

МОДЕЛЬ ВЫНОСЛИВОСТИ МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ ЭВОЛЮЦИИ ИХ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

У статті надано математичну модель, що описує процес зміни границі витривалості матеріалів і конструкцій залізничного рухомого складу з урахуванням зміни параметрів кривої витривалості в процесі їх навантаження.

В статье представлена математическая модель, описывающая процесс изменения предела выносливости материалов и конструкций железнодорожного подвижного состава с учетом изменения параметров кривой выносливости в процессе их нагружения.

In the article the mathematical model describing the process of changing a limit of durability of the railway rolling stock materials and structures with taking into account the change of parameters of durability curve during loading them is presented.

Исследование выносливости распространенных конструкционных материалов является неизменно актуальной проблемой. Поэтому разработка и совершенствование математических моделей, описывающих характеристики сопротивления усталости с учетом их изменения в процессе длительной работы конструкций, важна при решении задач прогнозирования и продления сроков службы, а также оценки их механических свойств.

В работе [1] предложена математическая модель, позволяющая описывать процесс понижения предела выносливости материала или детали под действием циклических нагрузок. Модель основана на использовании наиболее распространенной степенной аппроксимации кривой выносливости (Вёллера).

Основным расчетным соотношением, описывающим согласно [1] характер изменения во времени предела выносливости, является интегродифференциальное уравнение вида

$$\frac{d(\sigma_{-1}^m)}{dt} + \frac{\lambda}{N_{-1}} \int_{\sigma_{-1}}^{\infty} \sigma^m f(\sigma) d\sigma = 0, \quad (1)$$

здесь $\sigma_{-1} = \sigma_{-1}(t)$ – предел выносливости материала или конструкции как функция времени t ; $\lambda = dn/dt$ – постоянная для стационарного или квазистационарного режимов нагружения интенсивность колебаний, определяемая как количество их циклов n в единицу времени; m – показатель степени кривой выносливости; N_{-1} – количество циклов нагружения образца или детали, соответствующее напряжению σ_{-1} (точка перелома кривой выносливости), принятое в работе [1] постоянным; $f(\sigma)$ – дифференциаль-

ная функция закона распределения вероятности появления в образце или детали напряжений с амплитудой σ .

При действии длительных переменных нагрузок параметры N_{-1} и m , которые относятся к механическим характеристикам материала (детали), меняются. Это явление обсуждается во многих работах (например, [2-4]). Поэтому эти параметры можно попытаться рассматривать как функции времени $N_{-1} = N_{-1}(t)$, $m = m(t)$ или предела выносливости $N_{-1} = N_{-1}(\sigma_{-1}(t))$, $m = m(\sigma_{-1}(t))$, когда сам предел выносливости является функцией времени.

Один из возможных способов задания характера изменения показателя степени кривой выносливости может быть предложен на основе эмпирического регрессионного уравнения, приведенного в работе [4]

$$m = 33 \cdot \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_b}, \quad (2)$$

где σ_b – предел прочности материала (или конструкции).

Эргодичность зависимости (2) на случай изменения предела выносливости в течение времени нагружения (то есть справедливость данного соотношения как для выборки по образцам из разных материалов, так и по реализациям процессов нагружения одного материала), по нашим данным, не исследовалась и не проверялась. Предположив справедливость такой зависимости и считая величину σ_b практически независимой [5] от времени, выражение (2) для материала в исходном состоянии и после нагружения в течение времени t запишем в форме

$$m_0 = 33 \cdot \frac{\sigma_{-10}}{\sigma_B};$$

$$m(t) = 33 \cdot \frac{\sigma_{-1}(t)}{\sigma_B}. \quad (3)$$

В выражениях (3): σ_{-10} – начальное (или на момент контроля выносливости) значение предела выносливости; m_0 – начальная (на момент контроля) величина показателя степени кривой выносливости.

Разделив выражения (3) одно на другое, получим соотношение, определяющее связь показателя $m(t)$ с пределом выносливости $\sigma_{-1}(t)$ в некоторый момент времени

$$m(t) = m_0 \cdot \frac{\sigma_{-1}(t)}{\sigma_{-10}} = k_m \cdot \sigma_{-1}(t), \quad (4)$$

здесь $k_m = m_0 / \sigma_{-10}$ – коэффициент пропорциональности между пределом выносливости и показателем степени кривой выносливости, зависящий только от начальных свойств материала.

В работе [2] предлагается также эмпирическое соотношение, связывающее положение точки перегиба N_{-1} в циклах (ассоциируемой с величиной базы испытаний на выносливость) с величиной предела выносливости σ_{-1} (в кН/см^2) и показателем степени её кривой m в форме

$$\lg(N_{-1}) = 4,3214 + (1,3596 - \lg \sigma_{-1}) \cdot m. \quad (5)$$

Преобразовав формулу (5) к виду

$$\lg(N_{-1}) + \lg(\sigma_{-1}) \cdot m = 4,3214 + 1,3596 \cdot m$$

и приняв обозначения $\lg(N_{-10}) = 4,3214$ и $\lg(\sigma_{-10}) = 1,3596$, после потенцирования получим следующее выражение для суммарного объема наработки $D(0)$ до разрушения

$$D(0) = N_{-10} \cdot \sigma_{-10}^{m(t)}. \quad (6)$$

В течение циклического нагружения объем наработки уменьшается на величину, текущее значение которой зависит от уровня разрушающего напряжения. Для постоянного напряжения амплитудой σ_n он составит

$$D(t) = D(0) - d(t);$$

$$d(t) = \sum_{k=0}^{n(t)} \sigma_n^{m(t_k)} \uparrow t_k \in \overline{0, t}. \quad (7)$$

здесь $d(t)$ – величина показателя наработки, накопленная при циклическом нагружении до текущего времени t ; $n(t)$ – количество циклов

нагружения материала или детали за период времени $\overline{0, t}$.

Следует отметить, что соображения, на основании которых получено выражения (5), не вполне понятны. Для поверхностной оценки возможности использования этого выражения для определения положения точки перегиба кривой выносливости рассмотрим два варианта его использования:

- с постоянным показателем степени кривой выносливости m , что приводит к зависимости

$$N'_{-1} = 10^{4,3214 + (1,3596 - \lg \sigma_{-1}) \cdot m}; \quad (8)$$

- с переменным показателем степени кривой выносливости m по уравнению (4), что приводит к выражению

$$N''_{-1} = 10^{4,3214 + (1,3596 - \lg \sigma_{-1}(t)) \cdot k_m \cdot \sigma_{-1}(t)}. \quad (9)$$

Рассмотрим оба эти выражения как функции величины предела выносливости σ_{-1} . Графики указанных функций приведены на рис. 1 и 2. При постоянном показателе степени кривой выносливости значение абсциссы точки перегиба кривой выносливости с уменьшением текущего значения предела выносливости монотонно и интенсивно возрастает. Таким образом, выражение (8) не совместно с фактом понижения величины σ_{-1} и одновременным увеличением крутизны кривой выносливости. Выражение (9), как видно из характера соответствующей функции, представляется более адекватным.

Однако, как показывают численные эксперименты, применение формулы (8), полученной путем усреднения данных по различным типам сталей, приводит к возникновению существенных погрешностей при определении наработок в циклах до разрушения. Это наводит на мысль о необходимости учета дополнительных факторов, таких как уровень нагружения, что, в частности, косвенно затрагивается в работе [6].

Величины суммарной наработки до разрушения, определенные как интеграл от выражения (7), очевидно, будут иметь различные значения при постоянном и переменном показателе кривой выносливости. Это будет учитываться далее простейшим образом, путем введения постоянного поправочного коэффициента при величине наработки, зависящего от величины действующего разрушающего напряжения, а именно, из (7)

$$d(t) = \alpha(\sigma_n) \cdot \sum_{k=0}^{n(t)} \sigma_n^{m(t_k)} \uparrow t_k \in \overline{0, t}, \quad (10)$$

α – поправка, зависит от величины разрушающего напряжения $\sigma_{и}$, которая находится как полиномиальная функция указанного напряжения.

Путем численного подбора получены следующие выражения для полиномов поправочных $\alpha(\sigma_{и})$, аппроксимирующих ее как функцию действующих разрушающих напряжений:

- для конструкции (при $k_{\sigma}=3,5$) – полином первого порядка

$$\alpha_k(\sigma_{и}) = 0,017 \cdot \sigma_{и} + 4,041;$$

- для материала (при $k_{\sigma}=1,0$) – полином третьего порядка

$$\alpha_m(\sigma_{и}) = 7,583 \cdot 10^{-6} \sigma_{и}^3 - 4,323 \cdot 10^{-3} \sigma_{и}^2 + 0,8934 \cdot \sigma_{и}^1 - 42,215.$$

Графики поправочных коэффициентов приведены на рис. 3, 4 в типичных для них пределах изменения разрушающих напряжений.

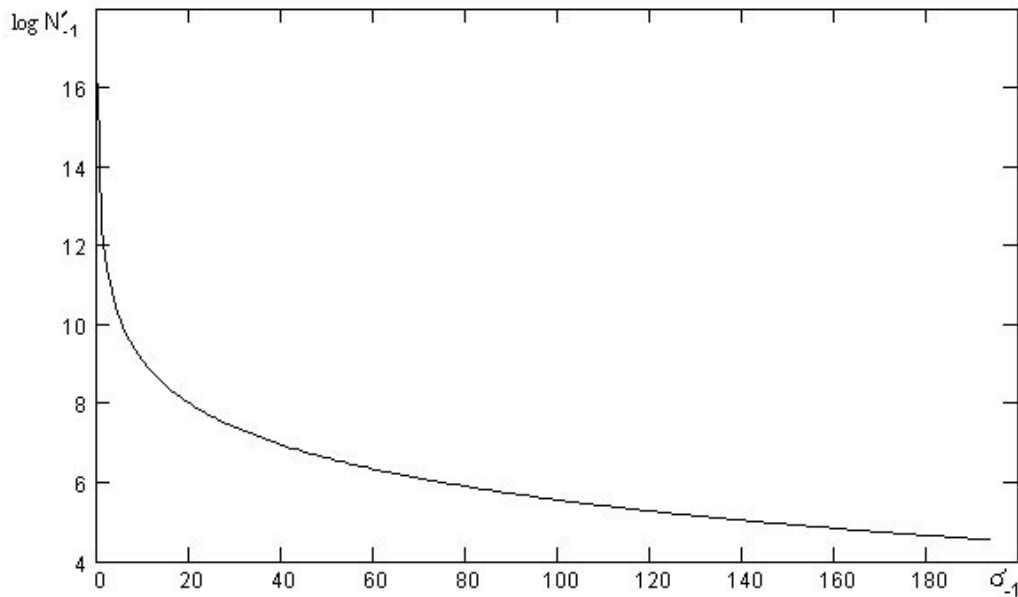


Рис. 1. Зависимость координаты точки перегиба в циклах от величины предела выносливости в МПа при постоянном показателе степени кривой выносливости

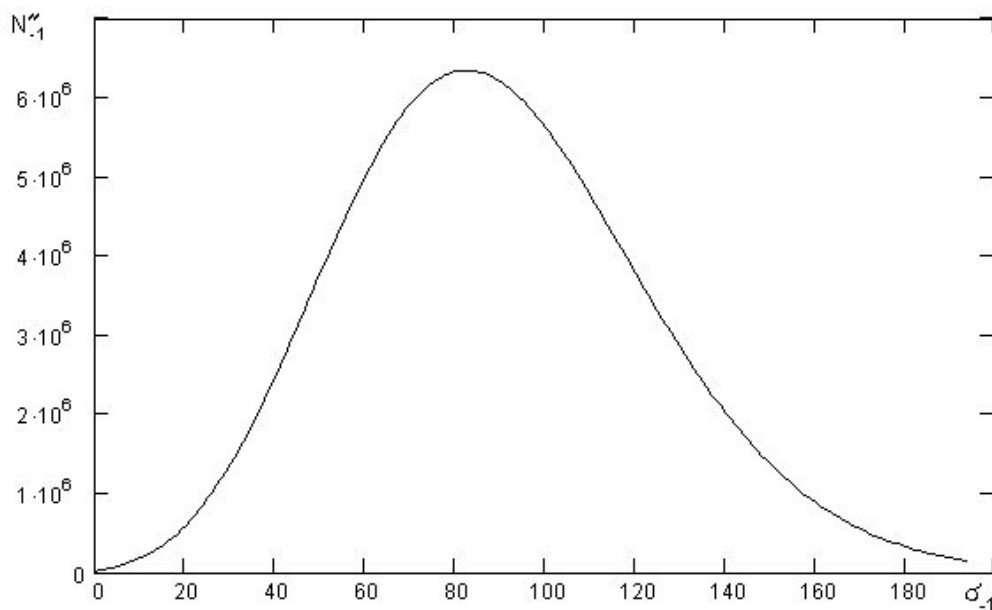


Рис. 2. Зависимость координаты точки перегиба в циклах от величины предела выносливости в МПа при переменном показателе степени кривой выносливости

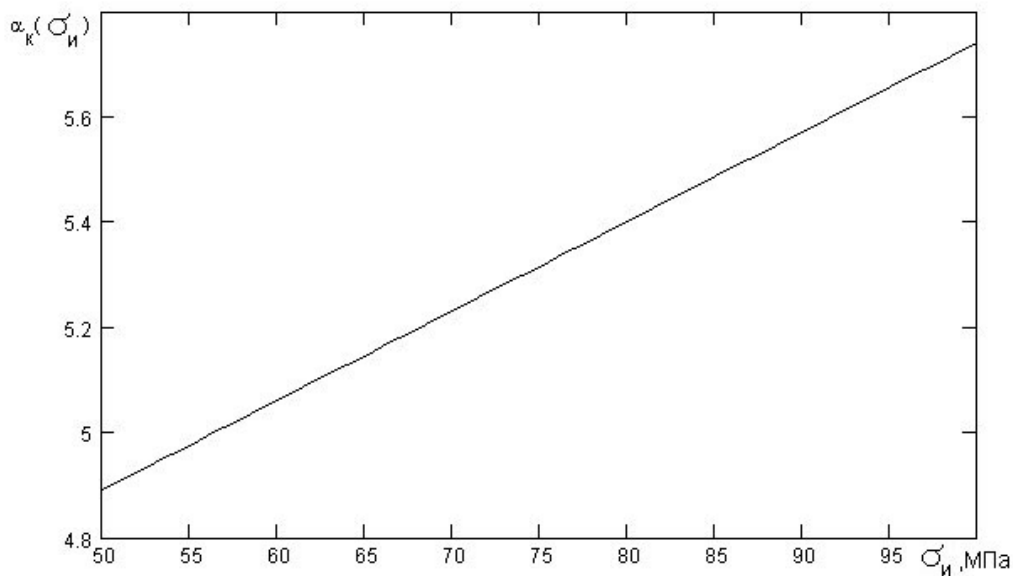


Рис. 3. Зависимость поправочного коэффициента наработки конструкции α_k от величины разрушающего напряжения $\sigma_{и}$

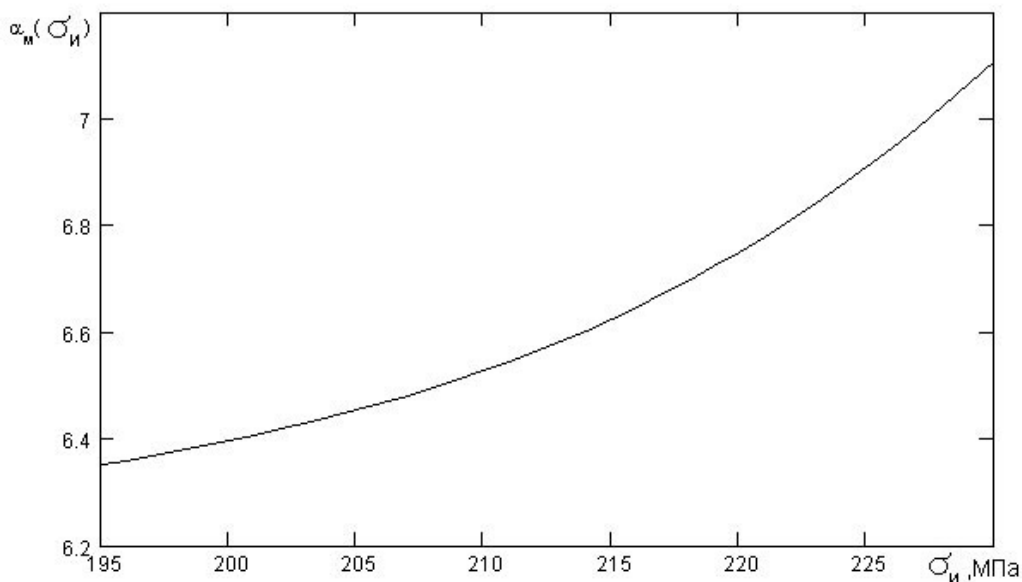


Рис. 4. Зависимость поправочного коэффициента наработки материала α_m от величины разрушающего напряжения $\sigma_{и}$

Для дальнейшего рассмотрения предположим, что на каждом цикле нагружения (или достаточно небольшой группе таких циклов) уменьшение наработки до разрушения материала или конструкции осуществляется за счет уменьшения предела выносливости. Это может быть объяснено тем, что при таком подходе в число разрушающих напряжений ($\sigma > \sigma_{-1}$) попадает наибольшее количество их амплитуд. Это приводит к получению нижней границы ресурса конструкции за счет вовлечения в число разрушающих напряжений большего их ко-

личества в процессе исчерпания наработки. Из выражения (6) получим

$$N_{-1}(t) = \frac{D(t)}{\sigma_{-1}(t)^{m(t)}} \cdot \quad (11)$$

В начальном состоянии (или на момент контроля выносливости) координата точки перелома кривой выносливости $N_{-1}(0)$ определяется уравнением

$$N_{-1}(0) = N_{-10} = \frac{D(0)}{\sigma_{-10}^{k_m \cdot \sigma_{-10}(0)}} \cdot \quad (12)$$

Предложенные соотношения (1), (4) отражают динамику изменения характеристик сопротивления усталости в среднем, что следует из самого способа их задания в уравнении (2), который основан на линейной эмпирической аппроксимации экспериментальных данных.

Выражения (1), (4) и (11) могут быть использованы для уточнения уравнения выносливости (1). Подставив (4), (11) в уравнение (1), имеем

$$\frac{d(\sigma_{-1}^{k_m \cdot \sigma_{-1}})}{dt} + \frac{\lambda \cdot (\sigma_{-1})^{k_m \cdot \sigma_{-1}}}{D(t)} \times \times \int_{\sigma_{-1}}^{\infty} \sigma^{k_m \cdot \sigma_{-1}} f(\sigma) d\sigma = 0. \quad (13)$$

Модифицированное уравнение выносливости (13) решается при следующих начальных условиях для нового образца или детали: $\sigma_{-1}(t)|_{t=0} = \sigma_{-10}$; $m(t)|_{t=0} = m_0$; $N_{-1}(t)|_{t=0} = N_{-10}$.

Вынося теперь функцию величины предела выносливости из-под дифференциала, с учетом

$$\frac{d(\sigma_{-1}^{k_m \cdot \sigma_{-1}})}{dt} = k_m \cdot (\sigma_{-1})^{k_m \cdot \sigma_{-1}} \times \times [1 + \ln(\sigma_{-1})] \cdot \frac{d(\sigma_{-1})}{dt} \quad (14)$$

уравнение выносливости в форме зависимости предела выносливости от времени окончательно получим в виде

$$\frac{d(\sigma_{-1})}{dt} + \frac{\lambda}{k_m \cdot [1 + \ln(\sigma_{-1})] \cdot D(t)} \times \times \int_{\sigma_{-1}}^{\infty} \sigma^{k_m \cdot \sigma_{-1}} f(\sigma) d\sigma = 0. \quad (15)$$

Заметим попутно, что при $\lambda = 1$ полученное решение для гармонического нагружения численно совпадает с долговечностью детали или конструкции в циклах нагружения.

Особенностью выражения (15) является разрыв второго рода при $\sigma_{-1} = 0$ множителя, стоящего перед интегральной частью уравнения, обусловленный характером принятого за-

кона изменения показателя степени кривой выносливости $m(t)$.

Очевидно, что аналитическое решение данного уравнения при произвольном законе распределения напряжений $f(\sigma)$ является достаточно затруднительным. Поэтому приведенные в данной работе результаты решения уравнения (8) получены с использованием численных методов.

При действии разрушающих напряжений постоянной амплитуды, что может быть распространено и на случай блочных нагружений, с учетом (1), (4), (7), (10) и (11) получим

$$\sigma_{-1}(t) = \sigma_{-1}(t - \Delta t) \times \times \left(1 - \frac{n(t - \Delta t, t) \cdot \sigma_{и}^{m(t - \Delta t)}}{D(0) - d(t)} \right)^{\frac{1}{m(t - \Delta t)}};$$

$$d(t) = \alpha(\sigma_{и}) \cdot \sum_{k=0}^{n(t - \Delta t)} \sigma_{и}^{m(t - \Delta t)} \uparrow t_k \in \overline{0, t - \Delta t}, \quad (16)$$

где $n(t - \Delta t, t)$ – количество циклов нагружения за период времени $t - \Delta t..t$.

Аналогичные зависимости, построенные на основе уравнения (1), имеют вид

$$\sigma_{-1}(t) = \sigma_{-1}(t - \Delta t) \cdot \left(1 - \frac{n(t - \Delta t, t) \sigma_{и}^m}{D(0) - d(t)} \right)^{m^{-1}};$$

$$d(t) = \sum_{k=0}^{n(t - \Delta t)} \sigma_{и}^m \uparrow t_k \in \overline{0, t - \Delta t} \quad (17)$$

Зависимость (16) получена путем применения простейшей конечно-разностной формулы интегрирования (формула прямоугольников), с учетом предположения, что координата точки перегиба $N_{-1}(t)$ независимо изменяется таким образом, чтобы удовлетворять соотношению (11).

Параметры для расчета зависимостей рис. 2 приняты на основании данных железнодорожных Норм расчета [6] для стали ВСтЗсп с учетом соответствующих коэффициентов концентрации, вводимых при переходе от материала к сварной конструкции.

На рис. 5-8 приведены характерные графики изменения основных параметров уточненной модели выносливости (16).

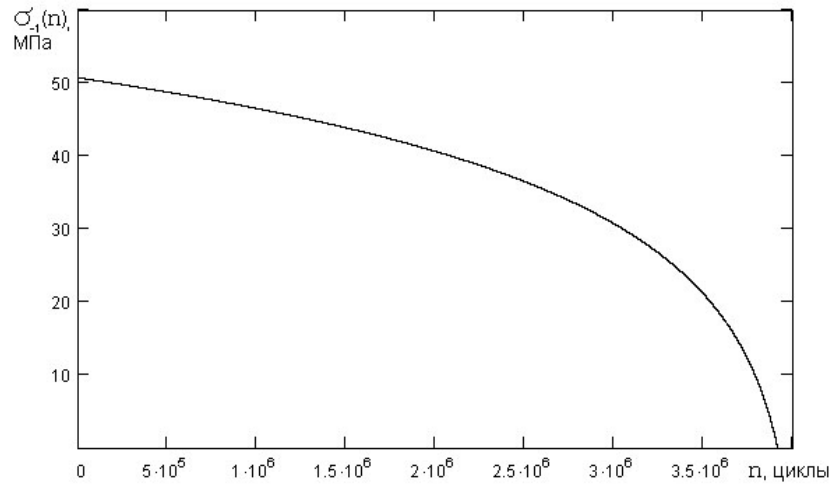


Рис. 5. Зависимость предела выносливости конструкции σ_{-1} от количества циклов нагружения

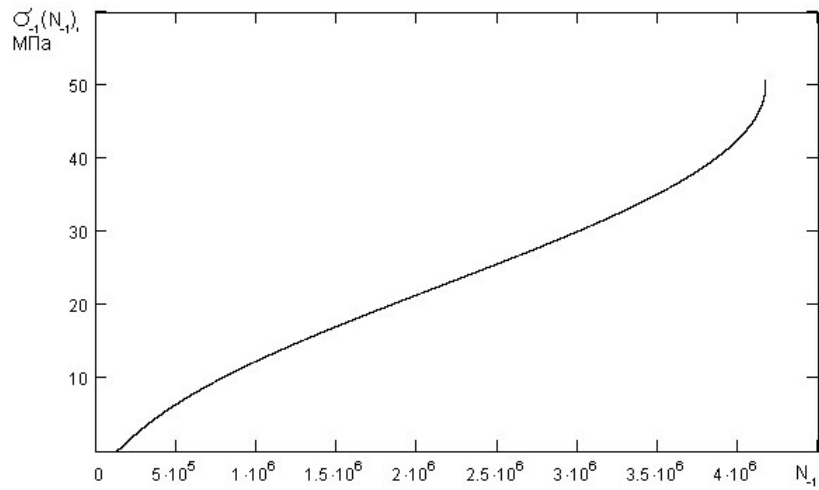


Рис. 6. Зависимость предела выносливости конструкции σ_{-1} от координаты точки перегиба кривой выносливости N_{-1}

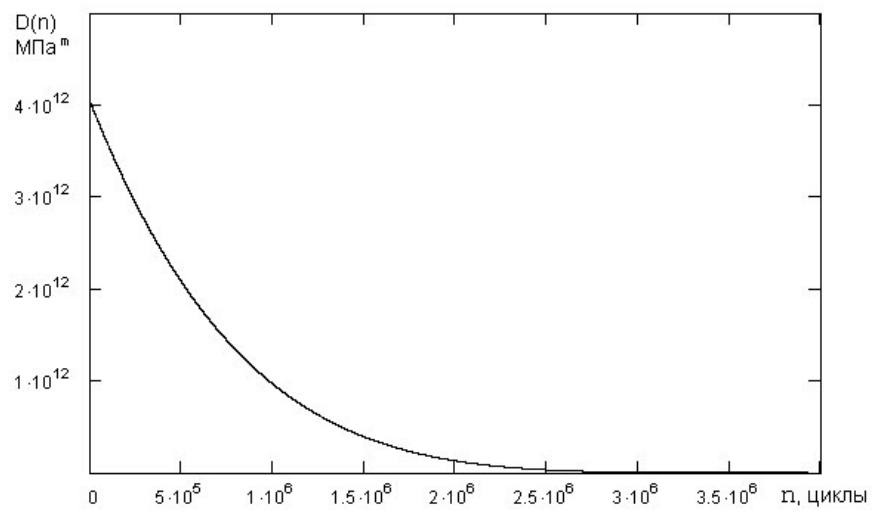


Рис. 7. Зависимость наработки конструкции $D(n)$ от количества циклов нагружения

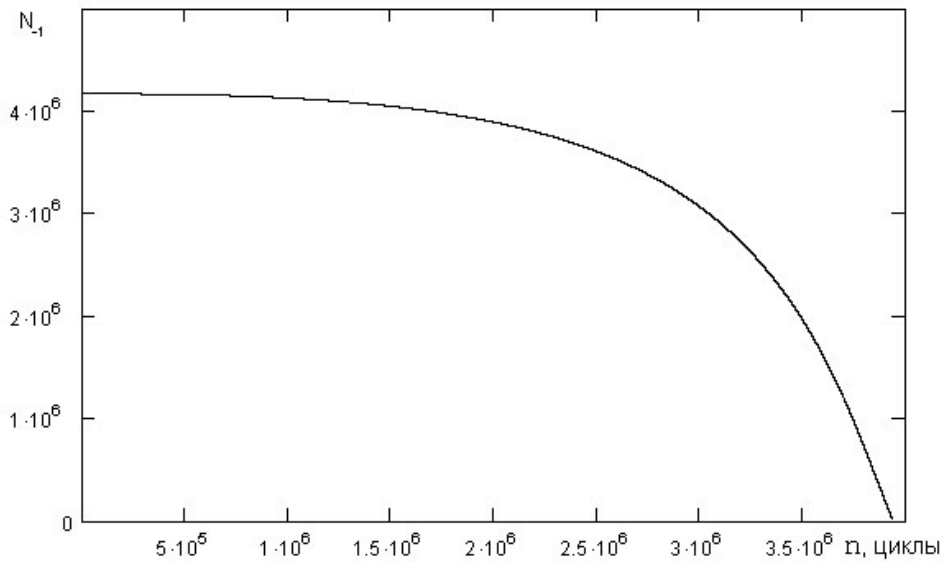


Рис. 8. Зависимость координаты точки перегиба N_1 кривой выносливости от количества циклов нагружения

Учитывая очевидный (по крайней мере, для не упрочняющихся материалов) факт, что под действием нагрузки предел выносливости снижается, можно предположить, что производная в области малых напряжений должна быть положительной, а функция f_1 – монотонно возрастающей. Поэтому решение уравнений (14) и (16) можно считать окончанным по достижении

пределом выносливости минимального значения $\sigma_{-1\min} \approx 0,4$ МПа, когда решение теряет физический смысл.

Для сравнения рассмотренных в статье моделей на рис. 9 приведены результаты расчета временных зависимостей $\sigma_{-1}(t)$, полученных при адекватных исходных данных.

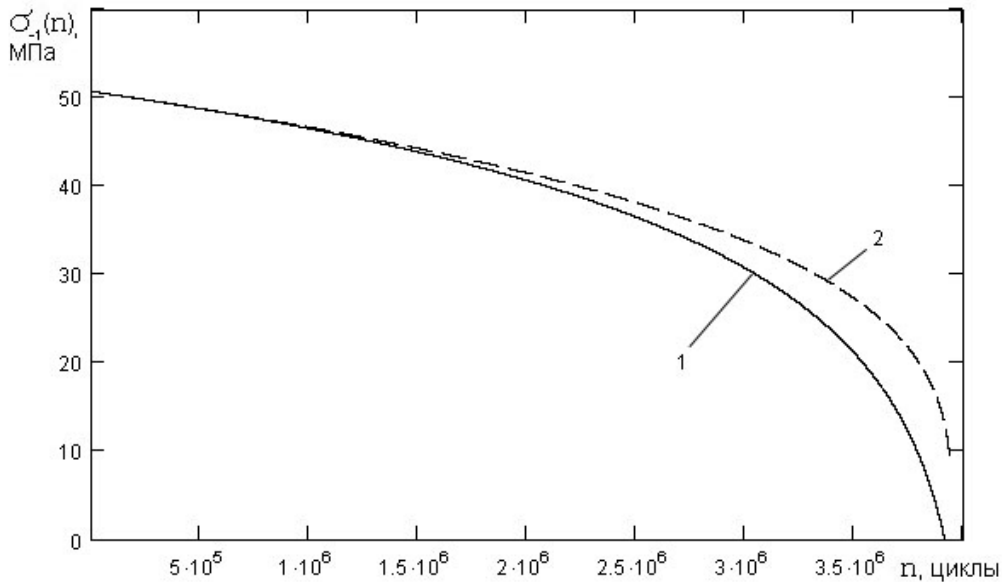


Рис. 9. Сравнение динамики изменения предела выносливости от количества циклов нагружения: 1 – модель, учитывающая изменение наклона кривой выносливости; 2 – упрощенная модель.

При этом использовались упрощенное уравнение выносливости (17) и уравнение (16), учитывающее изменение положения кривой выносливости, связанное с изменением механических свойств материала или конструкции.

В упрощенной модели приняты значения $m_0 = m = 3,5$, $\lambda = 1 \text{ с}^{-1}$ и $\sigma_{-10} = 50,7$ МПа, при коэффициенте концентрации $k_\sigma = 3,5$, которые рекомендованы нормативной документацией [6], как типичные расчетные значения для конст-

рукционной стали ВСтЗсп. В уточненной модели принято значение $m_0 = 3,5$ и дополнительно $D(0)=4,022 \cdot 10^{12}$, $\sigma_{-10}=50,7$ МПа и $N_{-10}=20960$. Расчеты проводились для случая нагружения конструкции нагрузками, вызывающими появление напряжений с постоянными амплитудами.

Как показывают результаты численных экспериментов, уточненное уравнение выносливости (16), как правило, дает решение $\sigma_{-1}(t)$, которое при равных условиях является оценкой снизу ресурса образца или детали за счет более интенсивного понижения предела выносливости, при общем подобии характера изменения предела выносливости от времени (или количества циклов нагружения).

Весьма интересным аспектом адекватности предлагаемой модели выносливости является возможность учета нелинейного накопления повреждений. Кривые накопления повреждений при разрушении образца на нескольких последовательных блоках с повышающимися или понижающимися амплитудами, приводятся в монографии [7]. Абстрагируясь от способа конкретной оценки вклада каждого такого блока, можно заметить, что если разрушение происходит с убывающими во времени амплитудами, то разрушение происходит при суммарном показателе меры повреждения, меньшем единицы.

Если же сначала действуют малые амплитуды напряжений, а затем большие, то разрушение происходит при суммарном показателе меры повреждения, большем единицы. Иногда говорят, что в этом случае происходит тренировка, приспособление к циклическому нагружению. Сказанное иллюстрируется графиками рис. 10, взятыми из монографии [8]. Экспериментальные значения суммы относительных долговечностей в момент разрушения колеблются от 1/4 до 4.

Представляется интересным, с учетом нелинейности изменения суммарной наработки детали (рис. 7) при использовании уточненной модели выносливости, выполнить численное моделирование последовательного блочного нагружения образцов материала и экземпляров конструкции напряжениями с возрастающими или убывающими амплитудами. Для двухблочного нагружения результаты оценки накопления повреждений приведены на рис. 11.

Из сравнения графиков рис. 11 и 12 можно заметить наличие сходного характера накопления повреждений, определенное как по экспериментальным данным, так и на уточненной

модели. Поскольку стохастическое нагружение после его схематизации [9] может быть рассмотрено, как последовательность блоков нагружения длительностью в один цикл, полученные результаты автоматически переносятся на случай нагружения образцов или деталей случайными нагрузками.

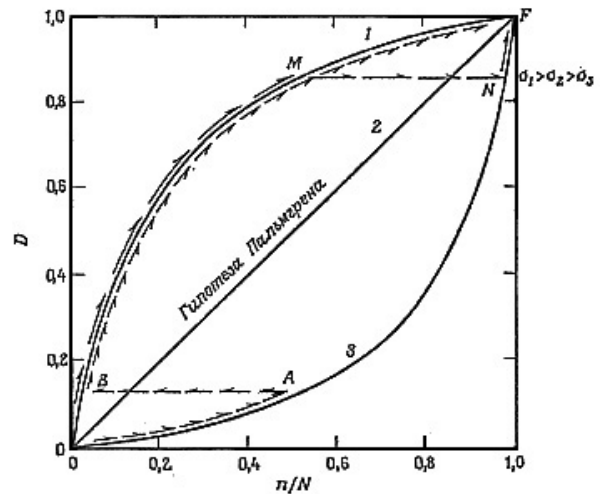


Рис. 10. Формы зависимости меры повреждения от нормированного числа циклов по данным работы [7]

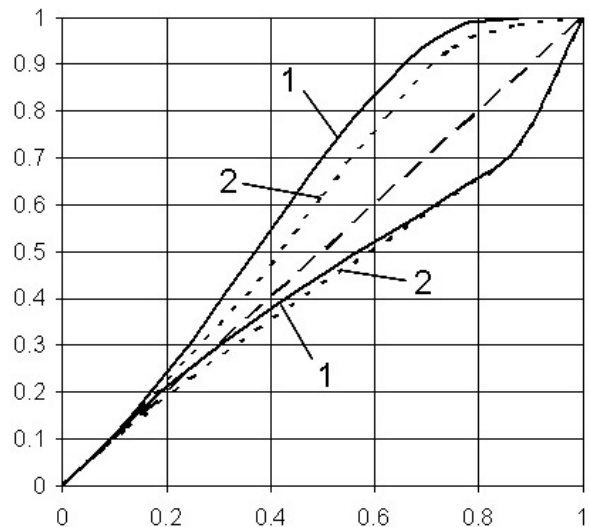


Рис. 11. Формы зависимости меры повреждения от нормированного числа циклов для уточненной модели выносливости с параметрами: 1 – сварной конструкции; 2 – конструкционного материала

Работы по оценке и продлению срока службы подвижного состава зачастую связаны с экспериментальной оценкой текущего предела выносливости материала или конструкции. Поэтому для решения задач, связанных с оценкой остаточного ресурса несущих конструкций, длительное время находящихся в эксплуатации, предпочтительнее применение уточненной мо-

дели (уравнение (8)), менее чувствительной к данному параметру. Однако параметры уточненной модели (особенно величины σ_{-10} , m_0 и $D(0)$) должны быть весьма тщательно определены на этапе контроля характеристик сопротивления усталости материалов, работавших под действием длительных циклических нагрузок.

ВЫВОДЫ

1. Предложена уточненная модель снижения предела выносливости материалов при действии циклических нагрузок, учитывающая изменение характеристик материала в течение длительного нагружения.
2. Предложенная уточненная модель выносливости является адекватной и позволяет учитывать нелинейный характер накопления повреждений при блочном и случайном нагружении.
3. Представляется предпочтительным использование уточненной модели выносливости для решения задач продления срока службы подвижного состава.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Горобец В. Л. Принцип эргодичности в модели выносливости материалов и конструкций //

- Залізн. транспорт України, 2003. – № 4. – С. 32-35.
2. Серенсен С. В. Квазистатическое и усталостное разрушение материалов и элементов конструкций. Избр. тр. в 3-х т. – К.: Наук. думка, 1985. – Т. 3. – 232 с.
 3. Когаев В. П. Расчеты на прочность при напряжениях, переменных во времени. – М: Машиностроение, 1977.
 4. Гольд Б. В. Основы прочности и долговечности автомобиля / Б. В. Гольд, Е. П. Оболенский, Ю. Г. Стефанович, О. Ф. Трофимов. – М: Машиностроение, 1974.
 5. Хейвуд Р. Б. Проектирование с учетом усталости. – М: Машиностроение, 1969.
 6. Гусев А. С. Сопротивление усталости и живучесть конструкций при случайных нагрузках. – М.: Машиностроение, 1989.
 7. Нормы для расчета и проектирования вагонов железных дорог МПС колеи 1520 мм (несамоходных). – М.: ГосНИИВ-ВНИИЖТ, 1996.
 8. Коллинз Д. Повреждение материалов в конструкциях, анализ, предсказание, предотвращение. – М.: Мир, 1984.
 9. ГОСТ 25.101-83, Методы схематизации случайных процессов нагружения элементов машин и конструкций и статистического представления результатов. – М.: Госстандарт СССР, 1983. – 224 с.

Поступила в редколлегию 26.03.2008.