

УДОСКОНАЛЕННЯ МЕТОДУ ОБЧИСЛЕННЯ МАТРИЦІ ІНЕРЦІЇ КОЛІСНОЇ ПАРИ З УРАХУВАННЯМ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРИПУСКІВ НА ВИГОТОВЛЕННЯ

Запропоновано алгоритм обчислення матриці інерції колісної пари з урахуванням технологічних припусків на виготовлення. Метод обчислення побудований на основі кватерніонних матриць, які враховують перекіс осей симетрії та зміщення підконструкцій в допустимих межах.

Предложен алгоритм вычисления матрицы инерции колесной пары при учете погрешностей изготовления. Метод вычисления построен на основе кватернионных матриц, учитывающих перекос осей симметрии и смещения подконструкций в допустимых пределах.

A computation algorithm for inertia matrix of wheel pair taking into account the manufacturing inaccuracies is suggested. It is based on quaternion matrices, which take into consideration the skew of symmetry axes and the shift of substructures within permissible limits.

Вступ

Сили інерції [2] здійснюють суттєвий вплив на динаміку та стійкість швидкісного рухомого складу, на динамічну навантаженість елементів конструкції та колії [4], викликаючи інтенсивні вібрації кузову, підвищений знос коліс та рейок. Одним із джерел цих негативних динамічних явищ є асиметрія конструкції колісної пари та пов'язана з цим зміна її інерційних характеристик, що обумовлена низкою випадкових факторів, які призводять до зміщення центру мас відносно осі симетрії, перекосу головних осей інерції відносно геометричних осей [7, 8].

Негативні динамічні явища у вигляді шуму, вібрації, коливань, биття, підвищеного зносу та руйнування конструкції обумовлені в цілому відцентровими та гіроскопічними силами і моментами, що наростають пропорційно квадрату швидкості [5], їх оцінка та урахування при проектуванні та експлуатації швидкісного рухомого складу набувають важливого значення, безпосередньо пов'язаного із безпекою руху [3]. Матриця інерції є основним показником інерційних властивостей колісної пари, тому розробка ефективних алгоритмів приведення матриці інерції до конструктивно зручного центру і базового триєдру, з урахуванням технологічних припусків на виготовлення та монтаж складає актуальну задачу.

В даній роботі пропонується вдосконалений метод обчислення матриці інерції колісної пари з урахуванням вказаних технологічних погрешностей на виготовлення, що базується на використанні кватерніонних матриць. Використання відомих методів [1] щодо вирішення розгляну-

тої задачі приводить до громіздких розрахункових формул, які є незручними для програмування та наступних обчислень на ЕОМ. Кватерніонні матриці складаються за параметрами Родріга-Гамільтона, які враховують перекіс головних центральних осей інерції коліс і осі колісної пари відносно геометричних осей симетрії та за координатами характерних точок, що враховують відхилення фактичних координат центру мас коліс і осі колісної пари від геометричних центрів симетрії в межах заданих припусків на виготовлення та монтаж.

Постановка задачі

Компонування схема колісної пари наведена на рис. 1, де O – полюс базового триєдру, який розміщено та зорієнтовано на буксовому вузлі; O_1, O_2, O_3 – геометричні центри симетрії коліс, осі колісної пари та відповідні зв'язані системи координат.

Основні геометричні параметри колісної пари задані конструктивно номінальними розмірами. Введені системи координат, які пов'язані із кожним колесом (полюс O_1, O_3) та віссю (O_2) в геометричних центрах симетрії. Осі введених систем координат зорієнтовані по геометричних осях симетрії елементів розглянутої конструкції. Нехай базовий триєдр (полюс O) розміщений та зорієнтований на буксовому вузлі відповідно до рисунку, тоді координати полюсів коліс і осі колісної пари у базовому триєдрі відповідно дорівнюють $x_{oi,j} (i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3)$.

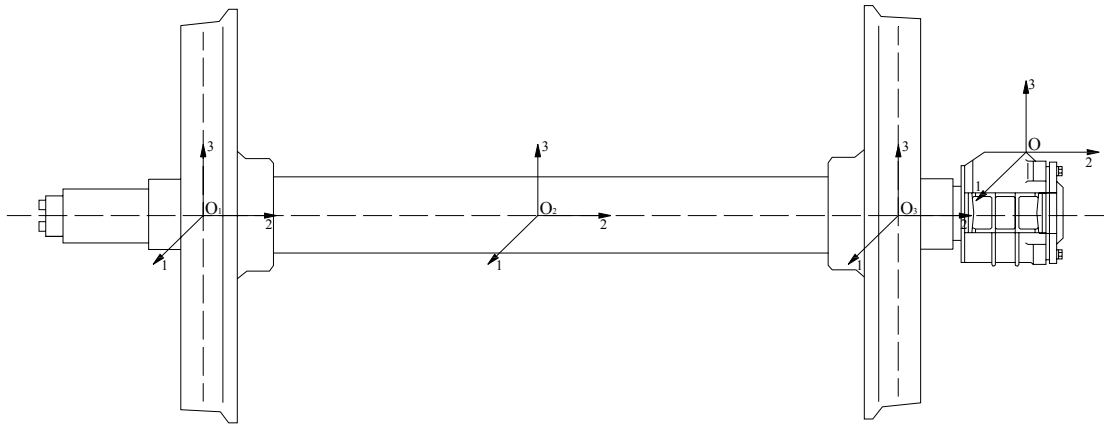


Рис. 1. Компонувочна схема колісної пари і системи координат, які пов'язані з геометричними центрами і осями симетрії конструкції

Погрішності виготовлення

Номинальні величини мас коліс та осі колісної пари позначимо відповідно m_1, m_2, m_3 , причому $m_1 = m_3$. В силу випадкових факторів фактична величина цих мас може змінюватись в межах відомих припусків на виготовлення $\pm \Delta m_i$, тобто $m_i \pm \Delta m_i$ ($i=1, 2, 3$), погрішність виготовлення і монтажу призводить до відхилень фактичних координат центрів мас коліс і осі колісної пари від геометричних центрів симетрії в межах заданих припусків $\pm \varepsilon_j^{ci}$ ($j=1, 2, 3$). Вважаємо, що величини головних центральних моментів інерції коліс і осі колісної пари також змінюються в межах заданих припусків на виготовлення $I_{jj}^{ci} \pm \Delta I_{jj}^{ci}$, причому $I_{11}^{ci} = I_{33}^{ci}$, а також $I_{jj}^{c1} = I_{jj}^{c3}$, $\Delta I_{jj}^{c1} = \Delta I_{jj}^{c3}$. Номинальні величини головних моментів інерції осі колісної пари і коліс задані діагональними матрицями I_{jj}^{ci} . Орієнтація головних центральних осей інерції коліс і осі колісної пари відносно геометричних осей симетрії (введених зв'язаних систем координат) визначимо кутами Ейлера-Крилова, які в силу поставленої технічної задачі є малими величинами та вибираються в межах заданих припусків

$\pm \Delta \alpha^{ci}, \pm \Delta \beta^{ci}, \pm \Delta \gamma^{ci}$, наведено на рис. 2, де C_1, C_3, C_2 – центри мас коліс, осі колісної пари та відповідні головні центральні осі інерції;

$\pm \varepsilon_j^{ci}$ ($i, j=1, 2, 3$) – відхилення координат центрів мас коліс ($i=1, 3$) та осі ($i=2$) від номинального положення;

$\pm \Delta \alpha^{ci}, \pm \Delta \beta^{ci}, \pm \Delta \gamma^{ci}$ – кути Ейлера-Крилова, що характеризують відхилення фактичних головних центральних осей інерції двох коліс і осі колісної пари відносно відповідних зв'язаних систем координат;

$\pm \Delta m_i$ – відхилення фактичної маси коліс і осі колісної пари від номинальних величин;

$\pm \Delta I_{jj}^{ci}$ – відхилення фактичних головних центральних моментів інерції коліс та осі колісної пари від номинальних величин.

Матрична формула приведення головних центральних моментів інерції коліс та осі колісної пари до власних зв'язаних систем координат (геометричних осей симетрії). Приведення головних центральних моментів коліс та осі колісної пари до власних геометричних осей симетрії проводиться за наступною розрахунковою формулою, яка враховує переніс та поворот у тривимірному просторі:

$$2\bar{I}_{O_i} = 2\Delta_{ci} \times {}^t\Delta_{ci} \times \bar{I}^{ci} \times \Delta_{ci}' \times {}^t\Delta_{ci}' + E_{ci} (E_{ci}' + {}^tE_{ci}'))$$

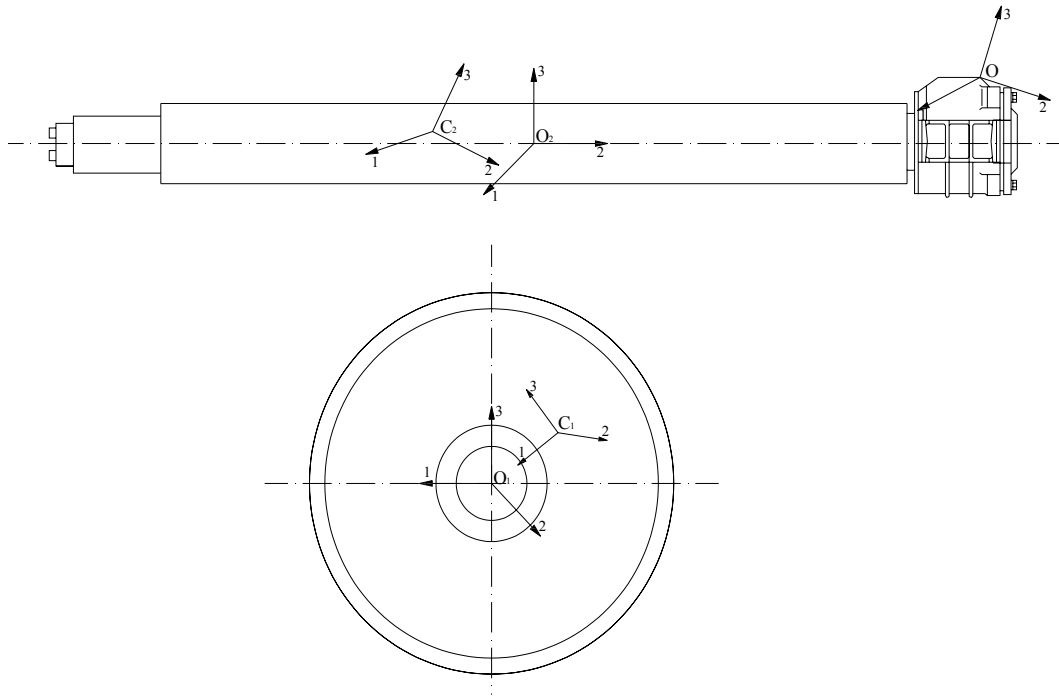


Рис. 2. Схема розташування та орієнтації головних центральних осей інерції коліс та осі колісної пари

Тут

$$\bar{I}^{ci} = \frac{1}{m_i} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{11}^{ci} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{22}^{ci} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{33}^{ci} \end{vmatrix} \quad \Delta_{ci} = \begin{vmatrix} \delta_0^{ci} & \delta_1^{ci} & \delta_2^{ci} & \delta_3^{ci} \\ -\delta_1^{ci} & \delta_0^{ci} - \delta_3^{ci} & \delta_2^{ci} & \delta_2^{ci} \\ -\delta_2^{ci} & \delta_3^{ci} & \delta_0^{ci} - \delta_1^{ci} & \delta_2^{ci} \\ -\delta_3^{ci} - \delta_2^{ci} & \delta_1^{ci} & \delta_0^{ci} & \delta_0^{ci} \end{vmatrix}$$

$$E_{ci} = \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon_1^{ci} & \varepsilon_2^{ci} & \varepsilon_3^{ci} \\ -\varepsilon_1^{ci} & 0 & -\varepsilon_3^{ci} & \varepsilon_2^{ci} \\ -\varepsilon_2^{ci} & \varepsilon_3^{ci} & 0 & -\varepsilon_1^{ci} \\ -\varepsilon_3^{ci} & -\varepsilon_2^{ci} & \varepsilon_1^{ci} & 0 \end{vmatrix}$$

Параметри Родріга-Гамільтона

$$\delta_j^{ci} \quad (j = 0, 1, 2, 3)$$

визначаються за заданими вище кутами Ейлера-Крилова у виді:

$$\begin{vmatrix} \delta_0^{ci} \\ \delta_1^{ci} \\ \delta_2^{ci} \\ \delta_3^{ci} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \frac{\Delta\gamma^{ci}}{2} \cos \frac{\Delta\beta^{ci}}{2} \cos \frac{\Delta\alpha^{ci}}{2} - \sin \frac{\Delta\gamma^{ci}}{2} \sin \frac{\Delta\beta^{ci}}{2} \sin \frac{\Delta\alpha^{ci}}{2} \\ \cos \frac{\Delta\gamma^{ci}}{2} \cos \frac{\Delta\beta^{ci}}{2} \sin \frac{\Delta\alpha^{ci}}{2} + \sin \frac{\Delta\gamma^{ci}}{2} \sin \frac{\Delta\beta^{ci}}{2} \cos \frac{\Delta\alpha^{ci}}{2} \\ -\sin \frac{\Delta\gamma^{ci}}{2} \cos \frac{\Delta\beta^{ci}}{2} \sin \frac{\Delta\alpha^{ci}}{2} + \cos \frac{\Delta\gamma^{ci}}{2} \sin \frac{\Delta\beta^{ci}}{2} \cos \frac{\Delta\alpha^{ci}}{2} \\ \sin \frac{\Delta\gamma^{ci}}{2} \cos \frac{\Delta\beta^{ci}}{2} \cos \frac{\Delta\alpha^{ci}}{2} + \cos \frac{\Delta\beta^{ci}}{2} \sin \frac{\Delta\beta^{ci}}{2} \sin \frac{\Delta\alpha^{ci}}{2} \end{vmatrix}$$

Враховуючи те, що поворот головних центральних осей інерції відносно геометричних осей симетрії є малим, знайдемо:

$$\begin{pmatrix} \delta_0^{ci} \\ \delta_1^{ci} \\ \delta_2^{ci} \\ \delta_3^{ci} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\Delta\gamma^{ci}}{2} & \frac{\Delta\beta^{ci}}{2} & \frac{\Delta\alpha^{ci}}{2} \\ \frac{\Delta\alpha^{ci}}{2} + \frac{\Delta\gamma^{ci}}{2} & \frac{\Delta\beta^{ci}}{2} & \frac{\Delta\alpha^{ci}}{2} \\ \frac{\Delta\beta^{ci}}{2} - \frac{\Delta\gamma^{ci}}{2} & \frac{\Delta\alpha^{ci}}{2} & \frac{\Delta\beta^{ci}}{2} \\ \frac{\Delta\gamma^{ci}}{2} + \frac{\Delta\beta^{ci}}{2} & \frac{\Delta\alpha^{ci}}{2} & \frac{\Delta\gamma^{ci}}{2} \end{pmatrix}$$

Далі, нехтуючи малими величинами другого порядку та вище, отримаємо:

$$\begin{pmatrix} \delta_0^{ci} \\ \delta_1^{ci} \\ \delta_2^{ci} \\ \delta_3^{ci} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\Delta\alpha^{ci}}{2} \\ \frac{\Delta\beta^{ci}}{2} \\ \frac{\Delta\gamma^{ci}}{2} \end{pmatrix}$$

Погрішності монтажу. В процесі зборки колісної пари, що складається з двох коліс та осі, в силу низки випадкових факторів відбувається зміщення їх центрів симетрії O_i ($i=1, 2, 3$) та перекус їх геометричних осей відносно базового трієдру, що може бути обраним, наприклад на буксовому вузлі (рис. 3).

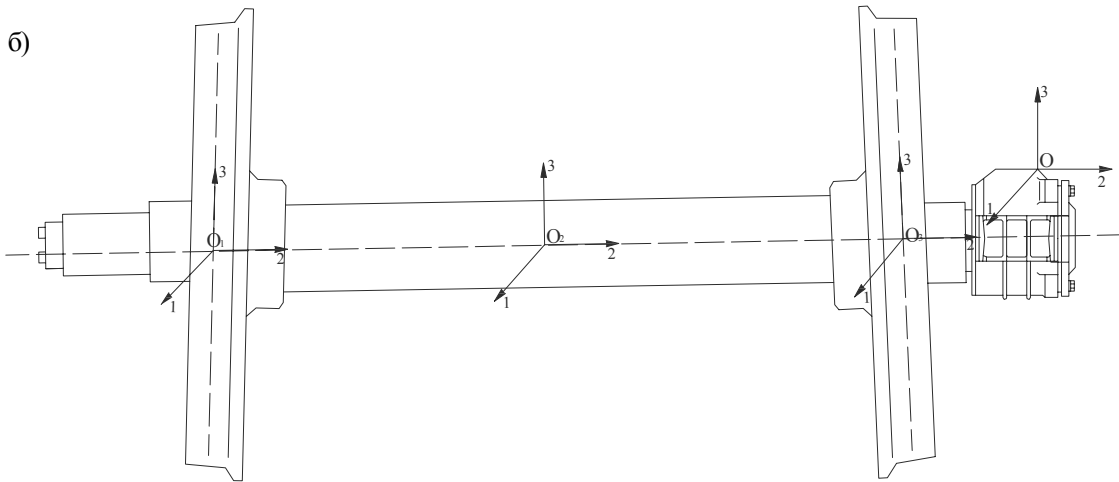


Рис. 3. Схема зміщення і перекосу в процесі монтажу геометричних осей симетрії коліс та осі колісної пари відносно базового трієдру

Матрична формула приведення моментів інерції коліс та осі колісної пари до базового трієдру має вигляд:

$$2\bar{I}_{oi}^0 = 2A_i \times {}^t A_i \times \bar{I}_{oi} \times A_i^t \times {}^t A_i^t + (X_{ci} + {}^t X_{oi}^t)(X_{oi}^t + {}^t X_{oi}^t) + X_{oi}(X_{ci}^t + {}^t X_{ci}^t),$$

де

$$X_{ci} = X_{oi} + A_i \times E_{ci} \times {}^t A_i^t;$$

$$X_{ci}^t = X_{oi}^t + {}^t A_i \times E_{ci}^t \times A_i^t;$$

$${}^t X_{ci}^t = {}^t X_{oi}^t + A_i \times {}^t E_{ci}^t \times {}^t A_i^t;$$

$X_{oi}, X_{oi}^t, {}^t X_{oi}^t, {}^t X_{oi}$ – кватерніонні матриці, які складено за координатами полюсів x_{joi} ($i=1, 2, 3; j=1, 2, 3$), що враховують зміщення елементів конструкції колісної пари при монтажу;

$X_{ci}, X_{ci}^t, {}^tX_{ci}, {}^tX_{ci}$ – кватерніонні матриці, які складено за координатами центрів мас x_{jci} елементів конструкції колісної пари у базовому тріедрі;

$A_i, A_i^t, {}^tA_i, {}^tA_i$ – кватерніонні матриці, які складено за параметрами Родріга-Гамільтона a_{joi} ($i = 1, 2, 3; j = 0, 1, 2, 3$), що враховують перекіс елементів конструкції колісної пари при монтажі відносно базового тріедру.

Результуюча матриця інерції колісної пари в зборі з урахуванням погрешностей виготовлення та монтажу, що приведена до базового тріедру, визначається за формулою:

$$\bar{I}_o^\delta = \sum_{i=1}^3 \frac{m_i}{m_1 + m_2 + m_3} \bar{I}_{oi}^\delta.$$

Висновок

Пропонується використовувати обчислювальний алгоритм перетворення матриці інерції при повороті й переносі у тривимірному просторі, який базується на використанні кватерніонних матриць. Кватерніонні матриці складаються за параметрами Родріга-Гамільтона, що враховують перекіс головних центральних осей інерції коліс і осі колісної пари відносно геометричних осей симетрії та за координатами характерних точок, які враховують відхилення фактичних координат центру мас коліс і осі колісної пари від геометричних центрів симетрії в межах заданих припусків на виготовлення та монтаж. Використання кватерніонних матриць дозволяє отримати компактний симетричний запис розрахункових формул та забезпечи-

ти як зручність реалізації на ЕОМ, так і ефективність обчислювальної програми.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Гернет, М. М. Определение моментов инерции [Текст] / М. М. Гернет, В. Ф. Ратобыльский. – М.: Машиностроение, 1969. – 247 с.
2. Ишлинский, А. Ю. Механика относительного движения и силы инерции [Текст] / А. Ю. Ишлинский. – М.: Наука, 1981. – 191 с.
3. Кірпа, Г. М. Пасажирським перевезенням – швидкість і комфорт [Текст] / Г. М. Кірпа, Ю. В. Дьомін // Заліз. трансп. України. – 2004. – № 4. – С. 4-7.
4. Котуранов, В. Н. Нагруженность элементов конструкции вагона [Текст] / В. Н. Котуранов. – М.: Транспорт, 1991. – 238 с.
5. Кравец, В. В. Об оценке центробежных, кориолисовых и гироскопических сил при скоростном движении железнодорожного экипажа [Текст] / В. В. Кравец, Т. В. Кравец // Прикладная механика. – 2008. – 44, № 1. – С. 123-132.
6. Лысенко, Л. Н. Симметризованный подход к представлению тензора инерции составных асимметричных объектов ракетно-космической техники [Текст] / Л. Н. Лысенко, В. В. Кравец // Вестник МГТУ. Сер. Машиностроение. – 1996. – № 1. – С. 36-45.
7. Larin, V. B. On the Problem of Control of a Compound Wheel Vehicle [Текст] / V. B. Larin // Int. Appl. Mech. – 2007. – 43, N 11. – P. 1297-1302.
8. Lobas, L. G. Theory of Inverted Pendulum with Follower Force Revisited [Текст] / L. G. Lobas, V. V. Koval'chuk, O. V. Bambura // Int. Appl. Mech. – 2007. – 43, N 6. – P. 690-700.

Надійшла до редколегії 23.06.2008.