

## РАЦИОНАЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ МАГНИТОЛЕВИТИРУЮЩЕГО ПОЕЗДА

Обґрунтована доцільність зсуву парадигми реалізації моделей руху динамічних систем у бік розв'язання їхньої зворотної задачі. Вказану парадигму розроблено для моделі руху магнітолевітуючого поїзда.

Обоснована целесообразность сдвига парадигмы реализации моделей движения динамических систем в сторону решения их обратной задачи. Указанная парадигма разработана для модели движения МЛП.

The expediency of dynamic systems motion models realization paradigm shift aside of their return problem decision is proved. The specified paradigm is developed for magnetic levitated train motion model.

Основная функциональная цель создания транспортных систем с магнітолевітуючими поездами (МЛП) – радикальная интенсификация пассажирских и грузовых потоков. Эксплуатационные скорости движения таких поездов экстремально высоки для наземного транспорта. Это, в свою очередь, делает проблему обеспечения высокого качества этого движения приоритетной среди всех иных, подлежащих решению при создании комплексов с МЛП. Упомянутое качество должно гарантированно обеспечиваться во всех принципиально возможных эксплуатационных режимах.

МЛП представляют собой весьма дорогостоящие, уникальные артефакты. Натурный эксперимент над ними во всей должной его полноте дорог, долог, опасен, а часто и вовсе невозможен. Обычные теоретические методы также мало эффективны при исследовании протекающих в них процессов. Исходя из этого, возможно большую часть указанных исследований следует выполнять с использованием математического моделирования [1], сочетающего в себе, как известно, многие достоинства как теоретических, так и экспериментальных методов. В то же время [2], в частности, вследствие упомянутой специфики МЛП, в качестве их расчетных схем принимаются сложные большие во многом существенно нелинейные динамические системы, а математическими моделями, адекватно описывающими их реальные эксплуатационные движения, являются большие сложные системы нелинейных дифференциальных уравнений. Конечные выражения их компонентов, как правило, чрезвычайно громоздки, сложны и трудно обозримы. Помимо того, на современном уровне развития теории дифференциальных уравнений, аналитическое решение указанного их вида является возможным лишь в простейших

случаях, как правило, не соответствующих реальным эксплуатационным ситуациям. В общем же случае, указанные уравнения допускают лишь численное решение.

Отмеченный приоритет проблемы качества движения МЛП требует, при её решении, не только значительного повышения полноты, адекватности и системности отражения в математических моделях структурно-параметрических особенностей поезда, но и подъёма уровня результирующих функциональных возможностей таких моделей. Дальнейшее наращивание, в рамках традиционного пути реализации – решения прямой задачи динамики системы, их размерностей и сложности ведёт к лавинообразному росту объёма и быстрому падению точности информационных преобразований моделирования.

При использовании упомянутого традиционного пути реализации модели движения МЛП – интегрировании уравнений такого движения – эта реализация носит предсказательно-констатирующий, чисто аналитический, не конструктивный характер и принципиально не может гарантировать достижение требуемого качества этого движения. В то же время, как отмечалось, такое гарантированное достижение является совершенно необходимым во всех реальных режимах эксплуатации МЛП.

Рациональное разрешение возникающей, таким образом, коллизии может быть найдено в смене парадигмы реализации модели движения МЛП на обладающую непосредственно-креативными, эвристическими свойствами, достигаемыми при решении обратной задачи динамики исследуемой системы.

В самом начале развития динамики, как науки о движении материальных систем, концепция обратной задачи этого раздела физики

была первоначально сформулирована и применена [3] для определения значений и направлений усилий, вызывающих реальные движения планет Солнечной системы в соответствии с законами Кеплера. Затем, однако, весьма продолжительное время приоритетные задачи развития производительных сил общества удовлетворялись, в основном, за счёт описания и предсказания движений (в широком смысле) исходя из свойств изучаемых систем, а также действующих на них естественных возмущений [4]. Иными словами, – путём решения прямой задачи динамики. Дальнейший прогресс в области как утилитарных, так и познавательных потребностей человечества привёл к необходимости всё более часто и полно [5...10] формулировать и решать задачу, качественно противоположную указанной. А именно – определять те свойства систем (параметры элементов и структуру их сопряжения), а также их управляющие принуждения, которые бы порождали, в общем случае, требуемые результирующие движения таких систем. Особую актуальность обратная задача динамики приобрела с развитием техники и вооружений [11...14].

На современном этапе дальнейший прогресс практически во всех областях цивилизации невозможен без использования всё более мощной и быстродействующей компьютерной техники. Но, несмотря на бурное развитие как аппаратного, так и программно-информационного её компонентов, решение актуальных задач динамических систем (во всех областях) с использованием концепций в основном прямой их задачи практически не реально [15]. Даже в случае относительно простых расчётных схем исследуемых систем, модели их естественной динамики чрезвычайно громоздки. Выражения коэффициентов их уравнений слабо обозримы. Приведение этих уравнений к нормальной форме Коши, чего требует традиционная – путём численного интегрирования этих уравнений – реализация таких моделей, крайне затруднено. Опережающий, прогнозный, многовариантный тип такой реализации – практически не реализуем не только на бортовых, но и на подавляющем большинстве стационарных компьютеров. Результат же этой реализации носит лишь констатирующий, не конструктивный характер и принципиально не может, как отмечалось, гарантировать требуемое результирующее качество движения системы.

Сдвиг парадигмы реализации той же модели в сторону решения, с её помощью, обратной задачи динамики системы радикально меняет ситуацию. Сама такая реализация становится несравненно

менее ресурсоёмкой, а осуществление её результатов позволяет гарантировать требуемое качество движения МЛП. При этом такая реализация модели обретает непосредственно-креативный, эвристический характер, не присущий традиционному пути её применения. Использование результатов такой её конструктивной реализации позволяет придать исследуемой системе весьма важное свойство грубости [16] а сама эта реализация становится возможной непосредственно в процессе управления движением МЛП – на бортовых компьютерах. Наконец, если тот же тип реализации модели сочетать с принципом управления поездом по обобщённым ускорениям, то, дополнительно к отмеченному, появляется возможность автоматического обеспечения свойства адаптивности его движения к обстановке [17]. По отношению к столь сложным, большим и разнородным по физической природе элементам системам, какими являются МЛП, отмеченное тем более актуально, особенно – с учётом свойства эмерджентности таких систем [18].

Исходя из изложенного, целью настоящей работы является разработка парадигмы рациональной реализации математической модели движения МЛП, свободной от отмеченных несовершенств (неизбежных при использовании традиционного способа такой реализации). Парадигма должна быть ориентирована на обеспечение возможности достижения максимально высокого (исходя из принимаемых критериев оценки) уровня качества результирующего движения системы, а также его приспособляемости к окружающей обстановке и, благодаря этому, позволять существенно облегчать процесс и усовершенствовать результат синтеза желательной управляемой динамики рассматриваемого поезда.

В качестве основы создаваемой парадигмы рациональной реализации математической модели движения МЛП примем концепцию обратной задачи динамики систем, свободную от указанных недостатков традиционного пути такой реализации [10] и, кроме того, обладающую рядом дополнительных положительных свойств [19].

Выполнение требуемых движений поезда в целом должно обеспечиваться во взаимодействии всех его подсистем. Среди них – механическая (МП), электромагнитная (ЭМП), аэродинамическая (АДП), термодинамическая (ТДП) и многие иные. Основными из них являются первые две. Но на качество реального движения МП МЛП, являющееся определяю-

щим критерием при глобальной оценке результирующей эффективности рассматриваемой транспортной технологии, влияние, в определённой степени, оказывает функционирование всех слагающих её компонентов.

Модель естественного движения МП МЛП в координатах  $\eta^\lambda \forall \lambda \in [1, L]$ , удобных для описания этого движения относительно направляющего его пути, может быть записана в виде [20]

$$c_{\lambda\mu} \cdot \ddot{\eta}^\mu + C_{\lambda,\mu\nu} \cdot \dot{\eta}^\mu \cdot \dot{\eta}^\nu = Y_\lambda \quad \forall \lambda, \mu, \nu \in [1, L], \quad (1)$$

где  $c_{\lambda\mu}, C_{\lambda,\mu\nu}, Y_\lambda \quad \forall \lambda, \mu, \nu \in [1, L]$  – ковариантный метрический тензор агрегата, являющегося расчётной схемой указанной подсистемы, его трёхиндексный символ Кристоффеля 1-го рода в координатах  $\eta^\lambda \forall \lambda \in [1, L]$ , а также обобщённые силы им соответствующие.

На текущие значения  $Y_\lambda \quad \forall \lambda \in [1, L]$  влияние оказывают все компоненты МЛП как единой системы.

Основными функциональными элементами ЭМП МЛП являются тяговый, левитационный, а также боковой стабилизации. Смыслом функционирования этой подсистемы является дозированный отбор энергии из питающей электрической сети, а также её преобразование в энергию парциальных движений МП поезда. В полной мере и с требуемым качеством указанные функции (дозированный отбор и электромеханическое преобразование энергии) ЭМП должны осуществляться в управляемых режимах движений МЛП. Построение же любого из таких движений, как известно, невозможно без описания функционирования МЛП как единой системы. Поэтому, в дополнение к модели (1) естественного движения МП, должно быть описано функционирование иных, значимых для его механического движения, компонент поезда. В первую очередь это относится к ЭМП МЛП.

Мерой взаимодействия электромагнитной и механической подсистем каждого  $j$ -го экипажа МЛП являются тяговое  $F_{Tj}$ , левитационное  $F_{Lj}$  и стабилизирующее его поперечные колебания, направляющее  $F_{Gj}$  усилия, а также усилие его электродинамического торможения  $F_{Dj}$ . Мгновенные значения указанных усилий могут быть определены согласно выражениям [21]:

$$f_{Tj} = \sum_{v=1}^K i_s^v \cdot \sum_{\kappa=1}^{N_{ac}} i_{ac}^\kappa \cdot \frac{\partial \mu_{v\kappa}}{\partial \xi}; \quad (2)$$

$$f_{Lj} = \sum_{v=1}^K i_s^v \cdot \sum_{\lambda=\chi_v-E}^{\chi_v+E} i_{wc}^\lambda \cdot \frac{\partial m_{v\lambda}}{\partial \zeta}; \quad (3)$$

$$f_{Gj} = \sum_{v=1}^K i_s^v \cdot \sum_{\lambda=\chi_v-E}^{\chi_v+E} i_{wc}^\lambda \cdot \frac{\partial m_{v\lambda}}{\partial \eta}; \quad (4)$$

$$f_{Dj} = \sum_{v=1}^K i_s^v \cdot \sum_{\lambda=\chi_v-E}^{\chi_v+E} i_{wc}^\lambda \cdot \frac{\partial m_{v\lambda}}{\partial \xi}, \quad (5)$$

где  $i_s^v$ ,  $K$  – мгновенное значение тока цепи в  $v$ -ого сверхпроводящего экипажного контура (СЭК), а также число таких контуров, установленных на экипаже;

$i_{ac}^\kappa, i_{wc}^\lambda$  – текущие значения токов в цепях  $\kappa$ -ой якорной катушки линейного синхронного двигателя (ЛСД) и  $\lambda$ -го короткозамкнутого путевого контура (КПК);

$N_{ac}$  – число катушек якорной обмотки ЛСД, взаимодействие с которыми ежесекундно учитывается для каждого СЭК;

$\chi_v$  – порядковый номер (считая от начала участка трассы, вдоль которого происходит движение МЛП, с учётом направления этого движения) последнего КПК, поперечную осевую линию которого миновала поперечная осевая линия  $v$ -го СЭК;

$E$  – половина числа КПК, с которыми, при любом текущем положении СЭК, учитывается его электромагнитное взаимодействие

$\mu_{v\kappa}, m_{v\lambda}$  – взаимные индуктивности между магнитной цепью  $v$ -го СЭК, а также соответственно цепями  $\kappa$ -ой якорной катушки и  $\lambda$ -го КПК;

$Q\xi\eta\zeta$  – путевой триэдр рассматриваемого экипажа МЛП.

Токи  $i_s^v \forall v \in [1, K]$ , с достаточной для практических целей точностью, могут считаться имеющими постоянные значения. Мгновенные же значения токов

$$\forall \lambda \in [(\chi_v - E), (\chi_v + E)], \quad v \in [1, K] \text{ и } i_{wc}^\lambda$$

$$\forall \zeta = \xi + 3 \cdot \sigma, \quad \xi \in [1, 3], \quad \sigma \in [1, (K_s - 1)] \quad (\text{где}$$

$$K_s \text{ – число триад якорных катушек, включённых в секцию статора ЛСД) а также величин}$$

$$\frac{\partial \mu_{v\kappa}}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial m_{v\lambda}}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial m_{v\lambda}}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial m_{v\lambda}}{\partial \xi} \quad \forall v \in [1, K],$$

$K \in [1, N_{ac}], \quad \lambda \in [(\chi_v - E), (\chi_v + E)]$  определяются динамическим взаимодействием МП и ЭМП МЛП.

Традиционная реализация модели движения МЛП предполагает, как известно, численное интегрирование описывающих это движение диффе-

ренциальных уравнений. При этом, с учётом изложенного, интегрированию, в общем случае, подлежит совокупность уравнений, описывающих динамику всех компонентов МЛП, или, по крайней мере, – наиболее значимых (для движения МП) из них. Последними, безусловно, являются МП и ЭМП. Но, даже их динамика описывается системами существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, число которых (при исследовании реальных движений МЛП) может исчисляться десятками и даже сотнями, а конечные выражения для определения значений элементов таких уравнений являются, как правило, весьма громоздкими. При этом решение прямой задачи динамики поезда предполагает, как известно, предварительное разрешение подлежащих интегрированию уравнений относительно старших производных. А это, в свою очередь, требует обращения матриц высокой размерности. Если учитывается параметрическая, и (или) структурная нестационарность исследуемой системы, то такое обращение должно производиться на каждом шаге интегрирования. В случае, если реализация модели предполагается непосредственно в процессе движения МЛП (то есть должна носить прогнозирующий, многовариантный характер), то её (такой реализации) осуществление становится вовсе не реальным. Но даже в случае, если использование построенной модели предполагается для поверочных расчётов в стационарных (не «бортовых») условиях, а система, принимаемая в качестве расчётной схемы МЛП, предполагается полностью стационарной, осуществление традиционного пути реализации описывающих движение уравнений сопряжено с большими, ни чем не оправданными временными, финансовыми и иными затратами. При этом, как отмечалось, лавинообразно растёт объём и катастрофически быстро падает точность информационных преобразований моделирования. Ситуация ещё более усугубляется тем обстоятельством, что результат решения прямой задачи динамики системы носит предсказательно-констатирующий, чисто аналитический, не конструктивный характер и принципиально не может гарантировать достижение требуемого качества изучаемого движения.

Реализация модели движения МЛП может быть радикально рационализирована сдвигом парадигмы такой реализации в сторону решения обратной задачи динамики исследуемой системы. Детализация постановки этой задачи, в каждом конкретном случае, зависит, в частности, от конкретных особенностей условий её решения, а также качеств, которые желательно придать реальному движению поезда. Однако,

глобальный стратегический смысл указанной задачи заключается, как известно [10, 22, 23], в следующем. Движение поезда под действием его естественных возмущений, описываемое соответствующими уравнениями, в подавляющем большинстве случаев не обладает желательными свойствами. В свою очередь, эти свойства определяют качество указанных движений и могут быть каким-либо удобным образом описаны, благодаря чему, – становятся доступными для использования. Чтобы реальное движение МЛП обладало упомянутыми свойствами, следует любым способом, не противоречащим объективным физическим законам, изменить моделирующие это движение уравнения так, чтобы они были совместны с описанием желательных свойств. Способ преобразования модели принципиально не ограничен и определяется, в основном, удобством натурной реализации влекомых им изменений исследуемой системы или (и) воздействий на неё. На практике, однако, наиболее распространённым является введение в модель движения аддитивных управляющих воздействий на систему.

С целью конкретизации рассмотрения, примем один из наиболее гибких и приемлемых для МЛП способ реализации его желаемого движения – терминальное управление им [24, 25]. Тогда задачей движения поезда считается его приведение к назначенным моментам времени в априорно заданную последовательность состояний, а на пространства фазовых координат, естественных возмущений и управлений накладываются реальные ограничения  $\Omega_x(t)$ ,  $\Omega_w(t)$  и  $\Omega_u(t)$  соответственно. В зависимости от целей и задач исследования, эти множества могут быть различно физически интерпретированы.

Исходя из модели (1) естественной динамики МП МЛП, в случае терминального управления им, модель управляемого движения этой подсистемы имеет вид

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), w(t), t] \forall t \in [t_s, \theta];$$

$$x(t_s) = x_s, \quad (6)$$

где  $x(t), u(t), w(t) \forall t \in [t_s, \theta]$  – векторы состояния подсистемы, а также управляющих и возмущающих воздействий на неё;

$t$  – удобная для проведения исследования независимая переменная, например, время;

$[t_s, \theta]$  – интервал построения движения;

$x_s$  – его начальные условия.

Цель движения поезда формализуем программой

$$x(\tau) = x_f, \quad (7)$$

где  $\tau, x_f$  – значения независимой переменной и вектора состояния МП МЛП в конечный, на рассматриваемом терминальном интервале управления, момент.

При этом, исходя из физического смысла процесса движения, должны быть соблюдены соотношения

$$x(t) \in \Omega_x(t), u(t) \in \Omega_u(t) \quad \forall t \in [t_s, \tau] \quad (8)$$

и, кроме того, известна некоторая априорная информация

$$w(t) \in \Omega_w(t) \quad \forall t \in [t_s, \tau]. \quad (9)$$

Программа (7) накладывает ограничение лишь на конечное (на интервале  $[t_s, \tau]$ ) состояние МП поезда. Поэтому моделью (6), совместно с условиями (7)–(9), определяется ансамбль фазовых траекторий изображающей точки подсистемы в пространстве её состояний

$$X[u(\bullet), w(\bullet), x_s, x_f] =$$

$$\{x[\bullet, u(\bullet), w(\bullet), x_s, x_f] \in \Omega_x(t) :$$

$$u(\bullet) \in \Omega_u(t), w(\bullet) \in \Omega_w(t), t \in [t_s, \tau]\};$$

$$u(\bullet) = \{u(t) \forall t \in [t_s, \tau]\};$$

$$w(\bullet) = \{w(t) \forall t \in [t_s, \tau]\};$$

$$\{x[\bullet, u(\bullet), w(\bullet), x_s, x_f] =$$

$$\{x[t, u(\bullet), w(\bullet), x_s, x_f] \forall t \in [t_s, \tau]\} \quad (10)$$

каждая из которых удовлетворяет краевым условиям

$$x(t_s) = x_s, \quad x(\tau) = x_f. \quad (11)$$

Если, помимо удовлетворения этих условий, к движению МП МЛП не предъявляется никаких иных требований, то управление ею синтезируется в чисто терминальной постановке, предполагающей, в зависимости от конкретных значений возмущений (9), возможность реализации любой траектории из ансамбля (10). Таким образом, в данном случае целенаправленное движение определено лишь с точностью до этого возможного ансамбля.

Из изложенного следует, что, при чисто терминальной постановке задачи поиска управления движением МП поезда, относительно его конкретной реализации имеется существенный конструктивный произвол. Он может быть использован для придания этому движению до-

полнительных полезных свойств. Например, если потребовать, чтобы, помимо удовлетворения условий (8) и (11), на реализуемой фазовой траектории подсистемы имело место соотношение

$$I = \inf_{u(\bullet)} \sup_{w(\bullet)} \left\{ \int_{t_s}^{\tau} \lambda[u(\bullet), w(\bullet)] \cdot dt : \right.$$

$$\left. u(\bullet) \in \Omega_u(t), w(\bullet) \in \Omega_w(t), t \in [t_s, \tau] \right\}, \quad (12)$$

где  $I$  – интегральный показатель качества управления;

$\lambda$  – заданная функция своих аргументов, то задача синтеза управления носит игровой минимаксный характер, базирующийся на концепции гарантированного результата [26]. При этом упомянутое управление приобретает свойства, оптимальные по критерию  $I$ , а из ансамбля (10) реализуется единственная траектория, экстремальная по этому критерию. Целенаправленное движение МП МЛП определено однозначно и гарантированно обладает оптимальностью в указанном смысле при любых возможных возмущениях. Такой подход позволяет, в зависимости от необходимости, в различных эксплуатационных режимах оптимизировать требуемые характеристики указанного движения.

Итак, путем классификации и параметризации обстановки, в которой происходит движение МП МЛП [26], а также построения для каждой типовой ситуации оптимального, в требуемом смысле, управления этим движением, может быть решена задача синтеза абстрактного разомкнутого [27] терминального целенаправленного его принуждения. Однако на практике при разработке конструктивных систем такого принуждения неизбежно возникает проблема необходимости одновременного удовлетворения совокупности инженерных требований, предъявляемых к качеству указанного движения. Одним из способов построения оптимального управления в этом случае является введение векторных критериев, состоящих каждый из ряда вторичных критериев, которым одновременно должно удовлетворять движение МП поезда.

Исполнительным органом, реализующим возникновение компонент управляющих воздействий  $u(t) \quad \forall t \in [t_s, \tau]$  на продольное движение МП МЛП, является, как отмечалось, ЛСД. Поэтому для реализации желаемого движения поезда, с использованием соотношений (2), а также тех, которые описывают динамику

ЭМП МЛП, могут быть определены рациональные диапазоны параметров ЛСД и их соотношений, а также требуемые законы (совместного, взаимоуязванного) изменения характеристик питающего его фазную якорную обмотку напряжения, необходимые для реализации соответствующего компонента синтезируемого  $u(t)$   $\forall t \in [t_s, \tau]$ . Такое определение, для его реализации, требует выполнения лишь операций алгебры матриц. Таким образом, ресурсоёмкость реализации модели движения, по сравнению с традиционным вариантом, радикально снижается.

Поскольку практически все компоненты управляющих воздействий на поезд неизбежно реализуются с ошибками, то и порождаемые ими движения отличаются от желательных. Поэтому, в дополнение к синтезу, программных составляющих упомянутых компонентов  $u(t)$   $\forall t \in [t_s, \tau]$ , должна решаться задача «замыкания» управления МЛП [27], состоящая в нахождении корректирующих принуждений системы, гасящих ошибки её движения по сравнению с желаемым.

Для синтеза как программных, так и корректирующих составляющих компонентов принуждений поезда принципиально возможным является использование различных представлений его желательных и фактически реализуемых движений [13, 14]. В то же время, при наличии такой возможности, целесообразным является [17] использование в алгоритмах такого синтеза обобщённых ускорений системы. В этом случае она приобретает свойство автоматической адаптации к обстановке движения.

Приведенная схема решения обратной задачи динамики МЛП свидетельствует о том, что, основанная на этом решении, разработанная парадигма реализации модели движения, свободна от несовершенств, неизбежных при использовании традиционного способа такой реализации. Она несравненно более ресурсно-экономична по сравнению с традиционной, а осуществление её результатов позволяет гарантировать требуемое качество движения поезда. В то же время, как отмечалось, такая реализация модели, в отличие от традиционной, имеет креативный, эвристический характер, использование её результатов позволяет придать исследуемой системе весьма важное свойство грубости, а сама эта реализация становится возможной непосредственно в процессе управления движением МЛП – на бортовых компьютерах. Кроме того, если в основу замыкания синтезированного управления

$u(t)$   $\forall t \in [t_s, \tau]$  будет положен принцип обработки обобщённых ускорений системы, то она автоматически обретает свойство адаптивности движения к обстановке. Благодаря всему этому, разработанная парадигма позволяет существенно облегчать процесс и усовершенствовать результат синтеза желательной управляемой динамики рассматриваемого поезда.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дзензерский В. А. Высокоскоростной магнитный транспорт с электродинамической левитацией / В. А. Дзензерский, В. И. Омеляненко, С. В. Васильев, В. И. Матин, С. А. Сергеев - К.: Наук. думка, 2001.
2. Дзензерский В. А. Некоторые вопросы математического моделирования левитационного движения электродинамических транспортных средств / В. А. Дзензерский, А. А. Зевин, Н. А. Радченко, Н. М. Хачапуридзе // Математическое моделирование в образовании, науке и промышленности: Сб. научн. трудов. СПб.: Санкт-Петербургское отделение МАН ВШ, 2000.
3. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. Собр. соч. А. Н. Крылова. – М.-Л.: Из-во АН СССР, 1936.
4. Динамика // Математическая энциклопедия. – М.: Сов. Энциклопедия, 1979.
5. Суслов Г. К. О силовой функции, допускающей данные интегралы. – К., 1890.
6. Мещерский И. В. Динамика точки переменной массы. – СПб: 1897.
7. Bertrand M. J. Theoreme relatif au mouvement d'un point attire vers un centre fixe // Comptes Rendus – 1873. – V. 77.
8. Жуковский Н. Е. Определение силовой функции по данному семейству траекторий. Собр. соч. Т. 1. – М.-Л.: Гостехиздат, 1948.
9. Аппель П. А. Теоретическая механика. Т. 1, 2. – М.: Физматгиз, 1960.
10. Галиуллин А. С. Аналитическая динамика. – М.: Высшая школа, 1989.
11. Космодемьянский И. В. Экстремальные задачи для точки переменной массы // ДАН СССР. – 1946. Т. 53, № 1.
12. Космодемьянский А. А. Лекции по механике тел переменной массы // Уч. Зап. МГУ. 1951. Т. IV. Вып. 154.
13. Охочимский Д. Е. К теории движения ракет // ПММ. – 1946. Т. X. Вып. 3.
14. Воробьев Л. М. К теории полёта реактивных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1979.
15. Величенко В. В. Матрично-геометрические методы в механике с приложениями к задачам робототехники. – М.: Наука, 1988.
16. Крутько П. Д. Обратные задачи динамики управляемых систем: Линейные модели. – М.: Наука, 1987.

17. Крутько П. Д. Обратные задачи динамики управляемых систем: Нелинейные модели. – М.: Наука, 1988.
18. Перегудов Ф. И. Введение в системный анализ / Ф. И. Перегудов, Ф. П. Тарасенко. – М.: Высш. шк., 1989.
19. Джоэл Баркер Парадигмы мышления: Как увидеть новое и преуспеть в изменяющемся мире. – М.: Альпина Бизнес Букс, 2007.
20. Поляков В. А. Моделирование относительного движения магнитолевитирующего поезда / В. А. Поляков, Н. М. Хачапуридзе // Вісник Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. В. Лазаряна. Вип. 14 – Д.: ДПТ, 2007.
21. Исследования и разработки в области создания магнитолевитирующих транспортных систем и модулей бортового энергообеспечения. Разработки и исследования в области динамики левитирующего транспорта на электродинамическом подвесе (заключительный). Отчёт о НИР. Институт транспортных систем и технологий НАН Украины. - Д., 2005.
22. Берёзкин Е. Н. Курс теоретической механики. – М.: Из-во МГУ, 1974.
23. Корнев Г. В. Основы механики целенаправленного движения. – М.: Наука, 1980.
24. Bellman R. Adaptive control processes. – Princeton Univ. press, 1961.
25. Matthews M. V., Steeg C. W. Terminal controller synthesis. – MIT. Rep., 1955, Nov. 4, № 55 – 272.
26. Поляков В. А. Приспособляемость движения железнодорожного поезда // Динамика поезда и подвижного состава железных дорог: Межвуз. сб. научн. тр. - Д.: ДИИТ, 1990.
27. Блохин Е. П. Целенаправленное движение железнодорожного поезда / Е. П. Блохин, В. А. Поляков // Нагруженность и надёжность механических систем: Сб. научн. тр. – К.: Наук. думка, 1987. С. 76-83.

Надійшла до редколегії 25.09.07