

## ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Запропонован метод диференціальних рівнянь в задачах векторної оптимізації.

Предположен метод дифференциальных уравнений в задачах векторной оптимизации.

Offered method of the differential equations in problem of the vector optimization.

Рассматривается задача векторной оптимизации в следующей постановке

$$\begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \end{pmatrix} \rightarrow \min \quad (1)$$

при условии, что  $x \in X$ , где

$$X = \{x \in R^n : h_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}\}. \quad (2)$$

Напомним, что решением задачи (1)-(2) является некоторое множество  $X_* \subseteq X$ , такое, что любые две точки из этого множества несравнимы между собой по Паретто, т. е. имеет место:

$$\left( \begin{matrix} F_1(x) \leq F_1(y) \\ F_2(x) \leq F_2(y) \end{matrix} \right) \text{ или } \left( \begin{matrix} F_1(x) \geq F_1(y) \\ F_2(x) \geq F_2(y) \end{matrix} \right),$$

где  $x, y \in X_*$ , причем среди неравенств имеется одно строгое.

Пусть  $x_* \in X_*$ , тогда найдется такое  $\lambda \geq 0$ , что будет иметь место (1):

$$\nabla F_1(x_*) + \lambda \cdot \nabla F_2(x_*) = 0 \quad (3)$$

т. е. данное  $x_*$  является некоторой функцией  $\lambda$ . Однако, в большинстве случаев решение уравнения (3) может быть получено только в приближенном случае. В данной работе предлагается метод дифференциальных уравнений для решения уравнения (3). Пусть функции  $F_1, F_2$  дважды непрерывные и дифференцируемые, тогда имеет место дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx_*}{d\lambda} = -(\nabla^2 F_1(x_*) + \lambda \cdot \nabla^2 F_2(x_*))^{-1} \cdot \nabla F_2(x_*), \quad (4)$$

где  $\nabla^2 F_1(x_*), \nabla^2 F_2(x_*)$  - матрицы, элементы которой частные производные второго порядка:

$$\nabla^2 F_1(x_*) = \left( \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i, j = \overline{1, n}};$$

$$\nabla^2 F_2(x_*) = \left( \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i, j = \overline{1, n}}$$

относительно уравнения (4) будем предполагать, что матрицы  $\nabla^2 F_1(x_*), \nabla^2 F_2(x_*)$  таковы, что при  $\lambda \geq 0$  существует обратная матрица  $(\nabla^2 F_1(x_*) + \lambda \cdot \nabla^2 F_2(x_*))^{-1}$ , таким образом, используя уравнение (4) можно построить  $x_*(\lambda)$  применяя тот или иной численный метод решения дифференциальных уравнений. Так, например, используя метод Эйлера, получим:

$$\begin{aligned} x_*(\lambda + \Delta\lambda) &= x_*(\lambda) - \\ & - (\nabla^2 F_1(x_*(\lambda)) + \lambda \cdot \nabla^2 F_2(x_*(\lambda)))^{-1} \times \\ & \times \nabla F_2(x_*(\lambda)) \cdot \Delta\lambda \quad (5) \end{aligned}$$

Пусть  $\Gamma = \{x_*(\lambda) : \lambda \geq 0\}$ , но может оказаться, что не все точки этого множества принадлежат множеству  $X$ , тогда положим  $\tilde{\Gamma} = \Gamma \cap X$ , однако может оказаться, что среди множества  $\tilde{\Gamma}$  имеются точки, которые сравнимы по Парето. Если введем фильтр Паретто  $FP(X)$  (2), который отбирает из множества  $X$  точки не сравнимые по Парето, используя этот фильтр, получаем  $\Gamma_* = FP(\tilde{\Gamma})$ . Относительно множества  $\Gamma_*$ , мы можем сказать, что любые две точки из этого множества несравнимы по Паретто и удовлетворяют условию (3), так как являются решением дифференциального уравнения (4). Для доказательства этого факта вы-

ведем дифференциальное уравнение (4) из уравнения (3).

Пусть  $x_*(\lambda)$  является решением уравнения (3), тогда рассмотрим уравнение (3) при  $\lambda + \Delta\lambda$  т. е.

$$\nabla F_1(x_*(\lambda) + \Delta x) + (\lambda + \Delta\lambda) \cdot \nabla F_2(x_*(\lambda) + \Delta x) = 0.$$

Разлагая в ряд  $\nabla F_1, \nabla F_2$  в окрестности  $x_*(\lambda)$  и удерживая слагаемые порядка малости  $O(\Delta x, \Delta\lambda)$  получим:

$$\begin{aligned} (\nabla^2 F_1(x_*(\lambda)) + \lambda \cdot \nabla^2 F_2(x_*(\lambda))) \cdot \Delta x = \\ = -\nabla F_2(x_*(\lambda)) + O(\Delta x, \Delta\lambda). \end{aligned}$$

Поделив на  $\Delta\lambda$  и устремив  $\Delta\lambda$  к нулю, приходим к уравнению :

$$(\nabla^2 F_1(x_*(\lambda)) + \lambda \cdot \nabla^2 F_2(x_*(\lambda))) \cdot \frac{dx}{d\lambda} = -\nabla F_2(x_*(\lambda))$$

если матрица

$$\nabla^2 F_1(x_*(\lambda)) + \lambda \cdot \nabla^2 F_2(x_*(\lambda))$$

имеет определитель отличный от нуля, то получаем уравнение (4).

Изложенные теоретические положения рассматриваем на примере, когда функции  $F_1$  и  $F_2$  имеют вид:

$$F_1 = x_1^2 + 10 \cdot x_2^2; \quad F_2 = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 6)^2,$$

а множество  $X \subset R_2$  представляет собой

$$\begin{aligned} X = \{x \in R_2 : h_1 = (x_1 - 8)^2 + (x_2 - 8)^2 - 64 \leq 0, \\ h_2 = x_1 + x_2 - 6 \leq 0\}. \end{aligned}$$

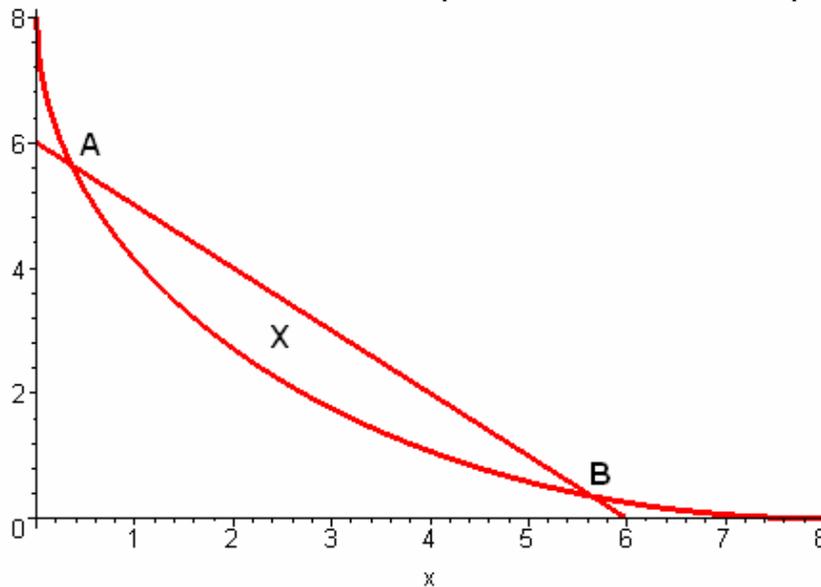


Рис. 1. Геометрическое представление множества  $X$

Данное множество геометрически представлено на рис. 1.

Координаты точек А и В следующие:

$$\begin{cases} x_{1A} = 0.354; & x_{1B} = 5.646; \\ x_{2A} = 5.646; & x_{2B} = 0.364. \end{cases}$$

Представленный пример решим двумя способами:

- используя уравнение (3);
- решая дифференциальное уравнение (4).

Заготовим градиенты функций  $F_1$  и  $F_2$ , составляем систему уравнений, записав уравнение (3) в скалярной форме.

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + \lambda \cdot 2 \cdot (x_1 - 3) = 0; \\ 20 \cdot x_2 + \lambda \cdot 2 \cdot (x_2 - 6) = 0, \end{cases}$$

откуда находим  $x_1(\lambda)$  и  $x_2(\lambda)$ , которые будут равны:

$$x_1 = \frac{3 \cdot \lambda}{1 + \lambda}; \quad x_2 = \frac{6 \cdot \lambda}{10 + \lambda}. \quad (6)$$

Параметр  $\lambda$  изменяется от 0 до  $\infty$ .

При  $\lambda = 0$  имеем

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 0,$$

а при  $\lambda \rightarrow \infty$  получаем

$$x_1 = 3; \quad x_2 = 6.$$

На рис. 2 представлена кривая  $\Gamma$  рассчитанная с использованием параметрического представления (6). Очевидно, что точки кривой от 0 до С и от D до Е не принадлежат множеству  $X$ .

Взяв пересечение  $\Gamma$  с множеством  $X$ , получим кривую  $\tilde{\Gamma}$ , которая представляет собой кривую от точки С до точки D, что и является решением задачи данного примера.

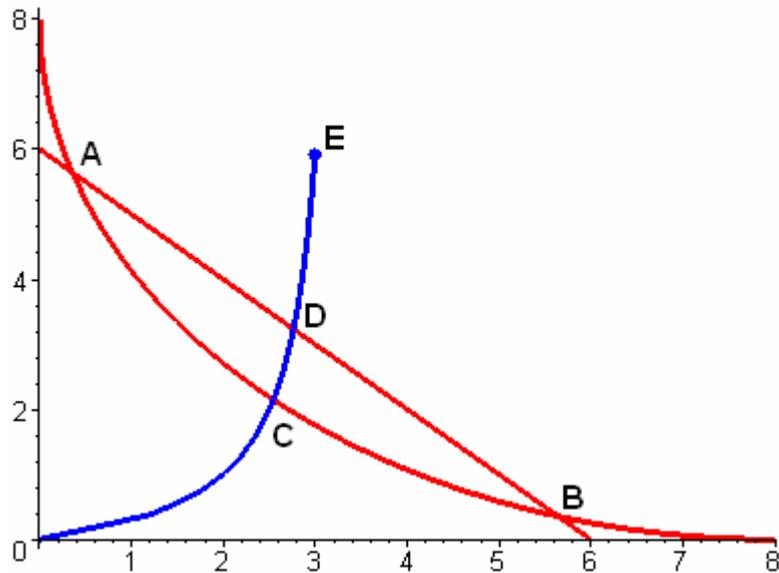


Рис. 2. Кривая  $\Gamma = \{x(\lambda), \lambda \geq 0\}$

При построении кривой  $\tilde{\Gamma}$  используем функцию

$$H(x) = \max\{h_1(x), h_2(x)\},$$

которая меньше или равна нулю, когда точка  $x \in X$ .

Применение данной функции заключается в

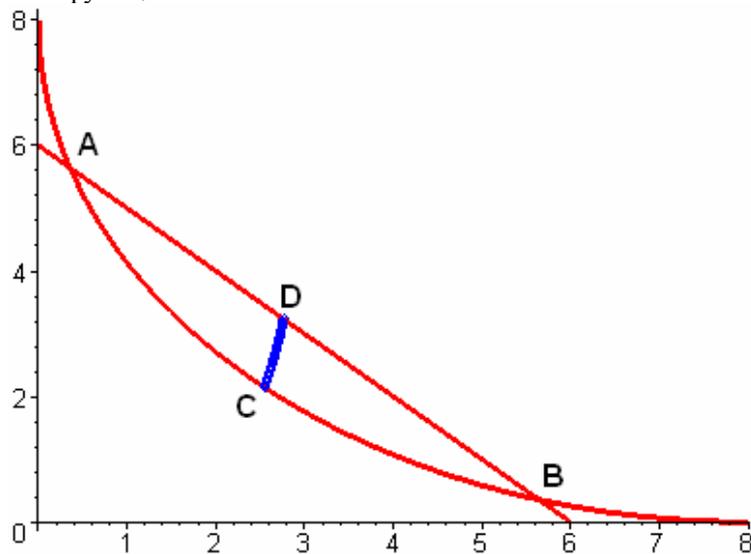


Рис. 3. Геометрическое представление пересечения  $\Gamma \cap X$

Теперь рассмотрим решение данного примера с помощью дифференциальных уравнений. В данном примере матрицы из вторых частных производных будут следующими:

$$\nabla^2 F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}; \quad \nabla^2 F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

а  $(\nabla^2 F_1 + \lambda \cdot \nabla^2 F_2)^{-1}$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2+2 \cdot \lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{20+2 \cdot \lambda} \end{pmatrix},$$

тогда

том, что при построении кривой  $\Gamma$  по формулам (6), каждая точка с помощью  $H$  проверяется на принадлежность множеству  $X$  (рис. 3).

Таким образом на рис. 3 кривая  $CD$  является  $\tilde{\Gamma} = \Gamma_*$  и тем самым решением задачи векторной оптимизации для рассмотренного примера.

$$\frac{dx}{d\lambda} = - \begin{pmatrix} \frac{1}{2+2\cdot\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{20+2\cdot\lambda} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\cdot(x_1-3) \\ 2\cdot(x_2-6) \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{d\lambda} = -\frac{2\cdot(x_1-3)}{2+2\cdot\lambda} = -\frac{x_1-3}{1+\lambda}; \\ \frac{dx_2}{d\lambda} = -\frac{2\cdot(x_2-6)}{20+2\cdot\lambda} = -\frac{x_2-6}{10+\lambda}. \end{cases} \quad (7)$$

или в скалярной форме:

Решением системы (7) будем искать, используя метод Рунге-Кутты четвертого порядка. Программа реализующая данный подход в среде Maple представляет собой:

```
> eq:={diff(x1(t1),t1)=-((x1(t1)-3)/(1+t1)),diff(y1(t1),t1)=-
(y1(t1)-6)/(10+t1),x1(0)=0,y1(0)=0};
eq := { d/dt1 x1(t1) = - (x1(t1)-3)/(1+t1), d/dt1 y1(t1) = - (y1(t1)-6)/(10+t1), x1(0)=0, y1(0)=0 }
> deq:=dsolve(eq,numeric, method=rkf45,
output=procedurelist);
> X1:=array(1..1000,[ ]);Y1:=array(1..1000,[ ]);
X1 := array(1 .. 1000, [ ])
Y1 := array(1 .. 1000, [ ])
> k:=0:for t1 from 0 by 0.1 to 100 do
x11:=op(2,op(2,deq(t1))):y11:=op(2,op(3,deq(t1))):if
H(x11,y11)<=0 then k:=k+1:X1[k]:=x11:Y1[k]:=y11:end if:end do:
```

В этой программе параметр  $\lambda$  обозначим как  $t_1$ , а решение системы дифференциальных уравнений оформлено в виде процедуры  $deq(t_1)$ , которая выдает  $x_1$  и  $x_2$  при конкретном значении  $t_1$ .

На рис. 4 представлено точное решение в виде точек и приближенное в виде сплошной линии. Как следует из этого рисунка с точки зрения точности оба подхода эквивалентны. Естественно возникает вопрос, когда необходимо отдавать предпочтение тому или иному подходу.

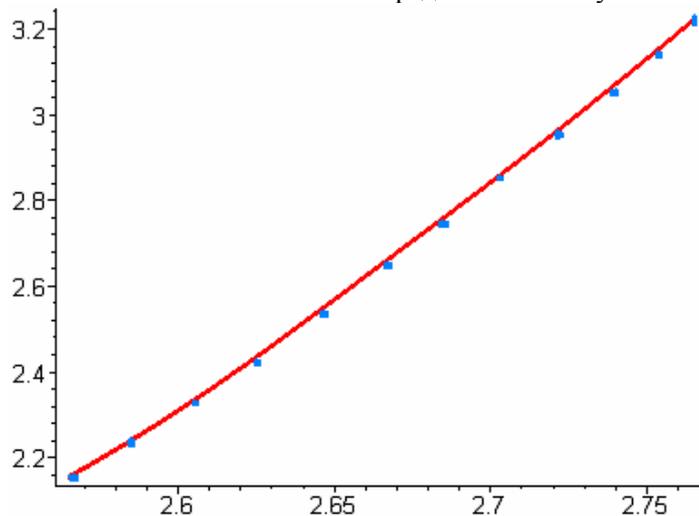


Рис. 4. Точное решение (точки) и приближенное – сплошная линия

Заметим, что при использовании дифференциальных уравнений можно избежать определения обратной матрицы  $(\nabla^2 F_1 + \lambda \cdot \nabla^2 F_2)^{-1}$ , а пользоваться уравнением

$$(\nabla^2 F_1 + \lambda \cdot \nabla^2 F_2) \cdot \frac{dx}{d\lambda} = -\nabla^2 F_2,$$

которое в нашем случае принимает вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2+2\cdot\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{20+2\cdot\lambda} \end{pmatrix} \cdot \frac{dx}{d\lambda} = - \begin{pmatrix} 2\cdot(x_1-3) \\ 2\cdot(x_2-6) \end{pmatrix},$$

или в скалярной форме:

$$\begin{cases} (2 + 2 \cdot \lambda) \cdot \frac{dx_1}{d\lambda} = -2 \cdot (x_1 - 3); \\ (20 + 2 \cdot \lambda) \cdot \frac{dx_2}{d\lambda} = -2 \cdot (x_2 - 6). \end{cases}$$

Решением этой системы полностью совпадает с решением системы, когда производные разрешены с помощью обратной матрицы  $(\nabla^2 F_1 + \lambda \cdot \nabla^2 F_2)^{-1}$ , т. е. с системой (7).

**Замечание.** Применение метода дифференциальных уравнений представляет собой задачу

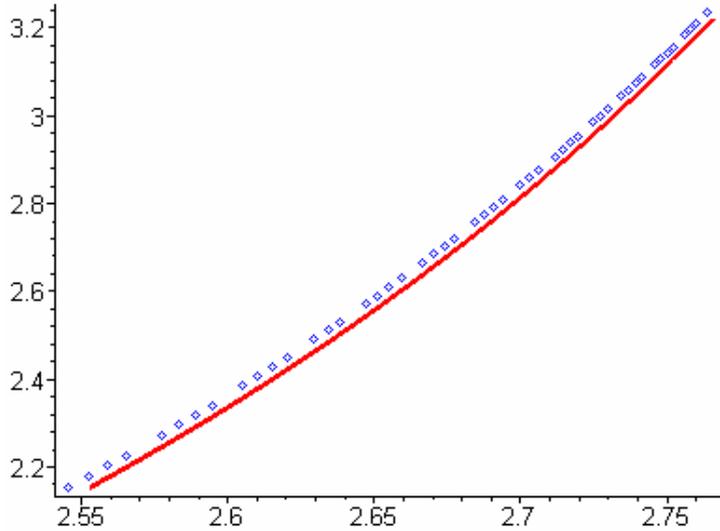


Рис. 5. Сплошная линия точное решение, точки – приближенное решение из-за ошибки в начальных условиях

В общем случае метод дифференциальных уравнений необходимо применять только, когда точное решение уравнения не может быть получено, но весьма осторожным надо быть при получении начальных условий.

### Определение начальных условий задачи Каши при определении множества Парето

Задача Каши при определении множества Парето представляет собой:

$$(\nabla^2 F_1 + \lambda \cdot \nabla^2 F_2) \cdot \frac{dx}{d\lambda} = -\nabla^2 F_2 \quad (8)$$

с начальными условиями

$$x(\lambda_0) = x_0. \quad (9)$$

Однако, в общем случае решение уравнения (8) при начальных условиях существенно зависит от условий (9), которые как правило неизвестны.

Если кривая  $X_*$  является множеством Парето, то взяв любую точку  $x_* \in X_*$  имеем

Коши. К этим уравнениям необходимо придать начальные условия, которые можно определить из уравнения  $\nabla F_1 = 0$ .

В общем случае решение данного уравнения получаем некоторым численным методом, т.е. с определенной погрешностью. Так, например, в нашем примере приближенное решение уравнения  $\nabla F_1 = 0$  равно  $x_1(0) = 0.05; x_2(0) = 0$ .

На рис. 5 представлено отклонение приближенного решения от точного.

$$\frac{|\nabla F_1(x_*)|}{|\nabla F_2(x_*)|} = \lambda_* \quad (10)$$

а скалярное произведение  $\langle \nabla F_1(x_*), \nabla F_2(x_*) \rangle \leq 0$ . Причем  $\cos \varphi_* = -1$ , где  $\varphi_*$  угол между векторами  $\nabla F_1(x_*)$  и  $\nabla F_2(x_*)$ .

В общем случае для произвольной точки  $x$  имеем

$$\cos \varphi = \frac{\langle \nabla F_1(x_*), \nabla F_2(x_*) \rangle}{|\nabla F_1(x_*)| \cdot |\nabla F_2(x_*)|} \quad (11)$$

и если  $\cos \varphi_* \neq -1$ , то данная точка не принадлежит  $X_*$ .

Введем вектор  $U(x, \alpha) = -(\alpha \cdot \frac{\nabla F_1(x_*)}{|\nabla F_1(x_*)|} + (1 - \alpha) \cdot \frac{\nabla F_2(x_*)}{|\nabla F_2(x_*)|})$ , где  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Новое значение  $x_H$  будем вычислять по формуле

$$x_H = x + t \cdot U(x, \alpha),$$

где  $t$  некоторый шаг.

Подставим в (11)  $x_H$  получим

$$\cos \varphi_H = \left\langle \frac{\nabla F_1(x+t \cdot U(x, \lambda))}{|\nabla F_1(x)|}, \frac{\nabla F_2(x+t \cdot U(x, \alpha))}{|\nabla F_2(x)|} \right\rangle$$

и определим  $\alpha_*$  и  $t_*$  так, чтобы  $\cos \varphi_H$  был бы минимальным.

```
> b0:=0:for t from 0.01 by 0.01 to 0.1 do x1:=1;x2:=10; b:=0:for
a from 0 by 0.001 to 1 do
c:=evalf(u12):z1:=evalf(u[1],5):z2:=evalf(u[2],5):x1:=x1-
t*z1:x2:=x1-t*z2:if (c<b and H(x1,x2)<=0) then
b:=c:x11:=x1:x22:=x2:a0:=a:end if:end do:if b<b0 then
b0:=b:x111:=x11:x222:=x22:a0:=a:end if:end
do:print(`alfa=` ,a0):print(`cos=` ,b0):print(`x1=` ,x111,`x2=` ,x22
2):
```

Поиск начальных условий задачи Коши.

Так, например, если  $x_1=1, x_2=10$ , то при  $\lambda=1$ ,  $\cos \varphi_H = -0,9999999990$  в качестве начальных значений необходимо взять  $x_1 = 2,69497840$ ;  $x_2 = 2,77917940$ .

Если  $\min_{\lambda, t} \cos \varphi_H = -1$ , то  $x_H \in X_*$ , а ему соответствующее  $\lambda_0$  определенное по соотношению (10).

Очевидно, если пересечение конуса с вершиной в точке  $x$  и образующими параллельно антиградиентам с множеством  $X_*$  не пусто, то всегда найдутся такие  $\alpha_*$  и  $t_*$ , что  $\cos \varphi_* = -1$ .

Реализация данной задачи в среде Maple представляет собой:

Этому начальному условию соответствует  $\lambda = 8,630650947$  и выполнив решение дифференциального уравнения получим часть множества  $X_*$ , когда  $\lambda$  изменяется до 100.

Данное решение представлено на рис. 6.

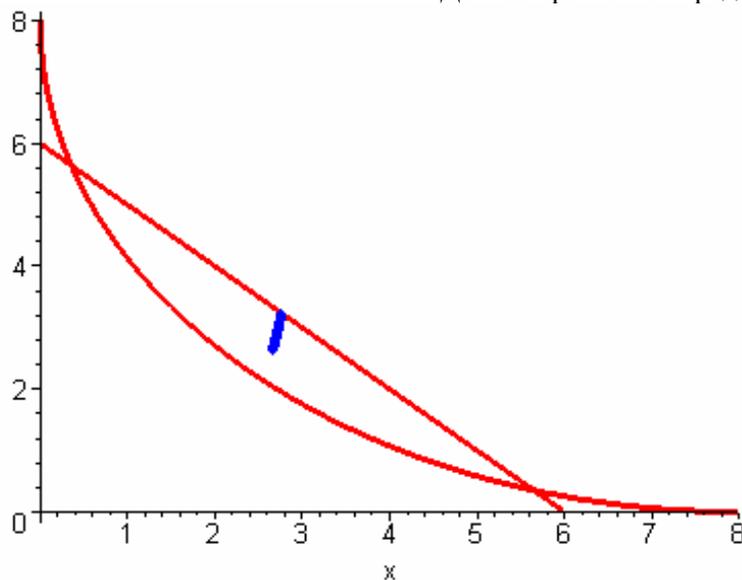


Рис. 6. Решение дифференциального уравнения (4) при полученных начальных условиях

Остальные значения множества  $X_*$  получаются, когда будем рассматривать  $\lambda < 8,630650947$ .

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Босов. А. А. Функции множества и их применения. – Днепропетровск: Изд. дом «Андрей», 2007. – 182 с.
2. Mattson C., Messac A. Pareto Frontier Based Concept Selection Under Uncertainty, with Visualization. Optimization and Engineering. Vol.6 № 1, March 2005, pp. 85-115.

Поступила в редакцию 27.07.2007.