не удовлетворяет условию В, то решая последовательность задач (А), получим множество $\tilde{Y}$, которое содержит в себе Y_*.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Эйлер Л. Об определении движения брошенных тел в несопротивляющейся среде методом максимумов и минимумов: Вариационные принципы механики, под ред. Л. С. Полока. – М.: Из-во физико-математической литературы, 1959. – С. 31-40.
2. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980. – 518 с.
3. И. М. Макаров, Т. М. Виноградская, А. А. Рубчинский, В. Б. Соколов. Теория выбора и принятия решений. – М.: Наука, 1982. – 327 с.
4. Ногин В. Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. – М.: Физмат, 2002. – 144 с.
5. C. Mattson, A. Messac. Pareto Frontier Based Concept Selection Under Uncertainty, with Visualization. Springer – Special Issue on Multidisciplinary Design Optimization, Invited (refereed) Paper, OPTE: Optimization and Engineering, Vol. 6, No. 1, March 2005, pp. 85-115. http://www.rpi.edu/~messac/Publictions/messac_opte_pareto_con_sel.pdf.
6. S. V. Utyuzhnikov, P. Fantini, M. D. Guenov. A Method for Generating Well-Distributed Pareto Set in Nonlinear Multiobjective Optimization. – 2005. – 28 p. http://arxiv.org/abs/math/0512055.
7. A. Messac, E. Melachrinoudis, C. Sukam. Aggregate Objective Functions and Pareto Frontiers: Required Relationships and Practical Implications. – Optimization and Engineering Journal, Kluwer Publishers, Vol. 1, Issue 2, June 2000, pp. 171-188. http://www.rpi.edu/~messac/Publications/ relationships.pdf.
8. Messac, A., and Ismail-Yahaya, A., "Required Relationship between Objective Function and Pareto Frontier Orders: Practical Implications," AIAA Journal, Vol. 39, No. 11, 2001, pp. 2168-2174. http://www.rpi.edu/~messac/Publications/j-22.pdf.
9. Messac, A., Sundararaj, G. J., Tappeta, R. V., and Renaud, J. E., "Ability of Objective Functions to Generate Points on Non-Convex Pareto Frontiers," AIAA Journal, Vol. 38, No. 6, June 2000, pp. 1084-1091. http://www.rpi.edu/~messac/Publications/ pareto.pdf.
10. Das, I and Dennis, J. E., "Normal-Boundary Intersection: A New Method for Generating the Pareto Surface in Nonlinear Multicriteria Optimization Problems", SIAM Journal of Optimization, Vol. 8, No. 3, 1998, pp. 631–657. http://www.caam.rice.edu/ ~indra/Papers/NBIforSIOPT.ps.
11. Messac, A. and Mattson, C. A., "Normal Constraint Method with Guarantee of Even Representation of Complete Pareto Frontier," AIAA J., Vol. 42, No. 10, Oct. 2004, pp. 2101-2111. http://www.rpi.edu/~messac/Publications/messac-nc-guarantee-aiaaj.pdf
12. Messac, A., Ismail-Yahaya, A., and Mattson, C.A., "The Normalized Normal Constraint Method for Generating the Pareto Frontier," Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol. 25, No. 2, 2003, pp. 86-98. http://www.rpi.edu/~messac/ Publications/ messac_NNC-str_2002.pdf.

Поступила в редколлегию 31.05.2007.