УДК 517.518.2

Л. А. ПАНИК (ДИИТ)

АНАЛИЗ И МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ПОТОКОВ В ТРАНСПОРТНЫХ СЕТЯХ С УЧЕТОМ ИНТЕРВАЛЬНЫХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

У статті розроблений метод і виконаний багатокритерійний аналіз потоків в мережевих моделях в умовах нечітких (інтервальних) початкових даних.

В статье разработан метод и выполнен многокритериальный анализ потоков в сетевых моделях в условиях нечетких (интервальных) исходных данных.

In the article a method is developed and the multicriterion analysis of streams is executed in network models in the conditions of unclear (interval) basic data.

Введение

Задача нахождения максимального потока в сети является одной из фундаментальных в теории графов и комбинаторной оптимизации. Она изучается на протяжении многих лет, что обусловлено широким спектром ее использования во многих практических приложениях [1], связанных с анализом транспортных систем, систем материальных потоков, вычислительных и коммуникационных сетей, энергетических и электрических систем и т.д.

Большинство из существующих методов решения задачи о максимальном потоке в сети не позволяют учитывать неопределенности, связанные с разбросом значений, неточным определением данных, учетом ошибок измерений и др. В связи с этим возникает потребность в разработке методов, учитывающих перечисленные виды неопределенностей.

Материал и результаты исследования

В статье были рассмотрены ряд подходов, предлагающих решение задачи о максимальном потоке при нечетких исходных данных:

1) Пропускные способности дуг являются нечеткими множествами. Пусть $C_{ij} = \{c_{ij}\}$ – множества пропускных способностей на дугах (i, j) сети. Тогда нечеткие множества A_{ij} в C_{ij} есть совокупность упорядоченных пар $A_{ij} = \{c_{ij}, mA_{ij}(c_{ij})\}$, где $mA_{ij}(c_{ij})$ – функция принадлежности c_{ij} к A_{ij}. Здесь обязателен тот факт, что мощности множеств пропускных способностей дуг должны быть одинаковы. И задача состоит в нахождении множества максимальных потоков.

2) Пропускные способности дуг – нечеткие интервалы. В общем случае нечеткоинтервальную математику можно свести к разложению нечетких интервалов на составляющие α-уровни и к дальнейшему оперированию с ними в рамках интервальной математики. На рис. 1 показано, что α-уровни являются, в сущности, четкими интервалами, соответствующими определенным заданным значениям функции принадлежности.

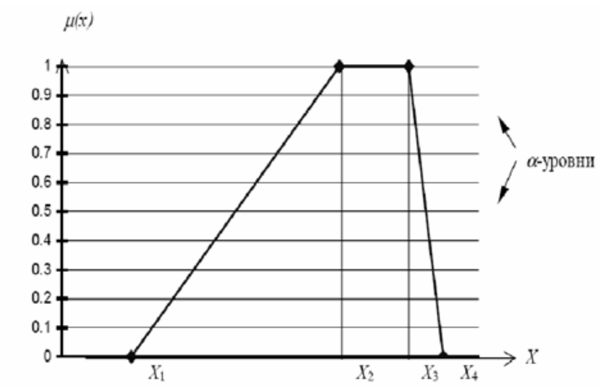


Рис. 1. Разложение нечетких интервалов на составляющие α-уровни

Тогда для этого вида неопределенности все дуги сети могут представляться различными нечеткими интервалами. И задача состоит в нахождении с определенной точностью максимального потока в сети в виде нечеткого интервала. Точность зависит от количества α-уровней.

В связи с этим в статье исследуется четкая потоковая сеть с весами, заданными в виде интервальных неопределенностей. В потоковой сети каждому ребру сопоставлена пропускная способность $\tilde{C}(i, j)$, представленная в виде интервала $\left[\underline{c}(i, j); \bar{c}(i, j)\right]$, где $\underline{c}(i, j)$ – нижнее значение пропускной способности дуги (i, j),

$\bar{c}(i,j)$ – соответствующее верхнее значение. Свойства носителей потока представляются интервалами, в этом случае поток в сети, определенный на дугах, также будет представлен интервальной величиной $\tilde{f}(i,j)$. Тогда условие сохранения потока и ограничения на пропускные способности дуг имеют вид:

$$\sum_j \tilde{f}(i,j) = \sum_j \tilde{f}(j,i), \quad \forall i \neq S,T, \qquad (1)$$

$$0 \leq \tilde{f}(i,j) \leq \tilde{C}(i,j), \forall (i,j) \in E. \qquad (2)$$

Здесь S является источником, а T – стоком, E – множество ребер графа сети.

Исследуемая в задаче интервальная величина потока в сети, обозначенная через $\tilde{F}$, определяется выражением:

$$\tilde{F} = \sum_j \tilde{f}(S,j). \qquad (3)$$

В работе рассматривается и новая задача – выбора компромиссных вариантов на множествах траекторий носителей потока с индивидуальными свойствами «право собственности». В задаче есть n собственников, которым принадлежат заданные количества единиц потока: $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Рассчитывается интервальная максиминная оценка эффективности потока с собственными свойствами носителей в следующем виде [2] (принцип гарантированного результата):

$$\tilde{F}(s) = \max_s \min_{i \in [1,n]} \frac{\tilde{f}_i(s) - \tilde{f}_i^-}{\tilde{f}_i^+ - \tilde{f}_i^-}, \qquad (4)$$

где s – распределение единиц потока в сети (мощность множества s равна максимальному потоку), $\tilde{f}_i(s)$ – интервальный доход i-го перевозчика при s-том распределении, $\tilde{f}_i^+$, $\tilde{f}_i^-$ – наибольший и наименьший интервальный доход i-го перевозчика.

Так как в функции $\tilde{F}(s)$ используется максимум и минимум, то возникает проблема сравнения интервалов. В работе предложен метод сравнения четких интервалов на основе теоретико-вероятностного подхода к распределению случайных величин [3], позволяющий определить вероятность, с которой один интервал больше другого, а также вероятность их равенства. Если сравниваемые интервалы не имеют общих областей, то проблемы их сравнения не вызывают трудностей. В случае пересечения интервалов образуются подинтервалы, играющие важную роль в расчете вероятностных характеристик. Все случаи пересечения интервалов представлены в табл. 1.

Представленная методика разработана для случая сравнения двух интервалов. Ее результаты применимы и для выбора максимального /минимального/ интервала из группы анализируемых интервалов (ранжирование группы интервалов). Для этого можно использовать модификацию классического алгоритма сортировки, заменяя в нем операторы сравнения действительных чисел описанными выше операторами сравнения интервалов.

Решение проблем моделирования и оптимизации всегда связано с наличием неопределенностей различного вида. При этом задачи оптимизации являются, как правило, многокритериальными. Так, наряду с требованиями увеличения каких-либо благ (дохода), или снижения затрат, всегда существует критерий, характеризующий желание снижения неопределенности или, что то же самое, риска неполучения желаемого результата. Поэтому целесообразно формулировать нашу задачу оптимизации как двухкритериальную, на основе частных критериев увеличения благ (дохода) и минимизации риска, понимаемого как неопределенность результата. Степень неопределенности определялась через ширину итогового интервала целевой функции в точке оптимума.

Для решения проблемы используем метод двухкритериального сравнения интервалов с учетом вероятности доминирования одного интервала над другим и размеров интервалов. Построены двухкритериальные оценки сравниваемых интервалов с учетом коэффициентов относительной важности частных критериев. Рассмотрим два интервала A и B.

Первый критерий сравнения интервалов, назовем его критерием вероятности, был рассмотрен ранее.

Второй критерий сравнения интервалов, назовем его критерием ширины, связанный с оценкой риска, представим через параметры, характеризующие относительные размеры сравниваемых интервалов:

$$\mu_W(x_A) = 1 - x_A, \text{ где } x_A = \frac{W_A}{\max(W_A, W_B)}; \qquad (5)$$

$$\mu_W(x_B) = 1 - x_B, \text{ где } x_B = \frac{W_B}{\max(W_A, W_B)}, \qquad (6)$$

где W_A, W_B – ширина интервалов A и B, соответственно.

Графическое представление функций желательности (5), (6) приведено на рис. 2. Далее проведем агрегирование частных критериев в глобальный критерий, обобщенно характеризующий наше стремление к уменьшению интервалов в вероятностном смысле и их ширины. При этом будем использовать коэффициенты относительной важности (ранги), отражающие субъективные или объективные оценки степени значимости каждого из использованных частных критериев для достижения поставленной цели (в данном случае для решения задачи оптимизации при использовании интервальной целевой функции).

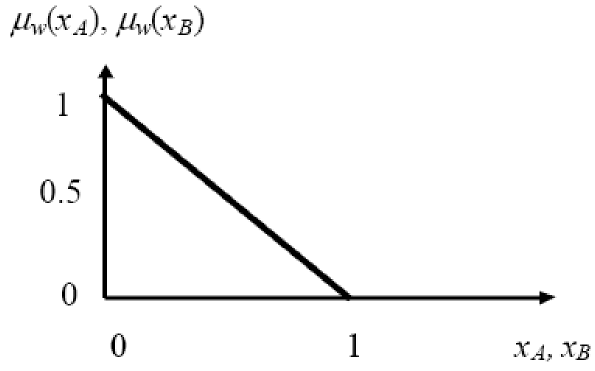


Рис. 2. Функция желательности относительной ширины интервалов

Поскольку в общем случае могут иметь место все три интервальные события $A<B$, $A=B$ и $A>B$, сформулируем следующие интегральные критерии для оценки величины интервалов:

$$D_{A<B}(A,B)=\frac{1}{2}\cdot\left(r_p P(A<B)+r_W \mu_W(x_A)\right);\quad (7)$$

$$D_{A>B}(A,B)=\frac{1}{2}\cdot\left(r_p P(A>B)+r_W \mu_W(x_B)\right);\quad (8)$$

$$D_{A=B}(A,B)=\max\left(D'_{A=B}(A,B), D''_{A=B}(A,B)\right),\quad (9)$$

где

$$D'_{A=B}(A,B)=\frac{1}{2}\cdot\left(r_p P(A=B)+r_W \mu_W(x_A)\right);\quad (10)$$

$$D''_{A=B}(A,B)=\frac{1}{2}\cdot\left(r_p P(A=B)+r_W \mu_W(x_B)\right).\quad (11)$$

В (7)–(11) r_p, r_W – ранги (коэффициенты относительной значимости) критериев вероятности и ширины, соответственно.

При наличии только двух частных критериев задача определения их рангов r_p, r_W не вызывает трудностей. Однако при этом должно быть выполнено обычное ограничение:

$$(r_p + r_W)/2 = 1.\quad (12)$$

При соблюдении данного условия для любого случая двухкритериального сравнения интервалов будет выполняться неравенство:

$$0 \le D_{A<B}, D_{B<A}, D_{A=B} \le 1.\quad (13)$$

Применение такого метода сравнения интервалов с учетом вероятности превосходства одного интервала над другим и относительной ширины в процессе оптимизации для сравнения текущего значения целевой функции с оптимальным, найденным на предыдущих шагах, позволяет достичь снижения неопределенности результата.

Продемонстрируем эффективность разработанной методики на вышеизложенной задаче оптимизации (4). Рассмотрена сеть на рис. 3, на дугах указаны два числа, первое из них указывает на величину потока, а второе – на пропускную способность дуги. У этой сети, как мы видим, максимальный поток равен 7. Пусть также, для этой же сети, заданы на дугах стоимости за перевозку в виде интервальных неопределенностей (рис. 4).

Далее, пусть есть три собственника, которым принадлежит следующее количество единиц потока: $m_1 = 5$, $m_2 = 1$, $m_3 = 1$. Был построен график (рис. 5) изменения ширины интервала максиминной оценки эффективности потока (4) при изменении ранга r_W от 0 до 2, а ранг r_p при этом изменялся от 2 до 0, так как должно выполняться ограничение (12).

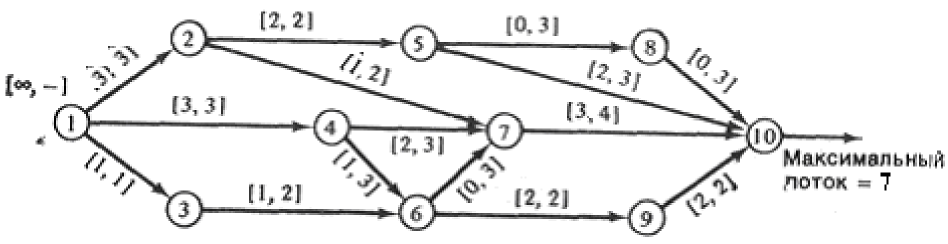
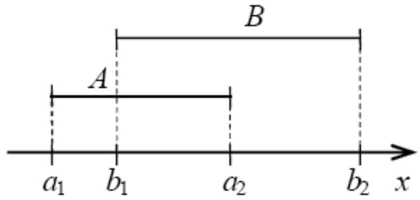
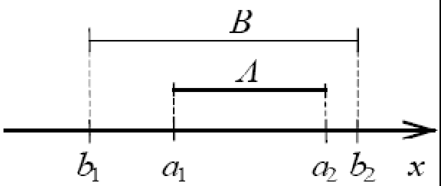
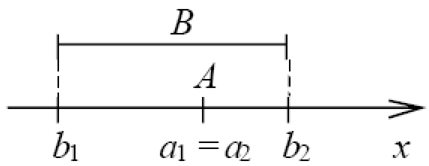
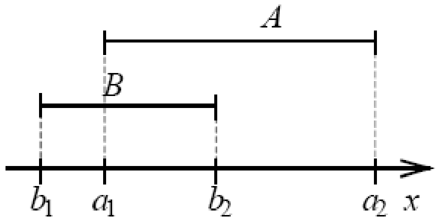
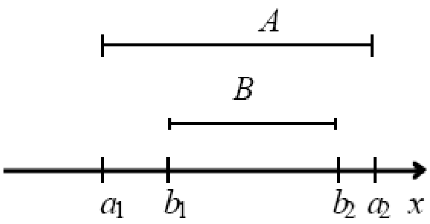
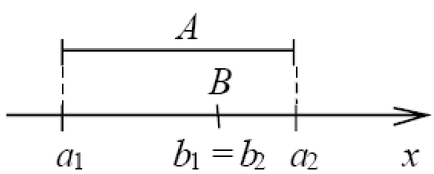


Рис. 3. Сеть с найденным максимальным потоком

Таблица 1

Вероятностные оценки отношений между интервалами,
между интервалами и действительными числами

Случай	$P(A<B)$	$P(A=B)$	$P(A>B)$
1. 	$1-\dfrac{(a_2-b_1)^2}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}$	$\dfrac{(a_2-b_1)^2}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}$	0
2. 	$\dfrac{b_2-a_2}{b_2-b_1}$	$\dfrac{a_2-a_1}{b_2-b_1}$	$\dfrac{a_1-b_1}{b_2-b_1}$
3. $a_1=a_2=a$ 	$\dfrac{b_2-a}{b_2-b_1}$	0	$\dfrac{a-b_1}{b_2-b_1}$
4. 	$1-\dfrac{(b_2-a_1)^2}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}$	$\dfrac{(b_2-a_1)^2}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}$	0
5. 	$\dfrac{a_2-b_2}{a_2-a_1}$	$\dfrac{b_2-b_1}{a_2-a_1}$	$\dfrac{b_1-a_1}{a_2-a_1}$
6. $b_1=b_2=b$ 	$\dfrac{a_2-b}{a_2-a_1}$	0	$\dfrac{b-a_1}{a_2-a_1}$

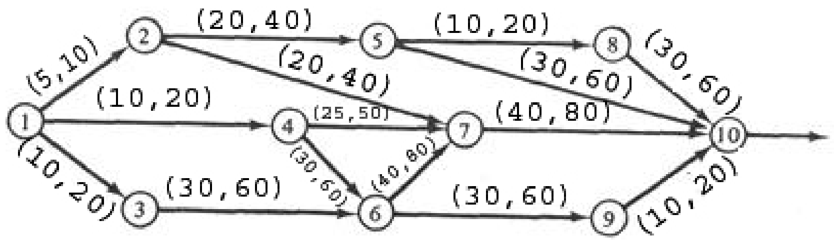


Рис. 4. Сеть с интервальными стоимостями за перевозку на дугах

Из представленного на рис. 5 следует, что при увеличении ранга ширины происходит сдвиг оптимума в сторону с интервалами меньшей ширины. Однако уменьшение ширины оптимального интервала достигается за счет некоторого ухудшения (увеличения) среднего значения интервала. При этом при приближении ранга ширины к значению 2 происходит резкое увеличение среднеинтервального значения целевой функции.

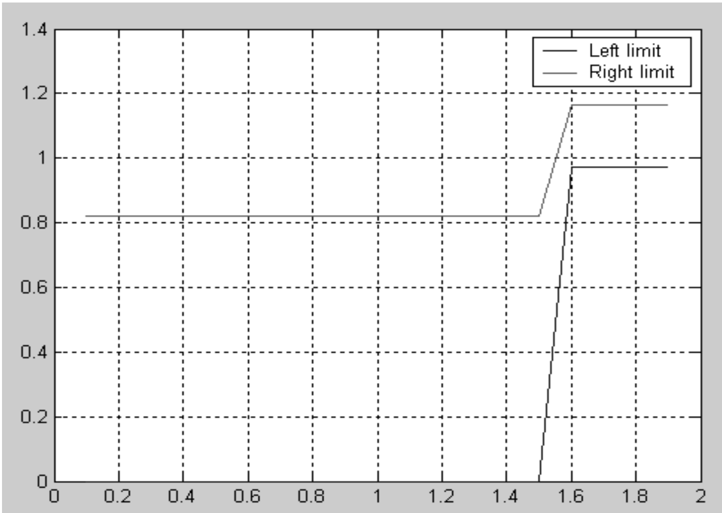


Рис. 5. Зависимость значения интервальной целевой функции $\tilde{F}(s)$ от ранга ширины r_W

Таким образом, в процессе варьирования рангами частных критериев вероятности и ширины интервала можно достигнуть требуемого компромисса между шириной выходного интервала и его средним значением, что вполне согласуется с нашими интуитивными представлениями.

Выводы

Разработаны многокритериальные модели анализа потоковых задач с нечеткими (интервальными) исходными данными. Исследованы возможности применения различных видов операций над интервальными данными. Получены компромиссные двухкритериальные множества решений потоковых задач для показателей – вероятность доминирования ширины интервала, размер интервала.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Филлипс, Д. И. Методы анализа сетей [Текст] / Д. И. Филлипс, А. Гарсиа–Диас. – М.: Мир, 1984. – 496 с.
2. Гермеер, Ю. Б.. Введение в теорию исследования операций [Текст] / Ю. Б. Гермеер. – М.: Наука, 1976. – 352 с.
3. Дилигенский, Н. В. Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология [Текст] / Н. В. Дилигенский, Л. Г. Дымова, П. В. Севастьянов. – М.: Изд-во «Машиностроение - 1», 2004. – 397 с.

Поступила в редколлегию 26.08.2008.