УДК 629.4

Н. А. ЛОШКАРЁВ (ПГАСА)

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ ТЕОРЕМЫ О СУММЕ ЦЕЛЫХ СТЕПЕНЕЙ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ МЕТОДОМ КОЭФФИЦИЕНТОВ КРАТНОСТИ

У роботі виконаний аналіз ефективності доведення загальної теореми про неможливість представлення суми будь-яких ступенів незалежних цілих чисел одним числом того ж ступеня методом використання невизначених взаємно обумовлених коефіцієнтів кратності.

В работе выполнен анализ эффективности доказательства общей теоремы о невозможности представления суммы любых степеней независимых целых чисел одним числом той же степени методом использования неопределённых взаимно обусловленных коэффициентов кратности.

The analysis of efficiency of proof of general theorem is in-process executed about impossibility of presentation of sum of any degrees of independent integers by one number of that degree by the method of the use of the indefinite mutually conditioned coefficients of multipleness.

В работах [1, 2] изложены доказательства невозможности решения диофантова уравнения для любой суммы целочисленных степеней (больших 1) в целых числах. Целью данной работы является сравнение эффективности разных стратегий доказательств использованного в них метода применения неопределённых коэффициентов кратности свободных членов алгебраических уравнений вида

$$x^r = \sum_1^n a_i x_i^{r-i} \qquad (1)$$

так, что коэффициенты кратности удовлетворяют условию: $a_n = K \cdot x$. Если такие уравнения разрешаются в целых числах при целых a_i, то K могут быть только числами целыми.

В [1] это соображение применено для доказательства «великой теоремы Ферма», являющейся частным случаем уравнения:

$$Y^r = \sum_1^n x_i^r \qquad (2)$$

при $n = 2$.

Следуя традиции, три целых числа в этом уравнении представляются далее в виде: x, $(x+a)$ и $(x+b)$, так что решается уравнение:

$$x^r = (b^r - a^r) + \sum_1^{r-1} C_r^i x^{r-i}(b^i - a^i).$$

В [1] показано, что полагая $K \cdot x = (b-a)$, получаем уравнение:

$$\left[1 + \frac{b \cdot K}{(b^r - a^r)}\right]^r - \left[1 + \frac{a \cdot K}{(b^r - a^r)}\right]^r = 1. \qquad (3)$$

То есть такое, в котором разность дробных чисел в любой положительной целой степени, большей 1, если a и b не являются функцией некоего целого числа k, возможна единичной только при K, не являющегося числом рациональным. В самом деле, представив предыдущее уравнение в виде

$$K^r = (b^r - a^r)^{r-1} - \sum_1^{r-1} C_r^i K^i (b^i - a^i) \cdot (b^r - a^r)^{r-1-i}$$

а, положив в нём $mK = (b^r - a^r)^{r-1}$ и разрешая его относительно m, получаем :

$$m = \frac{K^{r-1}}{\left[1 - \sum_1^{r-1} C_r^i K^i (b^i - a^i) \cdot (b^r - a^r)^{-i}\right]}. \qquad (4)$$

Следует заметить, что по недосмотру автора, уравнения (6) и (7) в [1] верны лишь для $r = 3$, то есть частный случай, уравнения приведенного выше. Поскольку в [1] не приведено доказательство невозможности целочисленного m, полагаем уместным привести его здесь. Итак, в уравнении (4) с дробным знаменателем целочисленное m предполагает его в виде чистой дроби, и после приведения этой дроби к общему знаменателю, равном $(b^r - a^r)^{r-1}$ имеем условное уравнение:

$$(b^r - a^r)^{r-1} - \sum_1^{r-2} C_r^i K^i (b^i - a^i) \cdot (b^r - a^r)^{r-i} +$$

$$+r \cdot K^{r-1}(b^{r-1}-a^{r-1})$$

или, что то же самое

$$m=\sum_{1}^{r-1} C_r^i K^{i-1}(b^i-a^i)\cdot(b^r-a^r)^{r-i}+\frac{1}{K}$$

так что m есть смешанная дробь при целочисленных K, a и b в явном противоречии с исходными условиями. В работе [2] та же методика доказательства невозможности решения в целых числах диофантова уравнения (2) проведена в решении его после представления левой части в виде очевидного условия, что она больше наибольшего из слагаемых правой части на величину δ, которая может быть равной единице. Из условий введения коэффициентов кратности K и m вытекает, что при $\delta=1$ наибольшее значение в сумме величин правой части уравнения (2) тоже равно 1. То есть, что уравнение (2) общего вида с независимыми и неравными слагаемого решения в целых числах не имеет. Упростить процедуру доказательства этого утверждения можно, представив левую часть уравнения (2) в виде предельно простом: $(1+\delta)$. В таком случае в уравнении, связывающем левую и правую части (2), переписанном в виде:

$$\sum_{1}^{r} C_r^i \delta^i=\sum_{1}^{n} x_i^r-1$$

$K\delta$ равно уменьшенной на 1 правой части, а $m\delta=K-r$. В соответствии с этим и коэффициент m определяется предельно простым уравнением

$$m=\frac{\delta^{r-2}}{\left[1-\sum_{1}^{r-1} C_r^j \delta^{j-1}(K-r)^{-1}\right]},$$

а условие получения чистой дроби знаменателе будет:

$$(K-r)-\sum C_r^i \delta^i-1=0$$

или, что то же самое:

$$\frac{1}{\delta}\left(\sum_{1}^{n} x_i^r-r\right)-\sum_{r}^{r-1} C_r^j \delta^{j-1}-1=0 .$$

Далее получаем уравнение, в котором $\delta=1$

$$\sum_{1}^{n} x_i^r-\sum_{0}^{r} C_r^j \delta^j+\delta^r-\delta=0 .$$

Тем самым наиболее рациональным, из опубликованных в [1] и [2] способов выяснено, что уравнение (2) допускает решение в целых числах, только если все слагаемые в нём единичны, в общем случае, когда сумма т. е. число слагаемых n равно степени r целого числа. Логическое предположение о том, что любая сумма всех целочисленных степеней (больших 1) независимых (неодинаковых) целых чисел не может быть выражена одним числом той же степени получает подтверждение в результате довольно краткого алгебраического доказательства.

БІБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лошкарёв Н. А. «Попытка реконструкции доказательства П. Ферма «великой теоремы». Вісник ДІІТу. – Д.: ДИИТ, - 2007. Вып. 15. – С. 61-63.

2. Лошкарёв Н. А. Обобщение «великой теоремы Ферма на сумму степеней независимых и неодинаковых целых чисел». Вісник ДІІТу. – Д.: ДИИТ, - 2007. Вып. 16. - С. 66-67.

Поступила в редакцию 27.09.2007.