УДК 517.518.2:629.4.014.6

А. А. БОСОВ (ДИИТ), Г. Н. КОДОЛА (УкрГХТУ)

ЦЕЛОЧИСЛЕННАЯ ВЕКТОРНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ В ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАЦИОНАЛЬНОЙ КОМПОЗИЦИИ ПАССАЖИРСКИХ ПОЕЗДОВ

Запропонований алгоритм для визначення цілочисельного розв'язання задачі векторної оптимізації для опуклих функцій.

Предложен алгоритм для определения целочисленного решения задачи векторной оптимизации для выпуклых функций.

An algorithm for determination of integer solution of the task of vector optimization for convex functions is offered.

Реальные задачи инженерной практики и экономики выдвигают задачи, основной чертой которых является разумное (рациональное) использование ресурсов. Часто требуется, чтобы компоненты решения такого класса задач выражались в целых числах, т. е. были целочисленными. К ним относятся, например, задачи, в которых переменные означают количество единиц неделимой продукции, число станков при загрузке оборудования, число судов при распределениях по линиям, число турбин в энергосистеме, число вычислительных машин в управляющем комплексе и многие другие.

Традиционно задача целочисленного линейного программирования решается методом Гомори или методом ветвей и границ [1, 2].

Рассмотрим задачу векторной оптимизации по двум показателям $f_1(x)$ и $f_2(x)$, где x – из множества целых чисел Z; $f_1(x)$, $f_2(x)$ – выпуклые функции.

Тогда математическая модель задачи целочисленной векторной оптимизации представляет собой:

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \to \min, \qquad (1)$$

а на значение x накладывается условие $x \in X \subseteq Z$.

Изучение решения и устойчивости подобного рода задач рассматривается в [3 – 6].

Рассмотрим одномерный случай и задачу целочисленной оптимизации с одной выпуклой функцией $f(x)$.

Решение задачи может оказаться как целочисленным, так и нет.

Тогда для определения целочисленного решения можно рассмотреть следующий алгоритм

Пусть x^* – решение задачи $f(x) \to \min$, необязательно целое.

В случае, если x^* – целое, задача решена, иначе целочисленное решение $\lceil x^* \rceil$ будет находиться в интервале $[x^* - 1, x^* + 1]$, см. рис. 1.

Обозначим, через $\underline{x}^*$ – целое решение, которое лежит в интервале $[x^* - 1, x^*]$; $\overline{x}^*$ – целое решение, которое лежит в интервале $[x^*, x^* + 1]$.

Для выбора оптимального решения необходимо выбрать $\min(f(\underline{x}^*), f(\overline{x}^*))$.

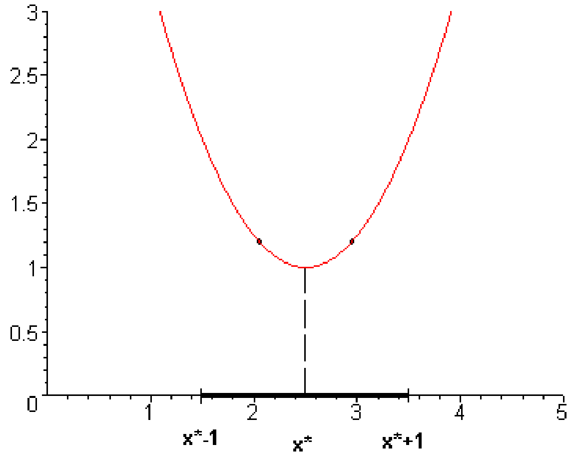

Рис. 1. Интервал определения целочисленного решения

Пусть $x^* \in X$ – решение задачи (1) из множества $X \subseteq R_1$.

Для определения целочисленного решения задачи векторной оптимизации в интервале $[x^*-1, x^*+1]$ воспользуемся теоремой 1 из [7].

Для этого сформируем вариационные уравнения:

1. В случае одной переменной интервал поиска целочисленного решения представляет собой рис. 2.,

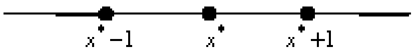

Рис. 2. Интервал определения целочисленного решения в случае одной независимой переменной

а вариационные уравнения будут следующими

$$f_1(x_1+1)-f_1(x_1)-\lambda\big(f_2(x_1+1)-f_2(x_1)\big)=0,$$
$$f_1(x_1-1)-f_1(x_1)-\lambda\big(f_2(x_1-1)-f_2(x_1)\big)=0.$$

Число уравнений составит 2.

2. В случае двух переменных интервалы поиска целочисленного решения представляет собой рис. 3.

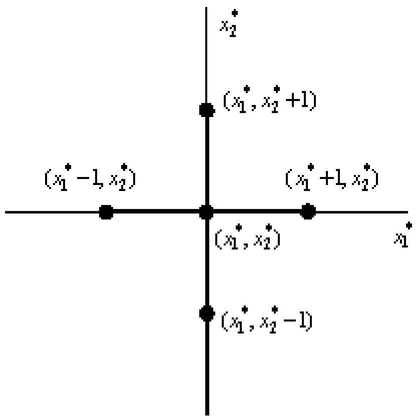

Рис. 3. Интервалы определения целочисленного решения в случае двух переменных

$$f_1(x_1+1,x_2)-f_1(x_1,x_2)-$$
$$-\lambda\big(f_2(x_1+1,x_2)-f_2(x_1,x_2)\big)=0;$$
$$f_1(x_1-1,x_2)-f_1(x_1,x_2)-$$
$$-\lambda\big(f_2(x_1-1,x_2)-f_2(x_1,x_2)\big)=0;$$
$$f_1(x_1,x_2+1)-f_1(x_1,x_2)-$$
$$-\lambda\big(f_2(x_1,x_2+1)-f_2(x_1,x_2)\big)=0;$$
$$f_1(x_1,x_2-1)-f_1(x_1,x_2)-$$
$$-\lambda\big(f_2(x_1,x_2-1)-f_2(x_1,x_2)\big)=0.$$

Число уравнений – 4.

3. Для трех переменных (см. рис. 4). Число уравнений составит 6 и т. д.

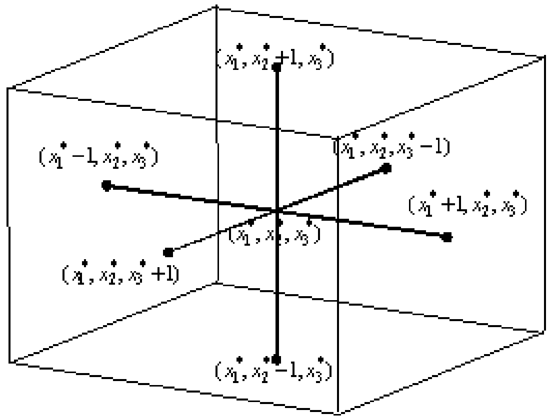

Рис. 4. Интервалы определения целочисленного решения в случае трех переменных

Для n переменных в общем виде вариационные уравнения по x_i компоненте можно записать как

$$f_1(x_1,x_2,...,x_i+1,...,x_n)-f_1(x_1,x_2,...,x_i,...,x_n)-$$
$$-\lambda\big(f_2(x_1,x_2...,x_i+1,...,x_n)-f_2(x_1,x_2,...,x_i,...,x_n)\big)=0;$$
$$f_1(x_1,x_2,...,x_i-1,...,x_n)-f_1(x_1,x_2,...,x_i,...,x_n)-$$
$$-\lambda\big(f_2(x_1,x_2...,x_i-1,...,x_n)-f_2(x_1,x_2,...,x_i,...,x_n)\big)=0.$$

Число уравнений в данном случае составит $2n$.

Решая данные уравнения для $0<\lambda<\infty$, получаем множества целочисленных значений по каждой компоненте, которые удовлетворяют решению задачи (1).

Рассмотрим задачу из [8] определения рациональной композиции пассажирского поезда. Математическая модель данной задачи представляет собой задачу векторной оптимизации с линейными ограничениями. Число мест, продаваемых в поезд, может принимать только целочисленное значение. Поэтому задачу можно сформулировать в следующем виде:

Пусть по маршруту следования пассажирского поезда имеется n станций, включая станцию отправления и станцию прибытия. В случае, когда каждый тип вагонов рассматривается независимо, имеем

$f_{ij}(x,t)$ – плотность вероятностей распределения спроса на поездки из A_i в A_j в момент времени t (t – день недели);

$\xi_{ij}(t)$ – математическая модель спроса на поездки из $A_i \to A_j$ в момент t (при фиксированном t ξ_{ij} – случайная величина);

$y_{ij}(t)$ – число мест, которые могут быть проданы в A_i для поездки в A_j в момент времени t;

c_{ij} – себестоимость одного места в поезде от станции A_i до A_j;

p_{ij} – цена билета от A_i до A_j.

Зафиксировав t и рассматривая каждый тип вагонов независимо, функция потерь представляет собой

$$F_1=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}c_{ij}\left(y_{ij}F_{ij}(y_{ij})-\int_{a_{ij}}^{y_{ij}}xf_{ij}(x)dx\right)+$$
$$+p_{ij}\left(\int_{y_{ij}}^{b_{ij}}xf_{ij}(x)dx-y_{ij}(1-F_{ij}(y_{ij}))\right).$$

Функция прибыли имеет вид

$$F_2=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\left(p_{ij}\left(\int_{a_{ij}}^{y_{ij}}xf_{ij}(x)dx+y_{ij}(1-F_{ij}(y_{ij}))\right)-\right.$$
$$\left.-c_{ij}y_{ij}\right).$$

Желание сделать потери F_1 как можно меньше, а прибыль F_2 как можно больше приводит к задаче векторной оптимизации

$$\begin{pmatrix}F_1(Y)\\-F_2(Y)\end{pmatrix}\to\min, \tag{2}$$

при условиях

$$\begin{gathered}\sum_{j=3}^{n}y_{2j}\le y_{12},\\ \sum_{j=4}^{n}y_{3j}\le y_{13}+y_{23},\\ \dots\dots\dots\dots\\ \sum_{j=i+1}^{n}y_{ij}\le\sum_{k=1}^{i-1}y_{ki},\\ Y\ge 0,\end{gathered} \tag{3}$$

где

$$Y=(y_{12},y_{13},...,y_{1n},y_{23},y_{24},...,y_{2n},...,y_{n-1n}).$$

Под решением задачи (2–3) будем понимать набор $Y_*\in Z$ (где Z – множество целых чисел), такой, что любое $y_*\in Y_*$ является эффективным.

В качестве алгоритма решения поставленной задачи можно рассмотреть следующий:

1. Определить множества целых значений по каждой компоненте, которые будут удовлетворять решению задачи (2).

2. Решить задачу (2–3), применяя метод параметризации Парето решения, как описано в [9], с учетом принадлежности полученного решения целочисленным множествам, определенных на первом этапе.

Рассмотрим случай с тремя станциями, включая станцию отправления и станцию прибытия.

Пусть спрос распределен по равномерному закону.

Тогда функция потерь представляет собой

$$F_1=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=i+1}^{3}\left(\frac{1}{b_{ij}-a_{ij}}\left((p_{ij}+c_{ij})\frac{y_{ij}^2}{2}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-y_{ij}(p_{ij}b_{ij}+c_{ij}a_{ij})+\frac{c_{ij}a_{ij}^2+p_{ij}b_{ij}^2}{2}\right)\right).$$

Функция прибыли будет иметь вид

$$F_2=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=i+1}^{3}\left(\frac{p_{ij}}{b_{ij}-a_{ij}}\left(-\frac{y_{ij}^2}{2}+y_{ij}b_{ij}-\frac{a_{ij}^2}{2}\right)-c_{ij}y_{ij}\right),$$

при условии

$$\begin{gathered}y_{12}+y_{13}\le N,\\ y_{23}\le y_{12},\end{gathered}$$

где N – общее число мест в поезде (в нашем случае для одного типа мест);

a_{ij} – соответствует минимальному спросу для поездки из $A_i\to A_j$;

b_{ij} – соответствует максимальному спросу для поездки из $A_i\to A_j$.

Для определения целочисленного решения задачи (2–3) воспользуемся алгоритмом, описанным выше.

Составим вариационные уравнения, число которых в нашем случае составит 6.

$$-F_1(y_{12}-1,y_{13},y_{23})+F_1(y_{12},y_{13},y_{23})+$$
$$+\lambda\left(F_2(y_{12}-1,y_{13},y_{23})-F_2(y_{12},y_{13},y_{23})\right)=0;$$
$$-F_1(y_{12}+1,y_{13},y_{23})+F_1(y_{12},y_{13},y_{23})+$$
$$+\lambda\left(F_2(y_{12}+1,y_{13},y_{23})-F_2(y_{12},y_{13},y_{23})\right)=0;$$
$$-F_1(y_{12},y_{13}-1,y_{23})+F_1(y_{12},y_{13},y_{23})+$$
$$+\lambda\left(F_2(y_{12},y_{13}-1,y_{23})-F_2(y_{12},y_{13},y_{23})\right)=0;$$
$$-F_1(y_{12},y_{13}+1,y_{23})+F_1(y_{12},y_{13},y_{23})+$$
$$+\lambda\left(F_2(y_{12},y_{13}+1,y_{23})-F_2(y_{12},y_{13},y_{23})\right)=0;$$
$$-F_1(y_{12},y_{13},y_{23}-1)+F_1(y_{12},y_{13},y_{23})+$$
$$+\lambda\left(F_2(y_{12},y_{13},y_{23}-1)-F_2(y_{12},y_{13},y_{23})\right)=0;$$

$$-F_1(y_{12}, y_{13}, y_{23}+1) + F_1(y_{12}, y_{13}, y_{23}) +$$
$$+\lambda\left(F_2(y_{12}, y_{13}, y_{23}+1) - F_2(y_{12}, y_{13}, y_{23})\right) = 0.$$

Из которых определяем y_{ij} как функции λ. Т. е. в нашем случае определяем $y_{12}(\lambda)$, $y_{13}(\lambda)$, $y_{23}(\lambda)$.

Перебирая $0 < \lambda < \infty$, находим множества целых значений для каждого из y_{ij}, которые будут являться исходными множествами целых значений для отбора тех решений, которые должны удовлетворять условию (3).

Далее, решаем задачу (2–3) как в [9] с учетом принадлежности полученных решений множествам целочисленных решений, полученных на предыдущем этапе.

Рассмотрим численный пример из [9].

Пусть $n = 3$.

Минимальный спрос на поездки по станциям отобразим в матрице A, каждый элемент которой представляет собой минимальный спрос из i-ой станции (где i – номер строки) до j-ой станции (где j – номер столбца).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Максимальный спрос на поездки по станциям отобразим в матрице B, каждый элемент которой представляет собой максимальный спрос из i-ой станции (где i – номер строки) до j-ой станции (где j – номер столбца).

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 20 & 35 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Количество мест в поезде $S = 55$.

Рентабельность принимаем равной $30\,\%$, т. е. $\rho = 1{,}3$.

Цена за проезд из i-ой станции до j-ой станции отобразим в матрице P

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для нашего примера целевые функции имеют вид:

Функция потерь:

$$F_1(y_{12}, y_{13}, y_{23}) = 0.059y_{12}^2 - 1.5897y_{12} + 0.0708y_{13}^2 -$$
$$-3.4154y_{13} + 0.0983y_{23}^2 - 1.1966y_{23} + 71.6496.$$

Функция прибыли:

$$F_2 = -0.0333y_{12}^2 + 0.5641y_{12} - 0.04y_{13}^2 +$$
$$+1.2615y_{13} - 0.0556y_{23}^2 + 0.3419y_{23} - 4.8889.$$

Ограничения представляют собой

$$\begin{cases} y_{12} \ge y_{23}, \\ y_{12} + y_{13} \le S. \end{cases}$$

На первом этапе решим задачу (2) без учета ограничений (3) для определения множеств целочисленных значений, решение которой дает следующие множества

$$Y_{12}^* = \{9, 10, 11, 12, 13, 14\};$$

$$Y_{13}^* = \{17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25\};$$

$$Y_{23}^* = \{4, 5, 6, 10, 20, 30, 40, 100\}.$$

На втором этапе решения задачи, с учетом полученных ранее множеств интервалы для выбора целочисленных значений, удовлетворяющих ограничениям (3), представляют собой (рис. 5):

$$y_{12}(\lambda) \in [9,\ 13];$$

$$y_{13}(\lambda) \in [17,\ 24];$$

$$y_{23}(\lambda) \in [4,\ 6].$$

что исключает (при использовании правил округления) для y_{12} число мест – 8; для y_{13} число мест – 16; для y_{23} число мест – 3 (см. решение, полученное в [9]).

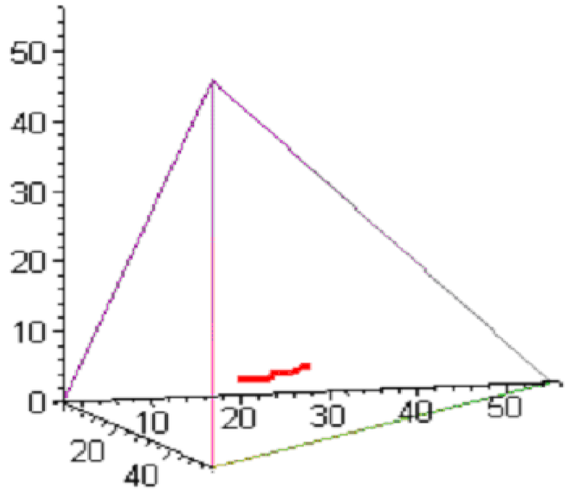

Рис. 5. Решение задачи

Данный метод позволяет определять целочисленное решение задачи векторной оптимизации для целевых функций, которые являются выпуклыми.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высш. школа, 1986. – 320 с.
2. Кузнецов Ю. Н. Математическое программирование / Ю. Н. Кузнецов, В. И. Кузубов, А. Б. Волощенко. – М.: Высш. школа, 1980. – 300 с.
3. Сергиенко И. В. О существовании решений в задачах векторной целочисленной оптимизации / И. В. Сергиенко, Т. Т. Лебедева, Н. В. Семенова // Кибернетика и сист. анализ, 2000. – № 6. – С. 39-46.
4. Лебедева Т. Т. Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множеств оптимальных и неоптимальных решений / Т. Т. Лебедева, Н. В. Семенова, Т. И. Сергиенко // Кибернетика и сист. анализ, 2005. – № 4. – С. 90-100.
5. Лебедева Т. Т. Сравнительный анализ различных типов устойчивости по ограничениям векторной задачи целочисленной оптимизации / Т. Т. Лебедева, Т. И. Сергиенко // Кибернетика и сист. анализ, 2004. – № 1. – С. 63-70.
6. Лебедева Т. Т. Устойчивость по векторному критерию и ограничениям векторной целочисленной задачи квадратичного программирования / Т. Т. Лебедева, Т. И. Сергиенко // Кибернетика и сист. анализ, 2006. – № 5. – С. 63-72.
7. Босов А. А. Векторная оптимизация по двум показателям / А. А. Босов, Г. Н. Кодола, Л. Н. Савченко // Вісник Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – Вип. 18. – Д.: Вид-во ДНУЗТ, 2007.– С. 134-138.
8. Аксенов И. М. Математическая модель композиции пассажирских составов / И. М. Аксенов, Г. Н. Кодола, Е. А. Момот // Залізничний транспорт України, 2005.– № 1. – С. 47-50.
9. Босов А. А. Применение метода параметризации Парето решения в задачах векторной оптимизации к решению задачи определения рациональной композиции пассажирского поезда / А. А. Босов, Г. Н. Кодола // Вісник Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – Вип. 19. – Д.: Вид-во ДНУЗТ, 2007.– С. 94-98.

Поступила в редколлегию 27.03.2008.