УДК 519.6(075.8)

В. В. ЛАГУТА (ДИИТ)

МЕТОД ИТЕРАЦИИ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С НЕЛИНЕЙНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Запропоновано чисельний метод вирішення першої граничної задачі з нелінійним звичайним диференціальним рівнянням другого порядку. Задача зводиться до вирішення системи з двох інтегральних рівнянь з використанням функції Гріна. Система розв'язується методом Пікара.

Предложен численный метод решения первой краевой задачи с нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка. Исходная задача сводится к решению системы из двух интегральных уравнений с использованием функции Грина. Система решается методом Пикара.

The numerical method of the decision of the first boundery problem with the nonlinear ordinary differential equation of the second order is offered. The initial problem is reduced to the decision of the two integrated equations with use Green's function. The system is solved Picard's method.

К краевым задачам сводятся многие задачи механики, электродинамики, задачи теории управления, задачи рационального проектирования железнодорожных кривых. В первой краевой задаче значение искомой функции задается в двух точках, ограничивающих отрезок, на котором требуется определить решение. В общем случае краевая задача может быть нелинейной. Для решения нелинейной краевой задачи существуют удобные и эффективные методы.

Двухточечные краевые задачи обычно решаются с помощью следующих методов:

- аналитические методы [1, 2];
- метод стрельб и прогонки [1, 2, 3];
- линеаризация нелинейной задачи [4, 5];
- методы квазилинеаризации [6, 7, 8];
- сведение краевой задачи к задаче Коши [9];
- разностные методы [10, 11].

Выбор того или иного метода зависит от конкретного дифференциального уравнения. Общий обзор с классификацией нелинейных задач наиболее полно был проведен Карманом [12]. Среди последних публикаций посвященных исследованию решений дифференциальных уравнений следует отнести работы [13, 14].

Рассмотрим первую краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка с однородными граничными условиями

$$u'' = f(s,u,u'),\ u(a)=0,\ u(b)=0 \qquad (1)$$

и построим приближенное решение в классе функций C^2. Допустим, что выполнены условия существования решения нелинейной краевой задачи [15], которое может быть получено последовательными приближениями [16]

$$u''_p = f(s,u_{p-1},u'_{p-1}),\ p=1,2\dots . \qquad (2)$$

Каждое решение u_p должно удовлетворять краевым условиям (1). Предел последовательности решений u_p будет приближенным решением исходной задачи.

От задачи (1) перейдем к интегральному уравнению. Пусть отрезок интегрирования $[a,b]$ приведен заменой переменой $t=\dfrac{s-a}{b-a}$ к единичному интервалу $0 \le t \le 1$. Функция $u(t)$, удовлетворяющая граничным условиям

$$u(0)=0,\ u(1)=0, \qquad (3)$$

может быть представлена в виде [16]

$$u(t)=\int_0^1 G(t,\xi)u''(\xi)d\xi, \qquad (4)$$

где $G(t,\xi)$ ядро интегрального уравнения − функция Грина. Выбор функции Грина обусловлен однородными граничными условиями и аналогичен [16]

$$G(t,\xi)=\begin{cases}\xi(t-1), & 0\le\xi\le t,\\ t(\xi-1), & t<\xi\le 1.\end{cases}$$

Подставим в (4) выражение $u''=f(t,u,u')$, получим

$$u(t)=\int_0^1 G(t,\xi)f(\xi,u,u')d\xi\,. \qquad (5)$$

Определим производную $u'(t)$

$$u'(t)=\int_0^1 G'(t,\xi)\, f(\xi,u,u')d\xi\,, \qquad (6)$$

где

$$G'(t,\xi)=\begin{cases}\xi, & 0\le\xi\le t,\\ \xi-1, & t<\xi\le 1.\end{cases}$$

Уравнения (5), (6) образуют систему двух интегральных уравнений с двумя неизвестными функциями $u(t)$ и $u'(t)$. Это отличает данную задачу от аналогичной рассмотренной в [16, стр.152], в которой правая часть зависит только от неизвестной функции $u(t)$. Последовательные приближения $u(t)_p$ определяются следующими интегральными уравнениями

$$u(t)_p=\int_0^1 G(t,\xi)\, f(\xi,u_{p-1},u'_{p-1})d\xi\,, \qquad (7)$$

$$u'(t)_p=\int_0^1 G'(t,\xi)\, f(\xi,u_{p-1},u'_{p-1})d\xi\,,\ p=1,2...\ .(8)$$

В качестве начального приближения возьмем функцию $u_0(t)=0$, первое приближение производной также будет $u'_0(t)=0$. Текущее приближение определяется соответствующим интегралом. Однородные граничные условия выполняются на каждом шаге поскольку $G(0,\xi)=G(1,\xi)$.

Аппроксимируем вторую производную искомой функции $u''=f(t,u,u')$ кусочно-линейной функцией F, звенья которой соединяются в узлах сетки $\{t_i\}$ на отрезке [0,1]. Приближенное решение в этом случае получится в виде кубического сплайна $\tilde u(t)$. Подобный подход реализован в [17] для решения нелинейных интегральных уравнений Вольтерра и описан в [16].

Введем на отрезке интегрирования регулярную сетку $\{t_i\}$, $i=\overline{0,n}$

$$t_i=i\cdot h,\ \ i=\overline{0,n}\,.$$

В выражениях (7), (8) заменим вторую производную

$$u''=f(t,u_{p-1}(t),u'_{p-1}(t))$$

кусочно-линейной функцией с вершинами в узлах сетки t_i

$$F^p(t)=f_{i-1}^{p-1}+\frac{f_i^{p-1}-f_{i-1}^{p-1}}{t_i-t_{i-1}}(t-t_{i-1})\,,$$

$$t_{i-1}\le t\le t_i,\ \ i=\overline{1,n}\,, \qquad (9)$$

где индекс p вверху обозначает номер итерации (приближения) и $f_i^{p-1}=f(t_i,u_i^{p-1},u_i'^{\,p-1})$, $u_i^{p-1}=u^{p-1}(t_i)$, $u_i'^{\,p-1}=u'^{\,p-1}(t_i)$, $p=1,2,\ldots$.

Положив в (7) и (8) $t=t_i$, вычислим интегралы на отрезках $\left[t_{j-1},t_j\right]$, получим

$$u_i^p=(i-n)\frac{h^3}{6}\sum_{j=1}^{i}\left[(3j-2)\,f_{j-1}^{p-1}+(3j-1)\,f_j^{p-1}\right]-$$

$$-i\frac{h^3}{6}\sum_{j=i+1}^{n}\left[(3n-3j+2)\,f_{j-1}^{p-1}+(3n-3j+1)\,f_j^{p-1}\right],\ i=\overline{1,n-1}\,, (10)$$

и $$u_i'^{\,p}=\frac{h^2}{6}\sum_{j=1}^{i}\left[(3j-2)\,f_{j-1}^{p-1}+(3j-1)\,f_j^{p-1}\right]-$$

$$-\frac{h^2}{6}\sum_{j=i+1}^{n}\left[\left(3n-3j+2\right)f_{j-1}^{p-1}+\left(3n-3j+1\right)f_j^{p-1}\right],\ i=\overline{0,n}\ , (11)$$

где $f_j^0=f(t_j,u_j^0,u_j'^{\,0})$, $u_j^0=0$, $u_j'^{\,0}=0$, $j=\overline{0,n}$, $p=0,1,2,\ldots$.

Построение решения исходной задачи эквивалентно решению двух нелинейных уравнений методом итерации решения нелинейных уравнений [16]. Сходимость метода приближений обеспечивается выполнением теоремы существования решения и требованиями сходимости метода Пикара [18]. Приближение, удовлетворяющее необходимой точности, примем за искомое решение. Решением в узлах сетки будет $\tilde u_i=\tilde u(t_i)$. Решение $\tilde u(t)$ определяется по формуле (6) в любой точке отрезка интегрирования $\left[0,1\right]$. Вычислив соответствующие интегралы, на подынтервалах $\left[t_{j-1},t_j\right]$, получим

$$\tilde{u}(t)=(t-1)\frac{h^3}{6}\sum_{\substack{j=1\\(i\ge 1)}}^{i}\Big[(3j-2)f_{j-1}+(3j-1)f_j\Big]+(t-1)\int_{t_i}^{t}\xi F_i(\xi)d\xi+t\int_{t}^{t_{i-n}}(\xi-1)F_i(\xi)d\xi-$$

$$-t\frac{h^3}{6}\sum_{\substack{j=i+2\\(i<n-1)}}^{n}\Big[(3n-3j+2)f_{j-1}+(3n-3j+1)f_j\Big],\ t_i\le t\le t_{i+1},\quad i=\overline{0,n-1}.\quad(12)$$

В случае неоднородных краевых условий в задаче, т. е. если

$$u(a)=\alpha,\quad u(b)=\beta,\qquad(13)$$

неоднородная задача сводится к однородной с помощью известной замены

$$u(t)=v(t)+r(t),\qquad(14)$$

причем имеет место

$$u(0)=v(0)+r(0)=\alpha,$$

$$u(1)=v(1)+r(1)=\beta.\qquad(15)$$

В замене (15) функция $v(t)$ является решением однородной задачи

$$v(t)=f(t,v(t)+r(t),v''(t)+r''(t))\qquad(16)$$

$$v(0)=0,\quad v(1)=0,\qquad(17)$$

а функция $r(t)$ выбирается так, чтобы

$$r''(t)=0,\qquad(18)$$

$$r''(t)=0,\quad r(0)=\alpha,\quad r(1)=\beta.\qquad(19)$$

Выбор граничных условий (17), (19) позволит удовлетворить исходным граничным условиям (14). Решением задачи (18-19) является функция

$$r(t)=\alpha+(\beta-\alpha)t.$$

Теперь решение первой краевой задачи с неоднородными краевыми условиями примет вид

$$u(t)=\int_0^1 G(t,\xi)u''(\xi)d\xi+\alpha+(\beta-\alpha)\cdot t.$$

Для приближенного решения неоднородной краевой задачи в узлах сетки получим

$$u_i^p=(i-n)\frac{h^3}{6}\sum_{j=1}^{i}\Big[(3j-2)f_{j-1}^{p-1}+(3j-1)f_j^{p-1}\Big]-$$

$$-i\frac{h^3}{6}\sum_{j=i+1}^{n}\Big[(3n-3j+2)f_{j-1}^{p-1}+(3n-3j+1)f_j^{p-1}\Big]+\alpha+(\beta-\alpha)ih,\ i=\overline{1,n-1}.$$

Аналогично выражению (12) можно записать приближенное решение для неоднородной задачи в произвольной точке t

$$\tilde{u}(t)=(t-1)\frac{h^3}{6}\sum_{\substack{j=1\\(i\ge 1)}}^{i}\Big[(3j-2)f_{j-1}+(3j-1)f_j\Big]+(t-1)\int_{t_i}^{t}\xi F_i(\xi)d\xi+t\int_{t}^{t_{i-n}}(\xi-1)F_i(\xi)d\xi-$$

$$-t\frac{h^3}{6}\sum_{\substack{j=i+2\\(i<n-1)}}^{n}\Big[(3n-3j+2)f_{j-1}+(3n-3j+1)f_j\Big]+\alpha+(\beta-\alpha)t,\ t_i\le t\le t_{i+1},\quad i=\overline{0,n-1}.$$

Пример. В качестве примера рассмотрим следующую задачу [7]

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+0,7^2\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+1=0,\quad y(0)=0,\ y(1)=0.$$

Точное аналитическое решение имеет вид [7]

$$y(x)=\frac{1}{0,49}\ln\left[\frac{\cos 0,7(x-0,5)}{\cos 0,7/2}\right].$$

Результаты приближенного решения данной краевой задачи представлены табл. 1 и табл. 2.

Таблица 1

Сходимость приближенного решения к точному

x (h = 0,090909)	Итерация				
	1	3	5	10	Точное решение
0,00000000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,09090909	0,04132	0,04282	0,04283	0,04283	0,04279
0,18181818	0,07438	0,07665	0,07665	0,07665	0,07659
0,27272727	0,09917	0,10178	0,10178	0,10178	0,10170
0,36363636	0,11570	0,11841	0,11842	0,11842	0,11833
0,45454545	0,12397	0,12670	0,12670	0,12670	0,12661
0,54545455	0,12397	0,12670	0,12670	0,12670	0,12661
0,63636364	0,11570	0,11841	0,11842	0,11842	0,11833
0,72727273	0,09917	0,10178	0,10178	0,10178	0,10170
0,81818182	0,07438	0,07665	0,07665	0,07665	0,07659
0,90909090	0,04132	0,04282	0,04283	0,04283	0,04279
1,00000000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Таблица 2

Сходимость первой производной

x (h = 0,090909)	Итерация				
	1	3	5	10	Точное значение
0,00000000	0,50000	0,52185	0,52190	0,52190	0,52141
0,09090909	0,40909	0,42097	0,42098	0,42098	0,42060
0,18181818	0,31818	0,32378	0,32379	0,32379	0,32350
0,27272727	0,22727	0,22937	0,22937	0,22937	0,22916
0,36363636	0,13636	0,13687	0,13687	0,13687	0,13673
0,45454545	0,04545	0,04550	0,04550	0,04550	0,04542
0,54545455	-0,04545	-0,04550	-0,04550	-0,04550	-0,04552
0,63636364	-0,13636	-0,13687	-0,13687	-0,13687	-0,13683
0,72727273	-0,22727	-0,22937	-0,22937	-0,22937	-0,22926
0,81818182	-0,31818	-0,32378	-0,32379	-0,32379	-0,32360
0,90909090	-0,40909	-0,42097	-0,42098	-0,42098	-0,42071
1,00000000	-0,50000	-0,52185	-0,52190	-0,52190	-0,52153

Выводы

Краевая задача с нелинейной правой частью может быть сведена к системе двух нелинейных интегральных уравнений.

Приближенное решение краевой задачи $\tilde{u}(t)$ с построенной непрерывной кусочно-линейной второй производной $F(t)$ есть кубический сплайн из класса $C^2[0,1]$.

Приближенное решение $\tilde{u}(t)$ определяется в любой точке отрезка интегрирования $[0,1]$.

Изложенный метод приемлем для решения первой краевой задачи, для которой выполнены условия существования и единственности решения. Улучшение точности решения возможно достигнуть применением аппроксимации второй производной квадратичным или кубическим сплайном. Устойчивость метода не исследовалась.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тихонов А. Н. Дифференциальные уравнения / А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников. – М.: Наука. - 1985. - 231 с.
2. Карташев А. П. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. / А. П. Карташев, Б. Л. Рождественский – М.: Наука. - 1986. – 272 с.
3. Бахвалов Н. С. Численные методы. / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков – М.: Наука. - 1987. – 600 с.
4. Temple G. Linearization and delinearization. Proc. International Congress of Math. - 1958. P. 233-247.
5. Иванов В. А. Математические основы теории автоматического регулирования. / В. А. Иванов, Б. К. Чемоданов, В. С. Медведев, А. С. Ющенко – М.: Высш. шк. -1971. – 807 с.
6. Bellman R. Quasilinearization and upper and lower bounds for variational problems. Quart. Appl. Math. № 19. - 1962. – P. 349-350.
7. Bellman R. Quasilinearization and nonlinear boundary-value problems. / Bellman R., Kalaba R. - American Elsevier Publishing Company, Inc. – New York. - 1965. - 183 p.
8. Kalaba R. On nonlinear differential equations, the maximum operation and monotone convergence. J. Math., Mech. № 8. - 1959. – P. 519-574.
9. Шаманский В. Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. – К.: Наук. думка. - Ч. 1. -1963. – 194 с. - Ч. 2. -1966. - 244 с.
10. Годунов С. К. Разностные схемы. / С. К. Годунов, В. С. Рябенький – М.: Наука. - 1977. - 439с.
11. Рихтмайер Р. Разностные методы решения краевых задач. / Р. Рихтмайер, К. Мортон. – М.: Мир. - 1972. – 418 с.
12. T. von Karman. The engineer grapples with nonlinear problems. Bull. Amer. Math. Soc. № 46. - 1940. – P. 615-683.
13. Егоров А. И. Дифференциальные уравнения с приложениями. – М.: Физматлит. -2003.
14. Егоров А. И. Уравнения Риккати. – М.: Физматлит. - 2001.
15. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Пер. с нем. – М.: Наука. - 1976. – С. 61-65.
16. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: Методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков –К.: Наукова думка -1986. - С. 71-79, 84-94, 142-143, 148-152.
17. Мейнарович Е. В. О применении интерполяционных сплайнов к решению нелинейных интегральных уравнений Вольтерра / Е. В. Мейнарович, Р. В. Поляков, Л. Н. Шлепаков − В кн.: Линейные и нелинейные краевые задачи математической физики. – К.: Ин-т кибернетики АН УССР. - 1974. - С. 204-212.
18. Иванов В. В. Методы вычислений на ЭВМ: Справочн. пособ. – К.: Наук. думка. - 1986. - С. 389-391, 310-312, 325-329.

Надійшла до редколегії 01.09.2007.