УДК 536.24

В. О. ЯКОВЕНКО (Академія митної служби України, м. Дніпропетровськ)

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ РОЗДРІБНЕННЯ ЗАМЕРЗЛИХ НАСИПНИХ ВАНТАЖІВ У ЗАЛІЗНИЧНИХ ВАГОНАХ З ВИКОРИСТАННЯМ МІКРОХВИЛЬОВОЇ ЕНЕРГІЇ

Побудована математична модель роздрібнення замерзлих насипних вантажів з використанням енергії мікрохвильового електромагнітного поля. Визначені поля температур, вмісту вологи і теплових напруг у вантажі в процесі його руйнування з урахуванням змінної межі розподілу фаз.

Построена математическая модель разупрочнения смерзшихся насыпных грузов с использованием энергии микроволнового электромагнитного поля. Определены поля температур, влагосодержания и тепловых напряжений в грузе в процессе его разрушения с учетом переменной области раздела фаз.

The mathematical model of destruction of the frozen bulk cargos with use of energy of the microwave electromagnetic field is constructed. Fields of temperatures, moisture content and thermal stresses in the cargo during its destruction with taking into account the variable domain of phase interface are determined.

Вступ

Насипні вантажі являють собою дисперсні матеріали, що використовуються практично у всіх галузях промисловості. Транспортування в залізничних вагонах у зимовий період замерзлих насипних вантажів ускладнюється через необхідність відновлення їх сипкості, збільшення вартості робіт з вивантаження і збільшення часу простою вагонів на станціях призначення [1, 2, 3, 4].

В даний час для боротьби з проблемою замерзання насипних вантажів використовуються профілактичні способи, що зберігають сипкість вантажів під час перевезення (зневоднювання, додавання негашеного вапна, солі, обпилювань). Профілактичні способи збереження сипкості вантажів є матеріаломісткими, дорогими і не забезпечують повного збереження сипкості. Найбільш часто для відновлення сипкості замерзлих насипних вантажів у пунктах їхнього отримання використовуються тепляки. Теплова енергія, що подається до тепляків, марно витрачається на нагрівання великого обсягу повітря, стін, підлоги і стелі приміщення тепляка, конструктивних елементів і вузлів вагонів, а також втрачається в транспортних трубах перегрітої пари або гарячої води. Тому виникає необхідність у дослідженнях і розробці нових енергозберігаючих способів і технологій відновлення сипкості замерзлих насипних вантажів. Одним з перспективних методів є відновлення сипкості замерзлих насипних вантажів з використанням енергії мікрохвильового електромагнітного поля [5, 6, 7].

Постановка задачі

Розглянемо нестаціонарний процес теплообміну, що виникає під дією мікрохвильової енергії. Такий процес будемо визначати системою нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних, яка складається з рівнянь Максвела і рівнянь теплопровідності наступного виду:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial \tau}, \quad \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial \tau},$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = 0, \quad \operatorname{div}\vec{B} = 0,$$

$$\vec{D} = \varepsilon(t)\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu(t)\vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma(t)\vec{E},$$

$$\frac{\partial\left(c_i\rho_i t_i\right)}{\partial \tau} + \vec{V}_i\vec{\nabla}t_i = \operatorname{div}\left(\lambda_i\vec{\nabla}t_i\right) + q\left(t_i, \vec{E}\right),$$

де $\vec{E}, \vec{H}$ – вектори напруженості електричного та магнітного полів відповідно, $\vec{D}, \vec{B}$ – вектори електричної та магнітної індукції відповідно, $\vec{j}$ – щільність струму провідності, $\varepsilon_i = \varepsilon' - i\varepsilon'' = \varepsilon' - i\sigma/\omega$, μ – абсолютні діелектрична і магнітна проникності матеріалу відповідно, σ - провідність матеріалу, ω - кругова частота, c_i, ρ_i, λ_i - коефіцієнт теплоємності, щільність і коефіцієнт теплопровідності матеріалу, що залежать від температури i-ої фази, $\vec{V}_i$ – вектор швидкості переміщення i-го матеріалу, $\vec{\nabla}$ – оператор Гамільтона,

$q = 0,5\omega\varepsilon'\text{tg}\delta\left|\vec{E}\right|^2$ – питома поглинена потужність, t_i – температура i-го матеріалу, $\text{tg}\delta = \varepsilon''/\varepsilon'$ – тангенс кута діелектричних утрат матеріалу.

Наведена система рівнянь доповнюється початковими та граничними умовами, а також умовою на межі розділу фаз.

Слід зазначити, що розв'язок наведеної системи рівнянь пов'язаний з трудрощами не тільки обчислювального характерові, але й принциповими. Таке твердження ґрунтується на наступному: умови на межі розділу фаз є нелінійними, сформульована модель є багатомірною відносно просторових змінних, електрофізичні параметри матеріалів залежать від температури і є наближеними, алгоритми розв'язку таких задач вимагають обґрунтування та використання специфічних комп'ютерних технологій.

Тому слід розглянути спрощену модель процесу, реалізацію якої можна провести методами комп'ютерного моделювання. Для такої моделі слід довести її відповідність відомим моделям або порівняти отримані результати з експериментальними.

Мікрохвильовий нагрів викликає в діелектричному матеріалі такий фізико-хімічний процес, протікання якого супроводжується переміщенням границь фаз [8]. Тоді задача теплопровідності з рухомими границями фаз, для випадку, коли температура фазового переходу є функція координат і часу, а переміщення границь є або не є наслідком фазових перетворень, включає наступне рівняння для кожної з фаз:

$$c\rho\frac{\partial t}{\partial \tau} = \text{div}\left(\lambda \ \text{grad}t\right) + s, \qquad (1)$$

де c – теплоємність; ρ – щільність; λ – коефіцієнт теплопровідності; s – щільність теплових джерел є відомими функціями координат, часу τ або температури t.

Положення рухомої границі встановлюється відповідно до умови, що температура на ній дорівнює температурі фазового перетворення $t_ф$, що передбачається заданою у виді функції координат і часу. Швидкість переміщення $d\xi/d\tau$ в напрямку нормалі h до граничної поверхні, підлягає визначенню з умови для внутрішніх границь фазових перетворень у вантажі:

$$\lambda(p-0)\frac{\partial t(p-0)}{\partial h} - \lambda(p+0)\frac{\partial t(p+0)}{\partial h} = \rho L\frac{d\xi}{d\tau} \qquad (2)$$

$$t(p-0) = t(p+0) = t_ф$$

і для зовнішніх границь:

$$Q_0 - \lambda\frac{\partial t(p)}{\partial h} = \rho L\frac{d\xi}{d\tau},$$

$$t(p) = t_ф. \qquad (3)$$

У цих умовах для фази $t(x,y,z,\tau) < t_ф$ буде залежність $f(p-0) = \lim\limits_{(x,y,z)\to p-0} f(x,y,z,\tau)$, а для фази $t(x,y,z,\tau) > t_ф$, залежність $f(p+0) = \lim\limits_{(x,y,z)\to p+0} f(x,y,z,\tau)$; L – теплота фазового переходу; ρ – щільність вантажу в шарі.

Припустимо, що під дією мікрохвильового нагрівання у вантажі відбувається випарювання вологи. Тоді температурні поля у фазах і границя розподілу фаз визначаються системою рівнянь (1…3).

Розглянемо теплообмін з подальшим роздрібненням замерзлого вантажу, що складається з теплопровідного матеріалу, під дією мікрохвильового випромінювання, що ініціює в ній внутрішнє джерело тепла потужності q_1. Припустимо, що теплофізичні параметри вантажу не залежать від температури, а його щільність не змінюється при руйнуванні і зневажимо теплообміном твердої фази і рідкої фази, яка присутня у вантажі у вигляді вологи, з навколишнім середовищем.

Нехай перенесення пари, що утворилася в результаті нагрівання, через поверхню $z = 1$ (усередину вантажу) неможливе. На відкритій поверхні вантажу ($z = 0$) відбувається випарювання і віднесення в навколишнє середовище як пари, що утворилася на цій поверхні, так і пари, що утворилася усередині шару і транспортується через нього. Границя фазового перетворення $\eta(\tau)$ визначає перемінну товщину сухої області. Тоді для вологої області вантажу задача має вигляд [9]:

$$\frac{\partial t_1}{\partial \tau} = a_1\frac{\partial^2 t_1}{\partial z^2} + \frac{q_1}{c_1\rho_1}$$

$$(0 < z < \eta(\tau), \tau > 0) \qquad (4)$$

$$t_1(0,z) = \varphi_1(z),$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial z}\bigg|_{z=0} = q_1(\tau),$$

$$t_1(\eta(\tau),\tau) = \varphi_2(\tau)$$

разом з рівнянням:

$$\frac{\partial t_1}{\partial \tau} = \Omega \vec{E}^2 f_1 .$$

Для сухої області вантажу

$$\frac{\partial t_2}{\partial \tau} = a_2 \frac{\partial^2 t_2}{\partial z^2}, \ (\eta(\tau) < z < l, \tau > 0) \qquad (5)$$

$$t_2(0,z) = \varphi_1(z),$$

$$-\lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial z}\bigg|_{z=l} = (1-\zeta) q_2(\tau),$$

$$t_2(\eta(\tau),\tau) = \varphi_2(\tau)$$

разом з рівнянням:

$$\frac{\partial t_2}{\partial \tau} = \Omega \vec{E}^2 f_2 ,$$

і з рівнянням теплового балансу

$$\lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial z}\bigg|_{z=\eta} - \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial z}\bigg|_{z=\eta} =$$

$$= w(\tau)\zeta + (c_2\rho_2 - c_1\rho_1)\varphi_2(\tau)\frac{d\eta}{d\tau},$$

$$\eta(0) = 0 , \qquad (6)$$

де ζ – коефіцієнт фазового перетворення рідини в пару, t_1 і t_2 – відповідно температура вологого і сухого вантажу, τ – час, $\varphi(\tau)$, $q(\tau)$, $w(\tau)$ – будь-яка неперервна функція часу, z – вісьова координата, a – коефіцієнт температуропровідності породи, λ – коефіцієнт теплопровідності вантажу, ρ – щільність шару вантажу, c – питома теплоємність вантажу.

Розв'язок задачі

Для розв'язання отриманих рівнянь з відповідними крайовими умовами (4, 5, 6) застосуємо метод кінцевих інтегральних перетворень, що є найбільш зручним для рішення задач такого типу [10]. Застосовуючи інтегральне перетворення з рухомою, залежною від часу, межею інтегрування, одержуємо системи звичайних диференціальних рівнянь щодо перетворених функцій.

Тоді розподіл температури у вологій і сухій області вантажу має відповідно вигляд [11]:

$$t_1(\tau,z) = \frac{2}{\eta}\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{t}_{1n}(\tau)\cos\alpha_n z/\eta, \qquad (7)$$

де $\tilde{t}_{1n}(\tau) = \int_0^{\eta(\tau)} t_1(\tau,z)\cos\alpha_n z/\eta dz,$ $\cos\alpha_n z/\eta$, $\alpha_n = \pi(2n-1)/2$ – власні функції;

$$t_2(z,\tau) = \frac{2}{l-\eta}\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{t}_{2n}(\tau)\sin\frac{\alpha_n}{l-\eta}(z-\eta), \qquad (8)$$

де $\tilde{t}_{2n}(\tau) = \int_\eta^l t_2(z,\tau)\sin\frac{\alpha_n}{l-\eta}(z-\eta)dz$.

Закон руху границі фазового перетворення при висушуванні вологої частини вантажу визначимо з умови (6):

$$\lambda_2 \frac{2}{(l-\eta)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n \tilde{t}_{2n}(\tau) +$$

$$+\lambda_1 \frac{2}{\eta^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \alpha_n \tilde{t}_{1n}(\tau) =$$

$$= w(\tau)\zeta + (c_2\rho_2 - c_1\rho_1)\varphi_2(\tau)\frac{d\eta}{d\tau}. \qquad (9)$$

Задачу по визначенню полів вологомісткості у вантажі, можна сформулювати таким чином:

1. для вологої частини [9]:

$$\frac{\partial U_1}{\partial \tau} = a_{m1}\frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2}, (0 < z < \eta(\tau), \tau > 0) \qquad (10)$$

$$U_1(0,z) = \psi_1(z),$$

$$U_1(\tau,0) = \psi_2(\tau),$$

$$U_1(\tau,\eta(\tau)) = \psi_3(\tau)$$

разом з рівнянням:

$$\frac{\partial U_1}{\partial \tau} = \Omega \vec{E}^2 f_1;$$

2. для сухої частини:

$$\frac{\partial U_2}{\partial \tau} = a_{m2}\frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2}, \ (\eta(\tau) < z < l, \tau > 0) \qquad (11)$$

$$U_2(0,z) = \psi_1(z),$$

$$U_2(\tau,\eta(\tau)) = \psi_3(\tau),$$

$$U_1(\tau,l)=\psi_4(\tau)$$

разом з рівнянням:

$$\frac{\partial U_2}{\partial\tau}=\Omega\vec{E}^2 f_2 .$$

Рівняння руху границі розподілу вологої і сухої частин у вантажі:

$$\frac{d\eta}{d\tau}=\frac{1}{U(\tau)}\left(a_{m2}\frac{\partial U_2}{\partial z}\bigg|_{z=\eta}-a_{m1}\frac{\partial U_1}{\partial z}\bigg|_{z=\eta}\right),$$

$$\eta(0)=0 . \qquad (12)$$

Припускаючи, що вміст вологи $U(\tau)$ дорівнює середньому інтегральному вмісту вологи $\tilde{U}(\tau)$ у вологій частині, наведемо рішення розглянутої задачі в загальній постановці.

Застосовуючи інтегральне синус-перетворення Фур'є зі змінною межею інтегрування до рівняння (10) з його крайовими умовами, одержимо розподіл вмісту вологи у вологій частині вантажу у виді:

$$U_1(\tau,z)=\frac{2}{\eta}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{U}_{1n}(\tau)\sin\frac{n\pi}{\eta}z, \qquad (13)$$

де коефіцієнти зображень при відомому (12) законі руху границі розподілу фаз $\eta(\tau)$ визначаються із системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\frac{d\tilde{U}_{1n}}{d\tau}=\frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{d\tau}\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{nm}\tilde{U}_{1m}-$$

$$-\left(\frac{n\pi}{\eta}\right)^2 a_{m1}\tilde{U}_{1n}+\frac{a_{m1}n\pi}{\eta}\left[\psi_2(\tau)-(-1)^n\psi_3(\tau)\right],$$

$$\tilde{U}_{1n}(0)=\int_0^{\eta(0)}\psi_1(z)\sin\frac{n\pi}{\eta(0)}z\,dz ,$$

$$\beta_{nm}=\frac{(-1)^{n+m}2nm}{m^2-n^2},(n\ne m);\ \beta_{nm}=0.5,(n=m) .$$

Рішення задачі в сухій частині може бути представлено рівнянням виду:

$$U_2(\tau,z)=\frac{2}{l-\eta}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{U}_{2n}(\tau)\sin\frac{n\pi}{l-\eta}(z-\eta) . \qquad (14)$$

Для коефіцієнтів-зображень $\tilde{U}_{2n}(\tau)$ отримана система диференціальних рівнянь, що має вид:

$$\frac{d\tilde{U}_{2n}}{d\tau}=\frac{1}{\eta-l}\frac{d\eta}{d\tau}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{n+m}\beta_{nm}\tilde{U}_{2m}-\left(\frac{n\pi}{l-\eta}\right)^2 a_{m2}\tilde{U}_{2n}+$$

$$+\frac{a_{m2}n\pi}{l-\eta}\left[\psi_3(\tau)-(-1)^n\psi_4(\tau)\right],$$

$$\tilde{U}_{2n}(0)=\int_{\eta(0)}^{l}\psi_1(z)\sin\frac{n\pi}{l-\eta(0)}(z-\eta(0))dz .$$

Вираження для профілю поверхні розподілу при русі границі розподілу вологого і сухого вантажу $\eta(\tau)$ визначимо підстановкою рівнянь (13) і (14) у співвідношення (12). Виконавши перетворення, остаточно одержимо:

$$\frac{d\eta}{d\tau}=\frac{1}{\tilde{U}(\tau)}\left[a_{m2}\frac{2\pi}{(l-\eta)^2}\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^n\tilde{U}_{2n}-\right.$$

$$\left.-a_{m1}\frac{2\pi}{\eta^2}\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^n\tilde{U}_{1n}\right]. \qquad (15)$$

Отримані системи диференціальних рівнянь відносно $\tilde{U}_{1n}(\tau)$, $\tilde{U}_{2n}(\tau)$ разом з рівнянням (15) дозволяють визначити розподіл вмісту вологи у вологій і сухій частинах вантажу, а також закон руху границі фазового перетворення при подальшому його роздрібненні.

Зміна температурних полів t_1 і полів вмісту вологи U_1 у вантажі із вмістом вологи і зміна температурних полів t_2 і полів вмісту вологи U_2 у сухому зруйнованому вантажі в залежності від частоти змінного електричного поля мають вигляд:

$$\frac{\partial t_{1,2\rho}}{\partial\tau}=\Omega f_{1,2}\left[\left(\left(m^2-\frac{1}{4}\right)\frac{J_0(\kappa\rho)}{\sqrt{1-\rho\cos\theta}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\kappa}{2\rho}\frac{2-3\rho\cos\theta}{\sqrt{(1-\rho\cos\theta)^3}}J_1(\kappa\rho)\right]^2\sin^2\theta\cos^2 m\varphi e^{2j\omega t}\right.,$$

$$\frac{\partial t_{1,2\theta}}{\partial\tau}=$$

$$=\Omega f_{1,2}\left(\left[\frac{\kappa^2+m^2-1/4}{\sqrt{1-\rho\cos\theta}}J_0(\kappa\rho)-\frac{\kappa J_1(\kappa\rho)}{\rho\sqrt{1-\rho\cos\theta}}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\cos\theta\cos m\varphi e^{j\omega t}+\frac{\kappa J_1(\kappa\rho)\sin^2\theta\cos m\varphi}{2\sqrt{(1-\rho\cos\theta)^3}}e^{j\omega t}\right)^2,$$

$$\frac{\partial t_{1,2\varphi}}{\partial\tau}=\Omega f_{1,2}\frac{m^2\kappa^2 J_1^2(\kappa\rho)\sin^2\theta\sin^2 m\varphi}{(1-\rho\cos\theta)^3}e^{2j\omega t}.$$

Прийнявши до уваги залежність між частотою і температурою, можна аналогічно визначити залежність між вмістом вологи у вантажі і частотою діючого електромагнітного поля:

$$\frac{\partial U_{1,2\rho}}{\partial\tau}=\Omega f_{1,2}\left[\left(m^2-\frac{1}{4}\right)\frac{J_0(\kappa\rho)}{\sqrt{1-\rho\cos\theta}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\kappa}{2\rho}\frac{2-3\rho\cos\theta}{\sqrt{(1-\rho\cos\theta)^3}}J_1(\kappa\rho)\right]^2\sin^2\theta\cos^2 m\varphi e^{2j\omega t},$$

$$\frac{\partial U_{1,2\theta}}{\partial\tau}=\Omega f_{1,2}\left(\left[\frac{\kappa^2+m^2-1/4}{\sqrt{1-\rho\cos\theta}}J_0(\kappa\rho)-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{\kappa J_1(\kappa\rho)}{\rho\sqrt{1-\rho\cos\theta}}\right]\times\cos\theta\cos m\varphi e^{j\omega t}+$$

$$\left.+\frac{\kappa J_1(\kappa\rho)\sin^2\theta\cos m\varphi}{2\sqrt{(1-\rho\cos\theta)^3}}e^{j\omega t}\right)^2,$$

$$\frac{\partial U_{1,2\varphi}}{\partial\tau}=\Omega f_{1,2}\frac{m^2\kappa^2 J_1^2(\kappa\rho)\sin^2\theta\sin^2 m\varphi}{(1-\rho\cos\theta)^3}e^{2j\omega t}.$$

Визначимо відповідні динамічні теплові напруги, припускаючи відсутність поверхневих сил і сил інерції [12] у вигляді :

$$\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=-\frac{2g\alpha_T}{(1-\upsilon)(l-\xi)}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\sin\frac{nz(z-\xi)}{l-\xi},$$

де α_T – середній коефіцієнт лінійного теплового розширення; g – ізотермічний модуль пружності ; υ – коефіцієнт Пуассона.

Висновок

Побудовано математичну модель роздрібнення замерзлих насипних матеріалів з використанням енергії мікрохвильового електромагнітного поля. Визначені поля температур, вмісту вологи і теплових напруг у вантажі в процесі його руйнування з урахуванням змінної області розподілу фаз.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ ПЕРЕЛІК

1. Иванов И. С. Теплофизические свойства насыпных грузов / И. С. Иванов, А. В. Степанов, П. И. Филиппов. – Новосибирск: Наука, 1974. – 96 с.
2. Кожевников Н. Н. Прогнозирование процессов промерзания в сыпучих материалах при железнодорожных перевозках / Н. Н. Кожевников, В. И. Попов. – Новосибирск: Наука, 1978. – 104 с.
3. Маталасов С. Ф. Совершенствование перевозок смерзающихся навалочных грузов / С. Ф. Маталасов, Ю. А. Носков // Железнодорожный транспорт, 1965, № 1. – С. 27-29.
4. Борьба со смерзаемостью металлургического сырья при перевозках по железнодорожным дорогам / С. Ф. Маталасов, Я. М. Куржуков, А. С. Хорунжий и др. – М.: Металлургия, 1976. – 248 с.
5. Рикенглаз Л. Э. Экспериментальное исследование прочности мерзлых пород в СВЧ электромагнитном поле / Л. Э. Рикенглаз, О. Б. Шонин, В. А. Хоминский // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых, 1980, № 3. – С. 47-51.
6. Шонин О. Б. Электрические свойства мерзлых пород в СВЧ - диапазоне / О. Б. Шонин, Н. В. Соколова // Физические процессы горного производства, 1981, № 9. – С. 48-52.
7. Линник Ю. М. Основы разупрочнения мерзлых пород СВЧ - полями. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1982. – 212 с.
8. Яковенко В. О. Моделювання процесу надвисокочастотного сушіння пористих діелектричних матеріалів // Вісник АМСУ, 2007, № 2 (34). – С. 107-111.
9. Лыков А. В. Теплообмен: Справочник. – М.: Энергия, 1971. – 560 с.
10. Корн Г. Справочник по математике для научных работников / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1970.
11. Яковенко В. О., Моделювання теплообміну при збудженні в матеріалі надвисокочастотного поля // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла, Вип. 7. – Д.: Дніпропетровський нац. ун-т, 2006. – С. 163-168.
12. Коваленко А. Д. Термоупругость. – К.: Вища школа, 1975. – 216 с.

Надійшла до редколегії 19.02.2008.