

## СТРУКТУРА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МАТРИЦ ДЛЯ КОМБИНИРОВАННЫХ КОЛЕБАНИЙ МНОГОМЕРНЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Розглядається динаміка багатокomпонентних стержневих систем з використанням теорії графів та автоматів. Показано, що структурний склад таких моделей можна задавати за допомогою просторових матриць на основі дослідження топологічних властивостей графа системи. В кожному випадку аналізується можливість реалізації послідовної схеми шляхом сполучень між собою типових логічних елементів.

Рассматривается динамика многокомпонентных стержневых систем с использованием теории графов и автоматов. Показано, что структурный состав таких моделей можно задавать с помощью пространственных матриц на основе исследования топологических свойств графа системы. В каждом случае анализируется возможность реализации последовательной схемы путем соединений между собой типовых логических элементов.

Dynamics of multicomponent rod systems with use of the theory of graphs and automatic machines is considered. It is shown that the structure of such models can be set by means of spatial matrices on the basis of research of topological properties of a system graph. In each case the possibility of realisation of the consecutive scheme by connections among themselves of typical logic elements is analyzed.

Согласно существующей классификации [1], к двумерным стержневым системам относятся системы перекрестных балок, стержневых плит, плоских рам и т. д., к трехмерным – рамные пространственные каркасы, стержневые оболочки, пространственные фермы и другие подобные им конструкции. Такие системы находят широкое применение в мосто- и судостроении, промышленном и гражданском строительстве. Однако вопросам динамического расчета пространственных разветвленных конструкций посвящено сравнительно мало научной литературы, что объясняется сложностью задачи и гораздо большими трудностями ее решения, чем для одномерных стержневых систем.

Обстоятельные обзоры применяемых методов расчета перекрестно-стержневых систем даны в работах [1, 2]. По существу, эти методы являются развитием известных методов динамического расчета одномерных конструкций с присущими им достоинствами и недостатками, которые особенно отчетливо проявляются при расчетах свободных и вынужденных колебаний пространственных стержневых систем.

Применение топологических и автоматных методов [3, 5] допускает точное математическое описание совместных колебаний пространственных стержневых систем, практически не меняя при этом основные алгоритмы расчета, принятые для одномерных конструкций. Такой подход позволяет также осуществ-

ить декомпозицию графов на компоненты по видам колебаний с последующим переходом от характеристических функций простых систем к общему матричному уравнению действительной соединенной системы.

Целью исследования является получение пространственных ассоциированных матриц для описания состояний многокомпонентных стержневых систем с использованием теории графов и автоматов.

Простые стержневые системы (рис. 1) можно рассматривать как составные части более крупных систем в виде пересекающихся балок или пространственных рамных каркасов. Для построения ассоциированных матриц, описывающих колебания каждой такой части, необходимо рассмотреть все возможные состояния аналогов-стержней, входящих в простые системы, из которых затем формируются блоки, подсистемы и система в целом.

Вначале исследуем возможные состояния автомата  $A_z 1$ , представленного графом  $G_z$  [3], при подаче входных последовательностей длиной  $l$  для НП стержня 11 и КП стержня 12. Длина последовательности  $l$  равна числу символов в последовательности [4] и, в данном случае, формируется из набора кодов на множестве  $\{0, 0, 1, 1\}$ , характеризующих изгибные колебания стержня.

Следовательно, в таблице переходов  $A_z$  (табл. 1 [3]) изменения коснутся только кодов

НП, КП стержней 11, 12 при тех же состояниях I, II подграфов  ${}^1G_z$ ,  ${}^2G_z$ . Соотношения между

кодами граничных параметров представлены в табл. 1.

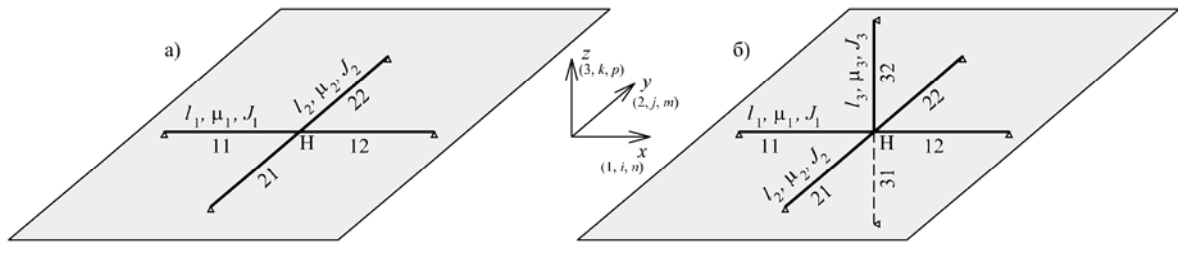


Рис. 1. Системы из двух и трех ортогональных балок

Таблица 1

Таблица переходов  $A_z 1$

$x_v$		$s_v$	I				II			
			11	12	21	22	11	12	21	22
НП	К		$a_1$	$a$	0	0	$a_1$	0	0	$e$
	С		$b_1$	$b$	1	$f$	$b_1$	$b$	1	$f$
КП	К		$c_1$	$c$	0	$g$	$c_1$	$c$	0	$g$
	С		$d_1$	$d$	1	1	$d_1$	1	1	$h$
КП	К		$a$	$a_2$	0	0	0	$a_2$	$e$	0
	С		$b$	$b_2$	$f$	1	$b$	$b_2$	$f$	1
КП	К		$c$	$c_2$	$g$	0	$c$	$c_2$	$g$	0
	С		$d$	$d_2$	1	1	1	$d_2$	$h$	1

Тогда совокупность характеристических функций автомата  $A_z 1$  можно выразить двумерной (квадратной) матрицей  $\Omega_z$  шестого порядка с кодами НП, КП, аналогичными матрице  $M_z$  [5] для обычного участка балки

$$\Omega_z = V({}^1G_z) \tilde{V}({}^2G_z). \quad (1)$$

Значения матриц  $v_{21}$ ,  $v_{22}$  и  $v'_{21}$ ,  $v'_{22}$  [3] в соответствии с кодами табл. 1 для вектора  $\tilde{V}({}^2G_z)$  остаются без изменений.

Матрицы  $v_{11}$ ,  $v_{12}$  будут квадратными матрицами шестого порядка с элементами и кодами табл. 2 [5], характеризующими возможные состояния стержней 11, 12 в состоянии I подграфа  ${}^1G_z$

$$v_{11} = M_{z11}; \quad v_{12} = M_{z12}. \quad (2)$$

Соответственно, выражения  $v'_{11}$ ,  $v'_{12}$  определяются кодами НП, КП стержней 11, 12, реализующимися в состоянии II подграфа  ${}^1G_z$ . Матрица  $v'_{11} = M'_{z11}$  имеет размеры  $6 \times 2$  и соответствует первым двум столбцам матрицы  $M_z$  [5] с кодами 0011 и 0101.

Возможные сочетания кодов НП стержня 12 – 0101 и 0011 (табл. 1). Тогда матрица  $v'_{12} = M'_{z12}$  размерами  $2 \times 6$  определяется двумя строками матрицы  $M_z$

$$M'_{z12} = \begin{array}{c} 0101 \\ 0011 \end{array} \left\| \begin{array}{cccccc} 0011 & 0101 & 0110 & 1001 & 1010 & 1100 \\ \hline \frac{l_1^3}{EJ_{y1}\lambda_{z1}^3} A_{z1} & \frac{l_1^2}{\lambda_{z1}^2} B_{z1} & \frac{l_1}{\lambda_{z1}} C_{z1} & \frac{l_1}{\lambda_{z1}} C_{z1} & D_{z1} & -\frac{EJ_{y1}\lambda_{z1}}{l_1} A_{z1} \\ \hline \frac{l_1^4}{(EJ_{y1})^2 \lambda_{z1}^4} G_{z1} & \frac{l_1^3}{EJ_{y1}\lambda_{z1}^3} A_{z1} & \frac{l_1^2}{EJ_{y1}\lambda_{z1}^2} H_{z1} & \frac{l_1^2}{EJ_{y1}\lambda_{z1}^2} F_{z1} & \frac{l_1}{EJ_{y1}\lambda_{z1}} C_{z1} & E_{z1} \end{array} \right\|. \quad (3)$$

Таким образом, ассоциированная матрица  $\Omega_z$  для стержневой системы (рис. 1а) примет вид

$$\Omega_z = M_{z11}M_{z12}v_{z21}v_{z22} + M'_{z11}M'_{z12}v'_{z21}v'_{z22}. \quad (4)$$

Аналогично формируется ассоциированная матрица  $\Omega_y$  для изгибных колебаний пересекающихся балок в плоскости  $xy$

$$\Omega_y = V({}^1G_y)\tilde{V}({}^2G_y), \quad (5)$$

где матрицы  $V({}^1G_y)$  и  $\tilde{V}({}^2G_y)$  также можно представить в форме

$$V({}^1G_y) = \begin{vmatrix} v_{11}v_{12} & v'_{11}v'_{12} \\ v'_{21}v'_{22} & v_{21}v_{22} \end{vmatrix}; \quad \tilde{V}({}^2G_y) = \begin{vmatrix} v_{21}v_{22} \\ v'_{21}v'_{22} \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Выражения для  $v_{11}$ ,  $v_{12}$  будут тождественны матрице  $M_y$  (табл. 2 [5]) с характеристиками стержней 11, 12

$$v_{11} = M_{y11}; \quad v_{12} = M_{y12}. \quad (7)$$

Элементы матриц  $v'_{11}$ ,  $v'_{12}$  зависят от состояний НП, КП стержней 11, 12 подграфа  ${}^1G_y$ , находящегося в состоянии II и определяются двумя столбцами матрицы  $M_y$  с кодами 0011 и 1010 для  $v'_{11}$  и двумя строками той же матрицы  $M_y$  с кодами 1010 и 0011 для  $v'_{12}$ .

Элементы векторов  $v_{21}$ ,  $v_{22}$  выразим булевыми функциями

$$v_{21} = \begin{vmatrix} 0101/0011 & 0101/1010 \end{vmatrix}; \quad v_{22} = \begin{vmatrix} 1010/0101 \\ 0011/0101 \end{vmatrix}, \quad (8)$$

или функциями Прагера

$$v_{21} = \begin{vmatrix} l_2^3 A_{y2} \\ EJ_{z2} \lambda_{y2}^3 \end{vmatrix} D_{y2}; \quad v_{22} = \begin{vmatrix} D_{y2} \\ l_2^3 A_{y2} \\ EJ_{z2} \lambda_{y2}^3 \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Значения  $v'_{21}$ ,  $v'_{22}$  аналогичны выражениям (2), (3) из [3]. В окончательном виде для ассоциированной матрицы  $\Omega_y$  запишем

$$\Omega_y = M_{y11}M_{y12}v_{21}v_{22} + M'_{y11}M'_{y12}v'_{21}v'_{22}. \quad (10)$$

Вновь обратимся к конструкции на рис. 1а и проведем анализ изменения состояний автомата  $A_z$  при изменении состояний входных переменных НП стержня 21 или КП стержня 22.

В этом случае всю систему, представляемую автоматом  $A_z$ , можно описать трехмерной (кубической) матрицей шестого порядка  $\Omega_{i_1 i_2 i_3}^z$

$$\Omega_{i_1 i_2 i_3}^z = \left\| a_{i_1 i_2 i_3} \right\|_1^6, \quad (i_1, i_2, i_3 = 1, 2, \dots, 6). \quad (11)$$

На рис. 2 схематично обозначены направления изменения индексов и угловые элементы кубической матрицы  $n$ -го порядка.

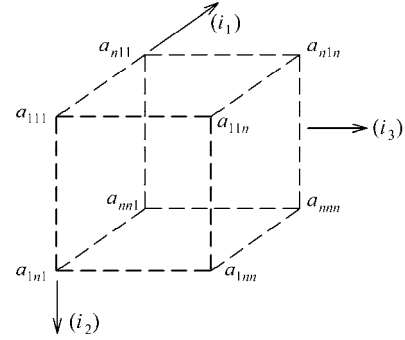


Рис. 2. Обозначения элементов кубической матрицы  $n$ -го порядка

Характерным для кубических матриц является то, что действия над ними производятся по тем же правилам, как и для двумерных матриц с добавлением последовательных переносов еще по одному направлению [6]. Так, для матрицы (11) все шесть сечений ориентации  $i_1$  при фиксированном значении индекса  $i_1 = 1, 2, \dots, 6$  будут обычными двумерными матрицами 6-го порядка  $\Omega_{i_2 i_3}^z, \Omega_{2 i_3}^z, \dots, \Omega_{6 i_3}^z$  ( $i_2, i_3 = 1, 2, \dots, 6$ ).

В таблице переходов 1 возможность перестановки кодов КП стержня 22 выразим буквенными символами  $e_2, f_2, g_2, h_2$ . Число перестановок кодов из двух произвольных и двух фиксированных параметров равно шести. Последовательный перебор этих кодов в порядке 0011, 0101, ..., 1100 позволяет сформировать элементы матриц-столбцов  $v_{22}$  и  $v'_{22}$  в выражении (4).

Несложно заметить, что поочередное изменение кодов начальных параметров стержня 22 в состоянии I (табл. 1) подграфа  ${}^2G_z$  будет отвечать изменению двух последних функций столбцов матрицы  $M_z$  [5]

$$v_{22} = \tilde{V}_{22}^{0011} = \left\| \begin{array}{c|c} 0011 & \\ \hline \frac{l_2^3}{EJ_{y2}\lambda_{z2}^3} A_{z2} & 0101 \\ \hline \frac{l_2^4}{(EJ_{y2})^2 \lambda_{z2}^4} G_{z2} & 0011 \\ \hline \end{array} \right\| ; \dots ;$$

$$v_{22} = \tilde{V}_{22}^{1100} = \left\| \begin{array}{c|c} 1100 & \\ \hline -\frac{EJ_{y2}\lambda_{z2}}{l_2} A_{z2} & 0101 \\ \hline E_{z2} & 0011 \\ \hline \end{array} \right\|, \quad (12)$$

а в состоянии II – полному набору матричных функций столбцов матрицы  $M_z$

$$v'_{22} = \tilde{V}'_{22}{}^{0011}; \tilde{V}'_{22}{}^{0101}; \dots; \tilde{V}'_{22}{}^{1100}. \quad (13)$$

Поэтому для двумерной матрицы  $\Omega_{i_1 i_3}^z$ , образованной сечением ориентации  $i_1 = 1$ , можно записать

$$\Omega_{i_1 i_3}^z = M_{z11} M_{z12} v_{21} \tilde{V}_{22}^{0011} + M'_{z11} M'_{z12} v'_{21} \tilde{V}'_{22}{}^{0011}. \quad (14)$$

При  $i_1 = 2$  получим

$$\Omega_{2 i_3}^z = M_{z11} M_{z12} v_{21} \tilde{V}_{22}^{0101} + M'_{z11} M'_{z12} v'_{21} \tilde{V}'_{22}{}^{0101}, \quad (15)$$

или, в другой форме,

$$\Omega_{i_1 i_3}^z = \left\| M_{z11} M_{z12} \mid M'_{z11} M'_{z12} \right\| \left\| \begin{array}{c} v_{21} \tilde{V}_{22}^{0101} \\ v'_{21} \tilde{V}'_{22}{}^{0101} \end{array} \right\|. \quad (16)$$

Аналогично получаем выражения для остальных матриц  $\Omega_{i_1 i_3}^z$  при  $i_1 = 3, \dots, 6$ .

Пользуясь двумерными сечениями [6], выразим кубическую матрицу  $\Omega_{i_1 i_2 i_3}^z$  в виде таблицы, в которой сечения отделяются вертикальными линиями

$$\Omega_{i_1 i_2 i_3}^z = \left\| a_{i_1 i_2 i_3} \mid a_{2 i_2 i_3} \mid \dots \mid a_{6 i_2 i_3} \right\| \begin{array}{c} \rightarrow (i_1) \\ \downarrow \rightarrow (i_3) \\ (i_2) \end{array} \quad (17)$$

где стрелки обозначают направления возрастания порядковых номеров индексов  $i_1, i_2, i_3$ .

Следующим шагом является построение пространственной  $r$ -мерной матрицы  $\Omega_{i_1 i_2 i_3 i_4}^z$  ( $r = 4$ ) шестого порядка, получающейся в результате подачи входных символов  $e_1 f_1 g_1 h_1$  на множестве  $\{0, 0, 1, 1\}$  для НП стержня 21 (табл. 1)

$$\Omega_{i_1 i_2 i_3 i_4}^z = \left\| a_{i_1 i_2 i_3 i_4} \right\|_1^6. \quad (18)$$

В состоянии I подграфа  ${}^2G_z$  коды НП, КП стержня 21 формируют функции строк, соответствующие вектору  $v_{21}$  и первым двум элементам матрицы  $M_z$  с кодами КП 0011 и 0101

$$v_{21} = V_{21}^{1100} = \left\| E_{z2} \mid -\frac{EJ_{y2}\lambda_{z2} A_{z2}}{l_2} \right\| 1100 ; \dots ;$$

$$v_{21} = V_{21}^{0011} = \left\| \frac{l_2^4 G_{z2}}{(EJ_{y2})^2 \lambda_{z2}^4} \mid \frac{l_2^3 A_{z2}}{EJ_{y2} \lambda_{z2}^3} \right\| 0011. \quad (19)$$

Во втором состоянии подграфа  ${}^2G_z$  получим строки матрицы  $M_z$  с последовательным изменением кодов НП стержня 21, соответствующие матрице  $v'_{21}$

$$v'_{21} = V_{21}'{}^{1100}; V_{21}'{}^{1010}; \dots; V_{21}'{}^{0011}. \quad (20)$$

Таким образом, для совокупности элементов двумерной матрицы  $\Omega_{i_1 i_2 i_3 i_4}^z$  ( $i_1, i_2, i_3, i_4 = 1, 2, \dots, 6$ ), образованной двукратным сечением ориентации ( $i_1 i_2$ ) при фиксированных значениях индексов  $i_1 i_2$ , можно записать

$$\Omega_{i_1 i_3 i_4}^z = M_{z11} M_{z12} V_{21}^{1100} \tilde{V}_{21}^{0011} + M'_{z11} M'_{z12} V_{21}'{}^{1100} \tilde{V}'_{21}{}^{0011}. \quad (21)$$

При  $i_1 = 2, i_2 = 1$  приходим к выражению для  $\Omega_{21 i_3 i_4}^z$ , которое запишем в форме (16)

$$\Omega_{21 i_3 i_4}^z = \left\| M_{z11} M_{z12} \mid M'_{z11} M'_{z12} \right\| \left\| \begin{array}{c} V_{21}^{1010} \tilde{V}_{22}^{0011} \\ V_{21}'{}^{1010} \tilde{V}'_{22}{}^{0011} \end{array} \right\|. \quad (22)$$

Далее несложно получить остальные выражения для двумерных матриц при различных сочетаниях  $i_1 i_2$  ( $i_1, i_2 = 1, 2, \dots, 6$ ) с изменением элементов векторов в правой части (22). Например, при значениях индексов  $i_1, i_2 = 6$  получим

$$\Omega_{66 i_3 i_4}^z = \left\| M_{z11} M_{z12} \mid M'_{z11} M'_{z12} \right\| \left\| \begin{array}{c} V_{21}^{0011} \tilde{V}_{22}^{1100} \\ V_{21}'{}^{0011} \tilde{V}'_{22}{}^{1100} \end{array} \right\|. \quad (23)$$

Аналогично (17), представим двумерные сечения пространственной матрицы  $\Omega_{i_1 i_2 i_3 i_4}^z$  в виде квадратной таблицы с выделением двумерных

сечений вертикальными и горизонтальными линиями

$$\Omega_{i_1 i_2 i_3 i_4}^z = \begin{vmatrix} a_{11i_2i_3} & a_{12i_2i_3} & \dots & a_{16i_2i_3} \\ a_{21i_2i_3} & a_{22i_2i_3} & \dots & a_{26i_2i_3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{61i_2i_3} & a_{62i_2i_3} & \dots & a_{66i_2i_3} \end{vmatrix} \begin{matrix} \rightarrow (i_2) \\ \rightarrow (i_4) \\ \downarrow (i_3) \\ \downarrow (i_1) \end{matrix} \quad (24)$$

Другие двумерные простые сечения также можно представить в форме (24) для матрицы  $\Omega_{i_1 i_2 i_3 i_4}^z$  с фиксированными значениями индексов  $i_3, i_4$ .

Кроме этого, следуя [6] для  $r$ -мерной пространственной матрицы возможно получение  $(n!)^{r-2}$  двумерных трансверсальных сечений, состоящих из  $n$  трансверсальных строк, каждая пара которых не принадлежит одному и тому же простому сечению.

Пространственные матрицы  $\Omega_{i_1 i_2 i_3}^y$  и  $\Omega_{i_1 i_2 i_3 i_4}^y$  для изгибных колебаний пересекающихся балок в плоскости  $xu$  также можно представить в форме (11), (18) с последующим выделением двумерных сечений (17), (24).

Для построения ассоциированной матрицы  $\Omega_{\varphi z}$ , описывающей совместные изгибно-крутильные колебания системы пересекающихся балок, необходимо воспользоваться таблицей переходов автомата  $AT$  (табл. 1 [7]) с возможными состояниями промежуточного блока плоской рамы (рис. 2, 3 [7]). Количество возможных состояний граничных параметров подсистемы определяется входными последовательностями длиной  $l=6$  для НП стержня 11 и КП стержня 12. Характеристические функции автомата  $AT_1$  в соответствии с кодами табл. 1 [7] можно представить ассоциированной матрицей  $\Omega_{\varphi z}$  восьмого порядка

$$\Omega_{\varphi z} = \left\| \begin{array}{c|c} M_{11} & M_{12} \\ \hline M_{21} & M_{22} \end{array} \right\|, \quad (25)$$

где подматрицы  $M_{ij}$  определяются выражениями (15)–(21) [7].

Подобным образом, для исследования состояний автомата  $AL_1$ , учитывающего совместные изгибно-продольные колебания пересекающихся балок, следует воспользоваться таблицей переходов  $AL_1$ , аналогичной табл. 1 [7], и набором матричных функций (23)–(28) [7], из которых формируются подматрицы  $M_{ij}$  (25) для ассоциированной матрицы  $\Omega_{xy}$ .

Последовательный перебор граничных условий НП стержня 21 и КП стержня 22 позволяет перейти к трех- и четырехмерным матрицам восьмого порядка  $\Omega_{i_1 i_2 i_3}^{\varphi z}$  и  $\Omega_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{\varphi z}$ . В отличие от элементов пространственных матриц, характеризующих совместные изгибные колебания стержневой системы, элементы матриц  $\Omega^{\varphi z}$  будут содержать упорядоченные произведения матричных функций  $M_{\varphi}$  и  $M_z$  [5, 7]. Алгоритм построения пространственных матриц  $\Omega_{i_1 i_2 i_3}^{xy}$  и  $\Omega_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{xy}$  будет аналогичным.

Для построения уравнений частот в ортогональной форме трехмерной стержневой системы необходимо разделить ее плоскими сечениями на подсистемы, в которых какие-либо две балки всегда окажутся в плоскости сечения, а третья будет перпендикулярна этой плоскости. Как уже отмечалось [3], изгибные колебания балок в образованной ими плоскости будут вызывать крутильные, а из этой плоскости – продольные колебания ортогональной для них балки. Поэтому достаточно построить ассоциированные матрицы для одной какой-либо подсистемы, которые будут действительны также для описания других аналогичных подсистем.

Например, при изгибных колебаниях стержней 11, 12 и 21, 22 в плоскости  $xu$  стержни 31, 32 (рис. 16) будут испытывать крутильные колебания. В этом случае подграфы системы могут находиться только в двух состояниях I, II (рис. 9 [3]). Соответственно, таблица переходов 2 автомата  $ART_1$  при условии подачи входных последовательностей длиной  $l=4$  на НП, КП изгибаемых стержней примет следующий вид (см. табл. 2).

Учитывая только «входы» НП стержня 11 и КП стержня 12 получим двумерную матрицу  $\Omega_{\varphi yz}$  шестого порядка в следующей форме

$$\Omega_{\varphi yz} = V \left( {}^1GT \right) V \left( {}^2GT \right) \tilde{V} \left( {}^3GT \right), \quad (26)$$

или в развернутом виде

$$\Omega_{\varphi yz} = \left\| \begin{array}{cc|cc} v_{11} v_{12} & v'_{11} v'_{12} & v_{21} v_{22} & 0 \\ \hline 0 & v'_{21} v'_{22} & \omega_{31} \omega_{32} & \omega'_{31} \omega'_{32} \end{array} \right\| \quad (27)$$

Несложно заметить, что элементы матриц, входящих в выражение (27) в соответствии с кодами табл. 2 приводятся к элементам ассоциированной матрицы  $\Omega_y$  (10) с последовательным их умножением на матрицы  $\omega_{31} \omega_{32}$  и

$\omega'_{31}\omega'_{32}$  [3], характеризующие крутильные колебания стержней 31 и 32.

$$\Omega_{\varphi,yz} = M_{y11}M_{y12}v_{21}v_{22}\omega_{31}\omega_{32} +$$

$$+M'_{y11}M'_{y12}v'_{21}v'_{22}\omega'_{31}\omega'_{32}. \quad (28)$$

Таблица 2

Таблица переходов автомата  $ART_1$

$s_v$		I						II					
		11	12	21	22	31	32	11	12	21	22	31	32
НП	К	$a_1$	$a$	$e_1$	$e$	0	$k$	$a_1$	$a$	$e_1$	$e$	0	0
	С	$b_1$	$b$	$f_1$	0	0	$k$	$b_1$	0	$f_1$	$f$	0	0
КП	К	$c_1$	$c$	$g_1$	1	1	$l$	$c_1$	1	$g_1$	$g$	1	1
	С	$d_1$	$d$	$h_1$	$h$	1	$l$	$d_1$	$d$	$h_1$	$h$	1	1
КП	К	$a$	$a_2$	$e$	$e_2$	$k$	0	$a$	$a_2$	$e$	$e_2$	0	0
	С	$b$	$b_2$	0	$f_2$	0	0	0	$b_2$	$f$	$f_2$	0	0
КП	К	$c$	$c_2$	1	$g_2$	$l$	1	1	$c_2$	$g$	$g_2$	1	1
	С	$d$	$d_2$	$h$	$h_2$	1	1	$d$	$d_2$	$h$	$h_2$	1	1

Соответственно, для ассоциированной матрицы  $\Omega_{xyz}$ , описывающей изгибные колебания балок 1-го и 2-го направлений из плоскости  $xy$  и продольные колебания балки направления 3 (рис. 1б), можно записать

$$\Omega_{xyz} = M_{z11}M_{z12}v_{21}v_{22}u_{31}u_{32} + M'_{z11}M'_{z12}v'_{21}v'_{22}u'_{31}u'_{32}. \quad (29)$$

Далее, построение пространственных матриц  $\Omega_{i_1i_2i_3}^{xyz}$  и  $\Omega_{i_1i_2i_3i_4}^{xyz}$  будет точно таким же, как и пространственных матриц  $\Omega_{i_1i_2i_3}^z$  и  $\Omega_{i_1i_2i_3i_4}^z$  (11), (18). Отличие заключается лишь в дополнительных множителях  $u_{31}u_{32}$  и  $u'_{31}u'_{32}$  в выражениях для двумерных матриц (14), (15), (21) и др., образованных соответствующими сечениями ориентации.

Такую же аналогию можно провести между пространственными матрицами  $\Omega_{i_1i_2i_3}^{\varphi,yz}$ ,  $\Omega_{i_1i_2i_3i_4}^{\varphi,yz}$  и  $\Omega_{i_1i_2i_3}^y$ ,  $\Omega_{i_1i_2i_3i_4}^y$  с учетом дополнительных множителей  $\omega_{31}\omega_{32}$  и  $\omega'_{31}\omega'_{32}$ .

В общем случае, для трехмерной стержневой системы можно составить  $r$ -мерную пространственную матрицу ( $r = 5, 6$ ) с индексами  $i_1, i_2, \dots, i_6$ , где  $i_5, i_6 = 1, 2$ .

Как видим, число измерений  $r$  пространственной матрицы  $\Omega$  зависит от числа «входов» автомата  $A$ , описывающего колебания стержневой системы, а ее порядок  $n$  – от числа перестановок кодов соответствующих входных переменных. Каждое сечение ориентации ассо-

циированной пространственной матрицы кодируется точно так же, как и матрица обычного участка балки.

Таким образом, с помощью кодированных ассоциированных матриц характеристические уравнения получаются как в общем функциональном, так и в цифровом виде. В отличие от простых конструкций, ассоциированные матрицы относятся не к отдельным стержням, а к отдельным блокам или подблокам системы. Элементами матриц для структуры более высокого уровня будут аналогичные одномерным системам произведения матриц для других «вложенных» структур. Степень «вложенности» матриц определяется количеством входных последовательностей из наборов состояний граничных параметров в сечениях системы. На самом низком уровне элементами ассоциированных матриц являются функции Прагера для стержня.

Задачей последующего исследования является вывод уравнения состояния сложной системы по уравнениям отдельных ее частей, полученных с помощью обыкновенных (одномерных, двумерных) и пространственных ассоциированных матриц.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Галишникова, В. В. Регулярные стержневые системы. Теория и методы расчета [Текст] / В. В. Галишникова, В. А. Игнатьев / Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т. – Волгоград: ВолгГАСУ, 2006. – 552 с.
2. Nayfeh, A. H. Dynamic characteristics of large repetitive framelike structures [Текст] /

- A. H. Nayfeh, M. S. Hartle // Trans. ASME: J. Appl. Mech. – 1984. – 51, N 3. – P. 510-518.
3. Распопов, А. С. Применение топологических методов к расчету пространственных колебаний двух- и трехмерных стержневых систем [Текст] / А. С. Распопов // Вестник Днепроп. нац. ун-та жел.-дор. трансп. им. акад. В. Лазаряна. – 2008. – Вып. 22. – Д.: Изд-во ДНУЖТ, 2008. – С. 117-124.
  4. Гилл, А. Введение в теорию автоматов [Текст] / А. Гилл. – М.: Наука, 1966. – 272 с.
  5. Распопов, А. С. Конечно-автоматное моделирование пространственных колебаний стержневых и балочных конструкций [Текст] / А. С. Распопов // Вестник Днепроп. нац. ун-та жел.-дор. трансп. им. акад. В. Лазаряна. – 2007. – Вып. 19. – Д.: Изд-во ДНУЖТ, 2007. – С. 125-133.
  6. Соколов, Н. П. Пространственные матрицы и их приложения [Текст] / Н. П. Соколов. – М.: Гос. издат. физ.-мат. лит., 1960. – 300 с.
  7. Распопов, А. С. Применение конечных автоматов к расчету пространственных колебаний рамных мостов [Текст] / А. С. Распопов // Баштові споруди: матеріали, конструкції, технології // Вісник Донбаської нац. акад. будівн. та архітект. – Вип. 2007-6 (68). – Макіївка, 2007. – С. 73-79.

Поступила в редколлегию 26.08.2008.