УДК 681.324:519.872

Н. І. ПОСЛАЙКО (ДІІТ)

ДОСЛІДЖЕННЯ ОДНІЄЇ СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ З НЕНАДІЙНИМИ ОБСЛУГОВУЮЧИМИ ПРИЛАДАМИ В ПЕРЕХІДНОМУ РЕЖИМІ

Розглядається система масового обслуговування з необмеженою чергою і ненадійними обслуговуючими приладами. Запропонована методика розрахунку ймовірностей станів такої системи.

Рассматривается система массового обслуживания с неограниченной очередью и ненадежными обслуживающими приборами. Предложена методика расчета вероятностей состояний такой системы.

A queuing system with unlimited line and unreliable service devices is considered. A computational technique of probabilities of stats of the system has been proposed.

Математичні моделі масового обслуговування широко використовуються при дослідженні багатьох технічних систем, зокрема, транспортних систем, для підвищення їх ефективності.

Є величезна кількість публікацій на цю тему. Найбільш вивченими є математичні моделі систем масового обслуговування, які описуються в рамках одновимірних марковських процесів. Це так звані класичні системи масового обслуговування (з відмовами, з обмеженою та необмеженою чергою, замкнені, з пріоритетами та інші).

Так, добре вивчена в перехідному та стаціонарному режимах система масового обслуговування з необмеженою чергою, в яку надходить найпростіший потік заявок, а час обслуговування однієї заявки розподілений за показниковим законом. Інтенсивність вхідного потоку та інтенсивність обслуговування в такій системі не залежать від часу, заявки в систему надходять по одній (найпростіший потік заявок є ординарним) [1].

Математична модель цієї системи потім узагальнювалась в різних напрямках. Була запропонована і досліджена модель з неординарним пуассонівським потоком, модель, що неоднорідна за часом, тобто інтенсивність вхідного потоку та обслуговування є функціями часу та інші узагальнення. Причому, як правило, в математичних моделях цієї системи можливий вихід з ладу обслуговуючих приладів протягом роботи системи не враховувався. Врахування надійності обслуговуючих приладів та їх відновлення у разі виходу з ладу суттєво ускладнює математичні моделі. Для системи масового обслуговування з необмеженою чергою і дисципліною черги «першим прийшов – перший обслужений» врахування перелічених факторів вперше було здійснено в роботі [2]. Процес обслуговування був представлений як двохвимірний марковський процес, одна компонента якого в кожен момент часу співпадає з числом вимог в системі (в черзі та на обслуговування), а друга – з числом приладів, що вийшли з ладу. На основі результатів цієї роботи в даній статті пропонується методика чисельного розрахунку ймовірностей станів системи масового обслуговування в перехідному режимі. Розроблена методика дозволяє наближено розраховувати час, через який в системі установлюється стаціонарний режим роботи, якщо такий режим для досліджуваної системи з заданими певними значеннями параметрів існує.

Розглянемо процес $\{\eta_t, \xi_t\}, t \ge 0$, де η_t – число несправних приладів в момент часу t, ξ_t – число заявок, які знаходяться в системі в момент часу t,

$$\eta_t \in \{0,1,...,n\}, \;\; \xi_t \in \{0,1,2,...\},$$

де n - загальна кількість обслуговуючих приладів в системі обслуговування.

Припускається, що в систему масового обслуговування надходить неординарний пуассонівський потік заявок з інтенсивністю λ,

$$\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty,$$

де λ_k – інтенсивність надходження групи з k заявок.

Ймовірності переходу процесу $\{\eta_t, \xi_t\}$ за час $\Delta(\Delta \to 0)$ задаються наступним чином:

$$(m,r)\xrightarrow{\Delta}\begin{cases}(m,r):1-(\lambda+\min(r,n-m)\times\\ \times(\mu+\nu)+m\varepsilon)\Delta+o(\Delta),\\ (m,r+k):\lambda_k\Delta+o(\Delta),\\ k\geq 1,\\ (m,r-1):\min(r,n-m)\times\\ \times\mu\Delta+o(\Delta),\\ (m+1,r):\min(r,n-m)\times\\ \times\nu\Delta+o(\Delta),\\ (m-1,r):m\varepsilon\Delta+o(\Delta),\end{cases}$$

де $m=0,1,...,n; r=0,1,2,...,-$ ймовірності інших переходів порядку $o(\Delta)$

$$\left(\lim_{\Delta\to 0}\frac{o(\Delta)}{\Delta}=o\right).$$

Тут $\nu-$ інтенсивність виходу з ладу одного приладу, $\mu-$ інтенсивність обслуговування однієї заявки одним приладом, $\varepsilon-$ інтенсивність відновлення одного приладу у разі його виходу з ладу.

Процес $\{\eta_t,\xi_t\}$ - двовимірний марковський процес.

Якщо ймовірності станів такого процесу позначити

$$P_{m,r}(t)=P\{\eta_t=m,\xi_t=r\},$$

то можна показати, що система диференціальних рівнянь Колмогорова для такої системи має вигляд:

$$\frac{dP_{m,r}(t)}{dt}=-[\lambda+m\varepsilon+\min(r,n-m)\mu+$$

$$+\min(r,n-m)\nu]P_{m,r}(t)+\min(r,n-m)\times$$

$$\times\nu P_{m-1,r}(t)+(m+1)\varepsilon P_{m+1,r}(t)+$$

$$+\min(r+1,n-m)P_{m,r+1}(t)+\sum_{i=1}^{r}P_{m,r-i}(t)\lambda_i,$$

$(m=0,1,...,n-1;\quad r=0,1,2,...)$,

$$\begin{cases}\dfrac{dP_{n,o}(t)}{dt}=-(\lambda+n\varepsilon)P_{n,o}(t),\\ \text{...}\\ \dfrac{dP_{n,r}(t)}{dt}=-(\lambda+n\varepsilon)P_{n,r}(t)+\displaystyle\sum_{i=1}^{r}P_{n,r-i}(t)\lambda_i,\\ r=1,2,3...\end{cases}$$

Ця система диференціальних рівнянь нескінченна. Щоб скористатись теорією звичайних диференціальних рівнянь, цю нескінченну систему диференціальних рівнянь можна за допомогою твірних функцій звести до скінченої системи диференціальних рівнянь:

$$\varphi_m(t,\theta)=\sum_{r=0}^{\infty}P_{m,r}(t)\theta^r,\quad |\theta|\leq 1,$$

$$\frac{\partial\varphi_0(t,\theta)}{\partial t}=q_0(\theta)\varphi_0(t,\theta)+\varepsilon\varphi_1(t,\theta)+f_0(t,\theta),$$

$$\frac{\partial\varphi_1(t,\theta)}{\partial\theta}=n\nu\varphi_0(t,\theta)+q_1(\theta)\varphi_1(\theta)+$$

$$+2\varepsilon\varphi_2(t,\vartheta)+f_1(t,\theta),$$

$$...$$

$$\frac{\partial\varphi_n(t,\theta)}{\partial t}=\nu\varphi_{n-1}(t,\theta)+q_n(\theta)\varphi_n(t,\theta)+f_n(t,\theta)\quad(1)$$

де

$$q_m(\theta)=\lambda(\theta)+\frac{\mu}{\theta}(n-m)-(\lambda+m\varepsilon)-(n-m)(\nu+\mu),$$

$$f_m(t,\theta)=\left(\frac{\mu}{\theta}-\mu-\nu\right)\sum_{r=0}^{n-m-1}(r-n+m)\times$$

$$\times P_{m,r}(t)\theta^r+\nu\sum_{r=0}^{n-m}(r-n+m-1)\times P_{m-1,r}(t)\theta^r,$$

$$m=0,1,...,n,\quad \lambda(\theta)=\sum_{r=1}^{\infty}\lambda_r\theta^r.$$

Покладаємо $\sum_{r=0}^{-1}rP_{m,r}(t)\theta^r\equiv 0.$

У векторно-матричному вигляді остання система запишеться наступним чином:

$$\frac{\partial\overline{\varphi}(t,\theta)}{\partial t}=Q(\theta)\overline{\varphi}(t,\theta)+\overline{f}(t,\theta)\qquad(1')$$

де $\overline{\varphi}(t,\theta)=\begin{pmatrix}\varphi_0(t,\theta)\\ \varphi_1(t,\theta)\\ ...\\ \varphi_n(t,\theta)\end{pmatrix}$, $\overline{f}(t,\theta)=\begin{pmatrix}f_0(t,\theta)\\ f_1(t,\theta)\\ ...\\ f_n(t,\theta)\end{pmatrix}$,

$$Q(t,\theta)=$$

$$=\begin{pmatrix}q_0(\theta) & \varepsilon & 0 & ... & 0 & 0\\ n\nu & q_1(\theta) & 2\varepsilon & ... & 0 & 0\\ ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & 0 & ... & q_{n-1}(\theta) & n\varepsilon\\ 0 & 0 & 0 & ... & \nu & q_n(\theta)\end{pmatrix}.$$

В системі (1) крім твірних функцій $\varphi_m(t,\theta)$ фігурують вирази $f_m(t,\theta)$, які містять частину шуканих ймовірностей, а саме ймовірність $P_{m,r}(t)$, $0 \le r \le n-1$.

Для розв'язування системи (1) використаний допоміжний двохвимірний марковський процес, однорідний за другою компонентою $\{\eta_t^*, \xi_t^*\}$. Такі процеси були запропоновані і досліджені Єжовим І. І. та Скороходом А. В. [3, 4] і широко використовуються при дослідженні різноманітних систем масового обслуговування.

Допоміжний процес тісно пов'язаний з процесом $\{\eta_t, \xi_t\}$ і задається так:

$$\eta_t^* \in \{0,1,...,n\},\ \xi_t^* \in \{0,\pm1,\pm2,...\},$$

ймовірності переходів $\{\eta_t^*, \xi_t^*\}$. із стану в стан за час $\Delta(\Delta \to 0)$ мають вигляд:

$$(m,r)\xrightarrow{\Delta}\begin{cases}(m,r):1-(\lambda+m\varepsilon+(n-m)\times\\ \times(\mu+\nu)\Delta+o(\Delta)\cdot),\\ (m,r+k):\lambda_k\Delta+o(\Delta),\\ (m,r-1):(n-m)\mu\Delta+o(\Delta),\\ (m-1,r):m\varepsilon\Delta+o(\Delta),\\ (m+1,r):(n-m)\nu\Delta+o(\Delta),\end{cases}$$

$$m=0,1,...,n;\quad r=0,\pm1,\pm2,...,$$

ймовірності інших переходів порядку $o(\Delta)$.

Нехай

$$P_{lm}^*(t,r)=P\begin{Bmatrix}\eta_t^*=m,\xi_t^*=r/\eta_0^*=l,\\ \xi_0^*=0,\end{Bmatrix},$$

$$(l,m=0,1,...,n;\quad r=0,\pm1,\pm2,...)$$

ймовірності станів допоміжного процесу (η_t^*,ξ_t^*) в припущенні, що в початковий момент часу $t=0, \eta_0^*=l, \xi_0^*=0$.

Із задання процесу $\{\eta_t^*, \xi_t^*\}$. видно, що він є марковським процесом, однорідним за другою компонентою.

В термінах твірних функцій

$$\varphi_{lm}^*(t,\theta)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}P_{lm}^*(t,r)\theta^r,\quad |\theta|\le 1,$$

система прямих диференціальних рівнянь Колмогорова для процесу $\{\eta_t^*, \xi_t^*\}$. набуває вигляду аналогічного (1), але без доданків типу $f_m(t,\theta)$, які породжують неоднорідність системи (1):

$$\frac{\partial\varphi_{lm}^*(t,\theta)}{\partial t}=[\lambda(\theta)-\lambda-(n-m)\mu\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\theta}-1\right)-m\varepsilon-(n-m)\nu]\varphi_{lm}^*(t,\theta)+$$

$$+(1-\delta_{mn})(m+1)\varepsilon\varphi_{l,m+1}^*(t,\theta)+$$

$$+(1-\delta_{m0})(n+m-1)\nu\varphi_{l,m-1}^*(t,\theta), \tag{2}$$

де δ_{mn} - символ Кронекера, $l,m=0,1,...,n.$

Якщо ввести функцію

$$\Phi_{lm}^*(t,\theta)=e^{[\lambda-\lambda(\theta)]t}\varphi_{lm}^*(t,\theta)$$

та позначення

$$\bar{\Phi}^*(t,\theta)=(\Phi_{l0}^*(t,\theta),\Phi_{l1}^*(t,\theta),...,\Phi_{ln}^*(t,\theta)),$$

$$\Gamma(\theta)=\begin{bmatrix}\gamma_0(\theta) & \varepsilon & 0 & ... & 0 & 0\\ n\nu & \gamma_1(\theta) & 2\varepsilon & ... & 0 & 0\\ ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & 0 & ... & \nu & \gamma_n(\theta)\end{bmatrix},$$

$$\gamma_m(\theta)=(n-m)\mu\left(\frac{1}{\theta}-1\right)-m\varepsilon-(n-m)\nu,$$

$$m=0,1,...,n,$$

то систему (2) можна записати у вигляді

$$\frac{\partial\bar{\Phi}^*(t,\theta)}{\partial t}=\Gamma(\theta)\Phi^*(t,\theta), \tag{2'}$$

звідки $\bar{\Phi}^*(t,\theta)=\exp\{\Gamma(\theta)t\}$.

Розв'язок $\bar{\Phi}^*(t,\theta)$ є матричною експонентою, і його можна використати для наближеного обчислення ймовірностей станів допоміжного процесу. Про це буде йти мова далі.

Враховуючи зв'язок між $(1')$ та $(2')$, після ряду перетворень можна отримати залежність між ймовірностями станів процесів $\{\eta_t, \xi_t\}$ та $\{\eta_t^*, \xi_t^*\}$:

$$P_{kj}(t)=c_{k,j}(t)+\sum_{i=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-i}\int_0^t[\nu(r-n+i-1)P_{ki}^*\times$$

$$\times(t-\tau,j-r)P_{i-1,r}(\tau)+(r-n+i)\bar{P}_{ki}^*\times$$

$$\times(t-\tau,j-r)P_{ir}(\tau)]d\tau, \tag{3}$$

$$(k=0,1,...,n;\quad j=0,1,2,...),$$

де $\quad \overline{P}^*_{ki}(t-\tau, j-r) = \mu P^*_{ki}(t-\tau, j-r+1) -$

$$-(\mu+\nu)P^*_{ki}(t-\tau, j-r)$$

$$c_{k,j}(t) = m_{k,j}(t) + b_{k,j}(t),$$

$$m_{k,j}(t) = \sum_{i=0}^{n} d_{k,j}(i,t),$$

$$b_{k,j}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{j+m,m}(k,t),$$

$$d_{k,j}(i,t) = \sum_{m=0}^{j} P_{im}(0)P^*_{ki}(t, j-m),$$

$$k = 0,1,...,n,$$

$$a_{j+m,m}(k,t) = \sum_{i=0}^{n} P_{i,j+m}(0)P^*_{ki}(t,-m).$$

З системи рівнянь (3) $P_{kj}(t)$ при $j \geq n$ можна рекурентно виразити через $P_{k0}(t)$, $P_{k1}(t)$,…, $P_{k,n-1}(t)$. Останні ймовірності є розв'язком системи інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду, яку отримаємо з (3) при $j = 0,1,...,n-1$.

Тепер розглянемо, як можна, використовуючи чисельні методи наближено обчислити ймовірності станів допоміжного процесу $P^*_{l,m}(t,r)$, через які виражаються ймовірності станів основного процесу $P_{kj}(t)$, оскільки явні аналітичні вирази через локальні характеристики процесу обслуговування одержати для них неможливо.

Покажемо це на прикладі, коли

$$n = 1, l = 0, \lambda = \lambda_{1,} \lambda_r = 0, r = 2,3,..., k = 0.$$

У цьому випадку система (3) набуває вигляду

$$P_{0j}(t) = c_{0,j}(t) + \int_0^t [(\mu+\nu) \times P^*_{00}(t-\tau, j) -$$

$$-\nu P^*_{01}(t-\tau, j) - \mu P^*_{00}(t-\tau, j+1)]P_{00}(\tau)d\tau .$$

Всі ймовірності станів $P_{0j}(t)$ при $j \geq 1$ рекурентно виражаються через $P_{00}(t)$ та $P^*_{0m}(t, j)$, $m = 0,1$. $P_{00}(t)$ є розв'язком інтегрального рівняння Вольтерра другого роду

$$P_{00}(t) = C_{0,0}(t) + \int_0^t [(\mu+\nu) \cdot P^*_{00}(t-\tau,0) -$$

$$-\nu P^*_{01}(t-\tau,0) - \mu \cdot P^*_{00} \cdot (t-\tau,1)]P_{00}(\tau)d\tau \qquad (4)$$

Для знаходження

$P^*_{0k}(t,r),\ k = 0,1,\ r = 0,\pm1,\pm2,...$ з $(2')$ маємо

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t}\Phi^*_{00}(t,\theta) \\ \frac{\partial}{\partial t}\Phi^*_{01}(t,\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_0(\theta) & \varepsilon \\ \nu & \gamma_1(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi^*_{00}(t,\theta) \\ \Phi^*_{01}(t,\theta) \end{bmatrix}$$

або

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\Phi^*_{00}(t,\theta) = \gamma_0(\theta)\Phi^*_{00}(t,\theta) + \varepsilon\Phi^*_{01}(t,\theta), \\ \frac{\partial}{\partial t}\Phi^*_{01}(t,\theta) = \nu\Phi^*_{00}(t,\theta) + \gamma_1(\theta)\Phi^*_{01}(t,\theta), \end{cases}$$

з початковими умовами

$$\Phi^*_{00}(0,\theta) = 1, \quad \Phi^*_{01}(0,\theta) = 0 .$$

Розв'яжемо останню систему операційним методом. Нехай

$$\Psi_k(\theta,s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\Phi^*_{0k}(t,\theta)dt, \quad k = 0,1,$$

- перетворення Лапласа шуканих функцій. Тоді отримаємо з урахуванням початкових умов систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $\Psi_k(\theta,s)$:

$$\begin{cases} s\Psi_0(\theta,s) - 1 = \gamma_0(\theta)\Psi_0(\theta,s) + \varepsilon\Psi_1(\theta,s), \\ s\Psi_1(\theta,s) = \nu\Psi_0(\theta,s) + \gamma_1(\theta)\Psi_1(\theta,s). \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи має вигляд:

$$\Psi_0(\theta,s) = \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2},$$

$$\Psi_1(\theta,s) = \frac{B_1}{s-s_1} + \frac{B_2}{s-s_2},$$

де $s_1 = \dfrac{\gamma_0(\theta) + \gamma_1(\theta) + \sqrt{(\gamma_0(\theta) - \gamma_1(\theta))^2 + 4\varepsilon\nu}}{2}$,

$$s_2 = \frac{\gamma_0(\theta) + \gamma_1(\theta) - \sqrt{(\gamma_0(\theta) - \gamma_1(\theta))^2 + 4\varepsilon\nu}}{2},$$

$$A_1 = \frac{\gamma_1(\theta) - s_1}{s_2 - s_1}, \quad A_2 = \frac{s_2 - \gamma_1(\theta)}{s_2 - s_1},$$

$$B_1 = \frac{-\nu}{s_2 - s_1}, \quad B_2 = \frac{\nu}{s_2 - s_1}.$$

Корінь квадратний із комплексного числа $(\gamma_0(\theta) - \gamma_1(\theta))^2 + 4\pi\nu$, як відомо, має два значення, які відрізняються знаком. В даному випадку можна взяти будь-яке значення.

Звідси маємо

$$\Phi_{00}^*(t,\theta)=A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t},$$

$$\Phi_{01}^*(t,\theta)=B_1e^{s_1t}+B_2e^{s_2t}.$$

Отже $\varphi_{0k}^*(t,\theta)=\Phi_{0k}^*(t,\theta)e^{-[\lambda-\lambda(\theta)]t}$, $k=0,1$.

При зроблених припущеннях $\lambda(\theta)=\lambda\theta$.

Враховуючи, що $\varphi_{0k}^*(t,\theta)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}P_{0k}^*(t,r)\theta^r$, $k=0,1$, де $r=0,\pm1,\pm2,...$, на основі теореми Лорана маємо:

$$P_{0k}^*(t,r)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\theta|=1}\frac{\varphi_{0k}^*(t,\theta)}{\theta^{r+1}}d\theta,\ k=0,1. \quad (4)$$

Зробимо в (4) заміну змінних $\theta=e^{i\varphi}(\varphi\in[0;2\pi])$. Отримаємо після ряду перетворень (з огляду на їх громіздкість вони тут не наводяться) вирази для $P_{00}^*(t,r)$ та $P_{01}^*(t,r)$ у вигляді визначених інтегралів.

Так

$$P_{00}^*(t,r)=\frac{1}{4\pi}e^{-\lambda t}\int_0^{2\pi}e^{\lambda t\cos\varphi}E(\varphi)\cos r\varphi d\varphi+$$

$$+\frac{1}{4\pi}e^{-\lambda t}\int_0^{2\pi}e^{\lambda t\cos\varphi}F(\varphi)\cos r\varphi d\varphi,$$

де

$$E(\varphi)=\left(E_2(\varphi)e^{\frac{1}{2}E_4(\varphi)t}+E_1(\varphi)e^{\frac{1}{2}E_3(\varphi)t}\right)\cos(\lambda t\sin\varphi)-$$

$$-\left(F_2(\varphi)e^{\frac{1}{2}E_4(\varphi)t}+F_1(\varphi)e^{\frac{1}{2}E_1(\varphi)t}\right)\sin(\lambda t\sin\varphi),$$

$$F(\varphi)=\left(F_2(\varphi)e^{\frac{1}{2}E_4(\varphi)t}+F_1(\varphi)e^{\frac{1}{2}E_3(\varphi)t}\right)\cos(\lambda t\sin\varphi)+$$

$$+\left(E_2(\varphi)e^{\frac{1}{2}E(\varphi)t}+E_1(\varphi)e^{\frac{1}{2}E_3(\varphi)t}\right)\sin(\lambda t\sin\varphi),$$

$$E_1(\varphi)=\left(1-\frac{C(\varphi)}{\sqrt{l(\varphi)}}\right)\cos\left(\frac{1}{2}F_3(\varphi)t\right)+$$

$$+\frac{D(\varphi)}{\sqrt{l(\varphi)}}\sin\left(\frac{1}{2}F_3(\varphi)t\right),$$

$$F_1(\varphi)=\frac{D(\varphi)}{\sqrt{l(\varphi)}}\cos\left(\frac{1}{2}F_3(\varphi)t\right)-$$

$$-\left(1-\frac{C(\varphi)}{\sqrt{l(\varphi)}}\right)\sin\left(\frac{1}{2}F_3(\varphi)t\right),$$

$$E_2(\varphi)=\left(1+\frac{C(\varphi)}{\sqrt{l(\varphi)}}\right)\cos\left(\frac{1}{2}F_4(\varphi)t\right)+$$

$$+\frac{D(\varphi)}{\sqrt{l(\varphi)}}\sin\left(\frac{1}{2}F_4(\varphi)t\right),$$

$$E_3(\varphi)=\mu(\cos\varphi-1)-\nu-\varepsilon-\sqrt{l}\cos\left(\frac{\omega(\varphi)}{2}-\varphi\right),$$

$$F_3(\varphi)=\sqrt{l}\mu\left(\sin\frac{\omega(\varphi)}{2}-\varphi\right)+\mu\sin\varphi,$$

$$E_4(\varphi)=\mu(\cos\varphi-1)-\nu-\varepsilon+\sqrt{l}\cos\left(\frac{\omega(\varphi)}{2}-\varphi\right),$$

$$F_4(\varphi)=\sqrt{l}\sin\left(\frac{\omega(\varphi)}{2}-\varphi\right)-\mu\sin\varphi,$$

$$C(\varphi)=(\mu\cos\varphi-\mu-\nu+\varepsilon)\cos\left(\frac{\omega(\varphi)}{2}-\varphi\right)-$$

$$-\mu\sin\varphi\left(\frac{\omega(\varphi)}{2}-\varphi\right),$$

$$D(\varphi)=\mu\sin\varphi\cos\left(\frac{\omega(\varphi)}{2}-\varphi\right)+$$

$$+(\mu\cos\varphi-\mu-\nu+\varepsilon)\sin\left(\frac{\omega(\varphi)}{2}-\varphi\right),$$

$$\omega(\varphi)=\arg(A+iB),\quad l(\varphi)=\sqrt{A^2+B^2},$$

де $A=\mu^2-2\mu(\varepsilon-\nu)+\mu^2-2\mu(\varepsilon-\nu)+4\varepsilon\nu$,

$$B=[(\varepsilon-\mu-\nu)^2+4\varepsilon\nu]\sin2\varphi+$$

$$+2\mu(\varepsilon-\mu-\nu)\sin\varphi.$$

$P_{01}^*(t,r)$ має вигляд:

$$\gamma(\varphi)=\gamma_1(\varphi)\cos(\lambda t\sin\varphi)-\delta_1(\varphi)\sin(\lambda t\sin\varphi),$$

$$\delta(\varphi)=\gamma_1(\varphi)\sin(\lambda t\sin\varphi)+\delta_1(\varphi)\cos(\lambda t\sin\varphi),$$

$$P_{01}^*(t,r)=\frac{\nu e^{-\lambda t}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{\lambda t\cos\varphi}}{\sqrt{l}}\gamma(\varphi)\cos r\varphi d\varphi+$$

$$+\frac{\nu e^{-\lambda t}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{\lambda t\cos\varphi}}{\sqrt{l}}\delta(\varphi)\sin r\varphi d\varphi.$$

Тут $\gamma_1(\varphi)=\alpha(\varphi)\cos\left(\frac{\omega(\varphi)}{2}-\varphi\right)+$

$$+\beta(\varphi)\sin\left(\frac{\omega(\varphi)}{2}-\varphi\right),$$

$$\delta_1(\varphi)=\alpha(\varphi)\sin\left(\frac{\omega(\varphi)}{2}-\varphi\right)+$$

$$+\beta(\varphi)\cos\left(\frac{\omega(\varphi)}{2}-\varphi\right),$$

$$\alpha(\varphi)=-e^{\frac{1}{2}E_4(\varphi)t}\cos\left(\frac{1}{2}F_4(\varphi)t\right)+$$

$$+e^{\frac{1}{2}E_3(\varphi)t}\cos\left(\frac{1}{2}F_3(\varphi)t\right),$$

$$\beta(\varphi)=e^{\frac{1}{2}E_4(\varphi)t}\sin\left(\frac{1}{2}F_4(\varphi)t\right)+$$

$$+e^{\frac{1}{2}E_3(\varphi)t}\sin\left(\frac{1}{2}F_3(\varphi)t\right).$$

Коли компонента допоміжного процесу ξ_t^* приймає великі за абсолютною величиною значення r, під знаком звичайних інтегралів в виразах $P_{00}^*(t,r)$ стоять швидкоосцилюючі функції. Наближене обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій за допомогою звичайних квадратурних формул (прямокутників, трапецій, Симсона) недоцільне. В цьому випадку можна скористатись методом Філона, який призначений для обчислення інтегралів виду

$$I_1=\int_a^b f(p)\cos xp dp, I_2=\int_a^b f(p)\sin xp dp,$$

коли x не є малою величиною [5].

Інтервал інтегрування ділиться на $2n$ частин з кроком h. Позначимо $\theta=xh.$ Тоді основні розрахункові формули мають вигляд:

$$\int_a^b f(p)\cos xp dp\approx h\{\alpha[f(b)\sin xb-$$

$$-f(a)\sin xa]+\beta C_{2n}+\gamma C_{2n-1}\},$$

$$\int_a^b f(p)\sin xp dp\approx h\{-\alpha[f(b)\cos xb-$$

$$-f(a)\cos xa]+\beta S_{2n}+\gamma S_{2n-1}\},$$

де $\alpha,\beta,\gamma,$ які є функціями θ, визначаються з наступних співвідношень:

$$\theta^3\alpha=\theta^2+\theta\sin\theta\cos\theta-2\sin^2\theta,$$

$$\theta^3\beta=2[\theta(1+\cos^2\theta)-2\sin\theta\cos\theta],$$

$$\theta^3\gamma=4[\sin\theta-\theta\cos\theta];$$

$C_{2n}-$ сума всіх парних ординат кривої $y=f(p)\cos xp,$ які знаходяться між a та b, за винятком половини першої та останньої ординати;

$C_{2n-1}-$ сума всіх непарних ординат;

$S_{2n}-$ сума всіх парних ординат кривої $y=f(p)\sin xp,$ які знаходяться між a та b, за винятком половини першої та останньої ординати;

$S_{2n-1}-$ сума всіх непарних ординат.

В методі Філона передбачається, що функція $f(p)$ з достатньою точністю апроксимується параболічною дугою на кожному з інтервалів

$$(a,a+2h),(a+2h,a+4h),...,$$

$$(a+2(n-1)h,a+2nh),$$

де $a+2nh=b.$

Для наближеного розв’язування інтегрального рівняння (4) можна скористатися, наприклад, методом скінченних сум [6].

Розглянемо інтервал $[0;t]$ і обчислимо $P_{00}(t)$. Візьмемо на інтервалі систему рівновіддалених точок $t_i=ih, i=\overline{0,n},$ де $h=\frac{t}{n}, t_n=t.$ Покладемо в (4) $t=t_i$ та використаємо для наближеного обчислення інтегрального члену формулу лівосторонніх прямокутників з вузлами в точках $t_0,t_1,...,t_{i-1}$. Одержимо рекурентну процедуру:

$$P_{00}(0)=1,$$

$$P_{00}(t_i)=c_{0,0}(t_i)+\sum_{k=0}^{i-1}[(\mu+\nu)P_{00}^*(t_i-t_k,0)-$$

$$-\nu P_{01}^*(t_i-t_k,0)-\mu P_{00}^*(t_i-t_k,1)]P_{00}(t_k),$$

$$i=\overline{1,n}, \qquad (5)$$

звідки

$$P_{00}(t)=P_{00}(t_n)=c_{00}(t_n)+\sum_{k=0}^{n-1}[(\mu+\nu)P_{00}^*(t_n-t_k,0)-$$

$$-\nu P_{01}^*(t_n-t_k,0)-\mu P_{00}^*(t_n-t_k,1)]P_{00}(t_k).$$

Таким чином, запропонована методика дає алгоритм розрахунку ймовірностей станів досліджу вальної системи з використанням чисельних методів. Ймовірності станів системи є найбільш інформативними її характеристиками. Використовуючи їх, можна розрахувати інші важливі характеристики роботи системи – середню довжину черги, середній час дожидання однією заявкою початку обслуговування, середнє число приладів, зайнятих обслуговуванням заявок та ін.

Крім того, збільшуючи значення t, можна наближено розрахувати час, через який в системі встановлюється стаціонарний режим роботи. Умови існування стаціонарного режиму в одно канальній системі масового обслуговування розглядуваного типу досліджувались в роботі [7].

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Гнеденко Б. В. Введение в теорию массового обслуживания / Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. – М.: Наука, 1987.
2. Алиев Т. М. Управляемые пуассоновские процессы с границами и их применение. / Т. М. Алиев, И. И. Ежов - К.: Рукопись деп. в ВИНИТИ 15 марта 1976 г., № 796 – 76 Деп.
3. Ежов И. И. Теория вероятностей и ее применения: Сб. статей. / И. И. Ежов, А. В. Скороход // Марковские процессы, однородные по второй компоненте I. - Т. 14, № 1. - М., 1969. – С. 4-14.
4. Ежов И. И. Теория вероятностей и ее применения: Сборник статей. / И. И. Ежов, А. В. Скороход // Марковские процессы, однородные по второй компоненте II. - Т. 14, № 4. - М., 1969. – С. 679 -692.
5. Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике. - М.: Гостехиздат, 1956.
6. Крылов В. И. Вычислительные методы. / В. И. Крылов, П. И. Монастырский, В. В. Бобков, Т. 2. - М.: Наука, 1977.
7. Алиев Т. М. Условие эргодичности однолинейной системы массового обслуживания с ненадежным прибором. Меж. вед. научн. сб. «Теория вероятности и математическая статистика». Вып. 14, 1976.

Надійшла до редакції 27.09.2007.