

РУХОМИЙ СКЛАД ЗАЛІЗНИЦЬ І ТЯГА ПОЇЗДІВ

УДК 629.45.027.3

А. Г. РЕЙДЕМЕЙСТЕР^{1*}, С. И. ЛЕВИЦКАЯ^{2*}

^{1*}Каф. «Вагоны и вагонное хозяйство», Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна, ул. Лазаряна, 2, Днепро, Украина, 49010, тел. +38 (056) 373 15 19, эл. почта reidemeister.a@gmail.com, ORCID 0000-0001-7490-7180

^{2*}Каф. «Иностранные языки», Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры, ул. Чернышевского, 24А, Днепро, Украина, 49000, тел. +38 (056) 756 33 56, эл. почта svetik23com@ukr.net, ORCID 0000-0001-6725-0280

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ ЭКИПАЖЕЙ, ОПИСЫВАЕМОГО УРАВНЕНИЯМИ ЛАГРАНЖА I РОДА

Цель. В статье необходимо оценить устойчивость движения железнодорожных экипажей, колебания которых описаны уравнениями Лагранжа I рода, в предположении, что отсутствуют нелинейности с разрывами правых частей. **Методика.** За основу принят метод исследования устойчивости движения Ляпунова по линейному приближению. Уравнения движения составлены в матричной форме. Силы крипа вычислены в соответствии с линейной теорией Калкера. Последовательными дифференцированиями уравнений связей индекс системы уравнений понижен с 2 до 0. Собственные числа матрицы коэффициентов полученной таким образом системы найдены с помощью QR-алгоритма. В соответствии с критерием Ляпунова об устойчивости по линейному приближению движение устойчиво, если у всех собственных чисел действительная часть отрицательна. Нетривиальным является наличие «лишних» степеней свободы, которых нет у механической системы (в ее уравнениях движения оставили только независимые координаты). Этим степеням свободы соответствуют собственные числа и собственные векторы, к устойчивости отношения не имеющие. Чтобы найти правило, позволяющее их исключить, мы рассмотрели несколько моделей тележки, с жесткими и упругими связями большой жесткости в узлах. В предельном случае больших жесткостей результаты для системы без жестких связей должны совпасть с результатами для системы с жесткими связями. **Результаты.** Проведен анализ и сопоставлены частоты (с декрементами) и формы колебаний 3-элементной тележки со связями и без них. При анализе устойчивости системы со связями представляют интерес только те собственные числа, собственные векторы которых не нарушают связей. Значения этих чисел являются пределами для собственных чисел системы, в которой жесткие связи заменены упругими элементами большой жесткости, что позволяет оставить критерий Ляпунова неизменным. **Научная новизна** состоит в адаптации метода исследования устойчивости движения Ляпунова по линейному приближению к случаю, когда уравнения движения железнодорожных экипажей записаны в форме дифференциально-алгебраических уравнений Лагранжа I рода. **Практическая значимость.** Указанная форма записи уравнения движения позволяет упростить исследование устойчивости за счет отказа от выделения множества независимых обобщенных координат с последующим исключением зависимых и допускает вычисление матрицы коэффициентов легко алгоритмизируемым способом. Информация об устойчивости экипажей крайне важна, поскольку конструкция ходовых частей должна в обязательном порядке исключать потерю устойчивости в эксплуатационном диапазоне скоростей.

Ключевые слова: железнодорожный экипаж; устойчивость движения; дифференциально-алгебраические уравнения

Введение

Исследованиям устойчивости движения железнодорожных экипажей уделяют пристальное внимание, начиная с 1950-х годов. Потеря устойчивости сопровождается возникновением больших поперечных сил, угрожающих безопасности движения, что делает невозможным эксплуатацию вагонов при больших скоростях. Среди обширной литературы, посвященной

этому вопросу, укажем [1–14]. В соответствии с современным пониманием потеря устойчивости представляет собой весьма сложное явление, которое вблизи критических скоростей описывает субкритическая бифуркация Хопфа. До некоторой скорости v_1 есть только один аттрактор, соответствующий прямолинейному движению, затем появляется периодический аттрактор, при этом первоначальный сохраня-

РУХОМИЙ СКЛАД ЗАЛІЗНИЦЬ І ТЯГА ПОЇЗДІВ

ется и исчезает при скорости $v_2 > v_1$. При больших скоростях могут появиться хаотические аттракторы. Возможны случаи, когда они возникают уже при скорости v_1 [5]. Применяют следующие методы анализа устойчивости движения [15]:

1)линеаризации уравнений движения (критерий Ляпунова об устойчивости по линейному приближению [1]);

2)квазилинеаризации;

3)метод Галеркина–Урабе [12, 13] (квазилинеаризация по нескольким частотам требует большого объема вычислительной работы);

4)метод «грубой силы», при котором уменьшают скорость движения и ждут, когда исчезнут автоколебания, для определения неустойчивого предельного цикла постепенно увеличивают амплитуду возмущений [14];

5)метод отслеживания траекторий (движение предполагают периодическим и решают уравнение $z(0) = z(T)$, метод не подходит для исследования квазипериодических и хаотических колебаний).

Несмотря на очевидную непригодность к анализу сложной картины возникновения и исчезновения аттракторов, критерий Ляпунова об устойчивости по линейному приближению сохраняет свою привлекательность благодаря простоте и способности делать главное – оценивать критическую скорость. Он сформулирован для систем, которые описывают обыкновенные дифференциальные уравнения. В нашей работе мы распространим его на системы, движение которых задают дифференциально-алгебраические уравнения (ДАУ) Лагранжа I рода. В настоящее время, в связи с распространением стандартных программ интегрирования (например, DASSL), ДАУ все чаще применяют при моделировании колебаний железнодорожных экипажей, поскольку они позволяют обойтись как без исключения зависимых обобщенных координат, так и без замены жестких связей между частями вагона упругими элементами большой жесткости.

Цель

Оценить устойчивость движения железнодорожных экипажей, колебания которых описаны уравнениями Лагранжа I рода, в предположении, что отсутствуют нелинейности с разрывами правых частей.

Методика

Структура уравнений движения рельсового экипажа имеет следующий вид (без нелинейных и неоднородных слагаемых, описывающих движение по кривой):

$$M\ddot{q} + (B + F)\dot{q} + (C + K)q = 0, \quad (1)$$

здесь q – вектор обобщенных координат; M – матрица инерциальных коэффициентов; C , B – матрицы жесткости и вязкости; K , F – матрицы, описывающие взаимодействие колес и рельсов. Уравнение (1) получается, если из вектора q с помощью уравнений связей убрать зависимые обобщенные координаты. При использовании уравнений Лагранжа I рода применяют другой подход: вместо того, чтобы исключать элементы вектора q , оставляют их все, включают уравнения связей в полный набор уравнений, описывающих движение системы, и вводят дополнительные неизвестные λ (в количестве, равном числу уравнений связей), чтобы все эти уравнения можно было решить. В итоге получают систему уравнений:

$$M\ddot{q} + (B + F)\dot{q} + (C + K)q + L^T \lambda = 0; \quad (2)$$

$$Lq = 0. \quad (3)$$

Последнее выражение представляет собой уравнение связей, которым подчинена механическая система. Мы будем предполагать, что матрица L постоянна (не зависит ни от времени, ни от фазовых координат системы). Система уравнений (2) и (3) линейна, так что ее решение имеет вид:

$$\begin{pmatrix} q \\ \lambda \end{pmatrix} = \sum_j C_j e^{p_j t} \begin{pmatrix} \gamma_j \\ l_j \end{pmatrix},$$

где постоянные C_j находят из начальных условий. Показатели p_j вместе с ненулевыми собственными векторами γ_j , l_j являются решениями уравнения:

$$\begin{pmatrix} Mp_j^2 + (B + F)p_j + (C + K) & L^T \\ L & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_j \\ l_j \end{pmatrix} = 0. \quad (4)$$

Понять, устойчиво движение или нет, можно по знаку действительной части величин p_j

РУХОМИЙ СКЛАД ЗАЛІЗНИЦЬ І ТЯГА ПОЇЗДІВ

– если среди них есть положительные числа, движение устойчиво. Искать числа p_j , приравняв нулю определитель стоящей слева матрицы, неудобно. Вместо этого переформулируем задачу так, чтобы показатели p_j оказались собственными числами некоторой матрицы. Из (2) следует, что:

$$\ddot{q} = -M^{-1}(B+F)\dot{q} - M^{-1}(C+K)q - M^{-1}L^T\lambda.$$

Умножив полученное выражение на L и воспользовавшись тем, что $Lq = 0$, получим:

$$(LM^{-1}L^T)\lambda = -LM^{-1}[(B+F)\dot{q} + (C+K)q].$$

Матрица $LM^{-1}L^T$ невырожденная (если у матрицы коэффициентов связей L строк меньше, чем столбцов, и ранг равен числу строк, что мы предполагаем), поэтому:

$$\lambda = -(LM^{-1}L^T)^{-1}LM^{-1}[(B+F)\dot{q} + (C+K)q].$$

Подставив это выражение в исходное уравнение, получим:

$$\ddot{q} = -QM^{-1}(B+F)\dot{q} - QM^{-1}(C+K)q;$$

$$Q = I - M^{-1}L^T(LM^{-1}L^T)^{-1}L.$$

Таким образом, вектор фазовых координат $(\dot{q} \ q)^T$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ q \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \dot{q} \\ q \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} -QM^{-1}(B+F) & -QM^{-1}(C+K) \\ 1 & \end{pmatrix}.$$

Собственные векторы матрицы A , соответствующие собственным числам p_j , имеют вид $(p_j\gamma_j \ \gamma_j)^T$. Рассмотрим, как они связаны с собственными числами и собственными векторами исходной системы со связями, т. е. удовлетворяют ли они уравнению (4) при подходящем выборе вектора множителей Лагранжа l_j . Нам понадобится очевидное соотношение $LQ = 0$. Умножив на L слева выражение

$$p_j^2\gamma_j = -QM^{-1}[(B+F)p_j + (C+K)]\gamma_j, \quad (5)$$

получим $p_j^2L\gamma_j = 0$.

Значит, при ненулевых p_j вектор γ_j удовлетворяет уравнению связей $L\gamma_j = 0$. Уравнение (4) нетрудно переписать в виде:

$$[Mp_j^2 + (B+F)p_j + (C+K)] - \\ -L^T(LM^{-1}L^T)^{-1}Lp_j^2\gamma_j = 0.$$

Следовательно, при ненулевых p_j векторы γ_j удовлетворяют уравнению (4) при

$$l_j = -(LM^{-1}L^T)^{-1}Lp_j^2\gamma_j.$$

Неясно, будут ли векторы γ_j удовлетворять уравнению (4) при $p_j = 0$, но ввиду того, что эти решения соответствуют не представляющим интереса постоянным процессам, мы ими заниматься не будем.

Таким образом, условие устойчивости системы со связями выглядит так:

$$(\forall j, p_j \neq 0) \operatorname{Re} p_j < 0,$$

где p_j – собственные числа матрицы A .

Применим изложенную выше теорию для исследования устойчивости, собственных частот и форм колебаний упрощенной механической системы, состоящей из половины кузова вагона и 3–элементной тележки, на которую он опирается (рис. 1).

Рассматриваем движение только в горизонтальной плоскости. Система состоит из (половины) кузова с наддресорной балкой, двух боковых рам и двух колесных пар. Кузов и наддресорная балка соединены шарниром в пятниковом узле, наддресорная балка с боковыми рамами и боковые рамы с колесными парами – упругими элементами, которые препятствуют относительным поступательным перемещениям в продольном и поперечном направлениях, а также относительным угловым перемещениям вливания взаимодействующих тел.

РУХОМИЙ СКЛАД ЗАЛІЗНИЦЬ І ТЯГА ПОЇЗДІВ

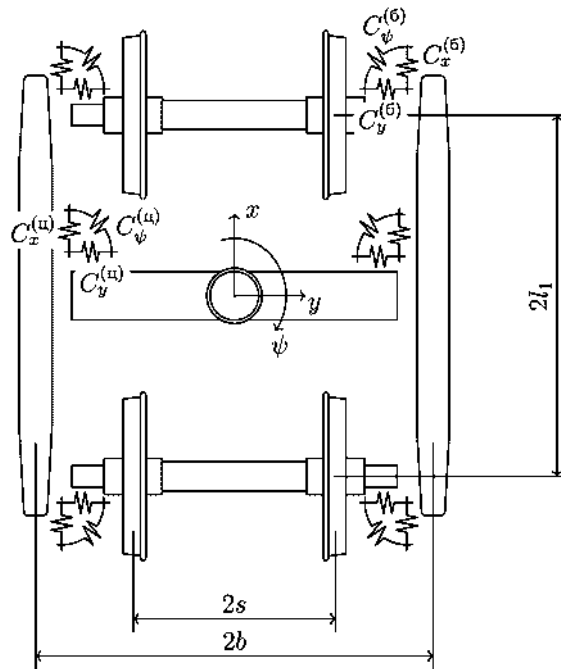


Рис. 1. 3-элементная тележка

Диссипативных элементов в системе нет. Степени свободы перечислены в табл. 1. Через x, y, ψ обозначены малые перемещения подергивания, бокового отхода и виляния, для колесных пар координата φ выбрана так, что $(-\dot{\varphi})$ – малое отклонение угловой скорости вращения колесной пары относительно своей оси от значения V/r (V – скорость движения вагона, r – радиус колеса), соответствующего невозмущенному движению.

Таблица 1

Степени свободы и обобщенные координаты

Тело	Степени свободы	Обобщенные координаты
Кузов с наддресорной балкой	$x^{(к)}, y^{(к)}, \psi^{(нб)}$	q_1, q_2, q_3
Левая боковая рама ($j = 1$)	$x_1^{(бр)}, y_1^{(бр)}, \psi_1^{(бр)}$	q_4, q_5, q_6
Правая боковая рама ($j = 2$)	$x_2^{(бр)}, y_2^{(бр)}, \psi_2^{(бр)}$	q_8, q_9, q_{10}
Первая колесная пара ($m = 1$)	$x_1^{(кп)}, y_1^{(кп)}, \varphi_1^{(кп)}, \psi_1^{(кп)}$	q_{11}, \dots, q_{13}
Вторая колесная пара ($m = 2$)	$x_2^{(кп)}, y_2^{(кп)}, \varphi_2^{(кп)}, \psi_2^{(кп)}$	q_{14}, \dots, q_{17}

Нас будет интересовать, как соотносятся частоты и формы колебаний системы без связей (SF) и систем, перемещения которых подчинены следующим ограничениям:

SCX – запрещены перемещения наддресорной балки относительно боковых рам (в проемах рессорного подвешивания) в продольном

направлении;

SAJ – запрещены перемещения челюстных проемов боковых рам относительно шеек осей колесных пар (боковые рамы шарнирно соединены с колесными парами).

Что касается параметров системы, то смысл обозначений коэффициентов жесткости и ос-

РУХОМИЙ СКЛАД ЗАЛІЗНИЦЬ І ТЯГА ПОЇЗДІВ

новых размеров ясен из рис. 1: буквами m, I с соответствующими индексами обозначены массы и центральные моменты инерции тел, коэффициенты в выражениях для сил взаимодействия объяснены ниже, большие буквы X, Y, Ψ обозначают компоненты и моменты сил взаимодействия тел системы. Не приводя полный вывод выражений для матриц M, L и проч., остановимся лишь на отдельных моментах, которые могут представлять методический интерес. Элементы матрицы C являются коэффициентами при произведениях обобщенных координат и их вариаций в выражении для виртуальной работы сил в упругих элементах:

$$-\delta A^{(упр)} = \delta q^T C q. \quad (6)$$

Рассмотрим вклад $C^{(6)}$ в матрицу C от упругих элементов, находящихся в буксовых узлах. Компоненты перемещения челюстного проема боковой рамы относительно буксы колесной пары объединим в вектор:

$$r_{mj}^{(6)} = \begin{pmatrix} x_{mj}^{(6)} & y_{mj}^{(6)} & \Psi_{mj}^{(6)} \end{pmatrix}^T.$$

Они являются линейными комбинациями обобщенных координат:

$$x_{mj}^{(6)} = x_j^{(6р)} - \left(x_m^{(кп)} + J_s \Psi_m^{(кп)} \right);$$

$$y_{mj}^{(6)} = \left(y_j^{(6р)} + M I_1 \Psi_j^{(6р)} \right) - y_m^{(кп)};$$

$$\Psi_{mj}^{(6)} = \Psi_j^{(6р)} - \Psi_m^{(кп)}.$$

Значит, можно подобрать такие матрицы $D_{mj}^{(6)}$ с постоянными коэффициентами, что

$$r_{mj}^{(6)} = D_{mj}^{(6)} q.$$

Компоненты силы в упругом элементе пропорциональны вектору $r_{mj}^{(6)}$, $F_{mj}^{(6)} = -C_1^{(6)} r_{mj}^{(6)}$,

$$C_1^{(6)} = \begin{pmatrix} C_x^{(6)} & & \\ & C_y^{(6)} & \\ & & C_z^{(6)} \end{pmatrix}.$$

Виртуальная работа сил $F_{mj}^{(6)}$ равна

$$\delta A^{(упр, 6)} = \sum_{m,j} \delta r_{mj}^{(6)T} F_{mj}^{(6)}. \quad (7)$$

Сопоставив выражения (6) и (7), получим:

$$C = \sum_{m,j} D_{mj}^{(6)T} C_1^{(6)} D_{mj}^{(6)} + (\text{вклады от других упругих элементов}).$$

Чтобы запретить линейные перемещения челюстных проемов боковых рам относительно букс колесных пар, нужно потребовать выполнения условий:

$$x_{mj}^{(6)} = 0, \quad y_{mj}^{(6)} = 0.$$

В матрице L 8 строк, которые мы получим, записав друг под другом первые две строки каждой из матриц. Таким образом, составление системы уравнений, описывающей движение механической системы со связями, практически не требует выполнения дополнительных выкладок – в нашем случае матрицы $D_{mj}^{(6)}$ были выписаны еще на этапе работы с системой без связей.

Взаимодействие колес и рельсов описывает линейная теория Калкера [16, п. 2.2.2] со следующими упрощениями:

- 1) пренебрегают спином;
- 2) коэффициенты c_{11}, c_{22} для продольного и поперечного направлений считают равными 3,90.

Выражение для проскальзывания в продольном направлении дополнительно содержит слагаемые, пропорциональные скоростям $\dot{x}_m^{(кп)}$, $\dot{\phi}_m^{(кп)}$:

$$\varepsilon_{xmj} = \frac{\dot{x}_m^{(кп)} + r \dot{\phi}_m^{(кп)} + J_s \Psi_m^{(кп)}}{V} + \frac{n y_m^{(кп)}}{r} J.$$

Выражение для проскальзывания в поперечном направлении сохранило привычный вид:

$$\varepsilon_{ymj} = \frac{\dot{y}_m^{(кп)}}{V} - \Psi_m^{(кп)}.$$

Результаты

Рассмотрим результаты расчета собственных чисел и собственных векторов, описывающих колебания 3-элементной тележки. Наша цель состоит в том, чтобы понять, как соотносятся собственные числа и собственные векто-

РУХОМИЙ СКЛАД ЗАЛІЗНИЦЬ І ТЯГА ПОЇЗДІВ

ры системы без связей SF и систем со связями SCX, SAJ. Мы ожидаем, что результаты для SF при $C_x^{(6)} \rightarrow \infty$, $C_y^{(6)} \rightarrow \infty$ будут стремиться к результатам для SAJ, а результаты для SF при $C_x^{(6)} \rightarrow \infty$ – к результатам для SCX. Предметом исследования будет подтверждение этого ожи-

дания и детальное описание характера предельного перехода.

Собственные числа матрицы A для систем SF и SAJ приведены в табл. 2. Параметры системы соответствуют загруженному до полной грузоподъемности (при осевой нагрузке 23,5 тс) 4-осному вагону на тележках 18–100. Скорость движения $V = 100$ км/ч.

Таблица 2

Собственные числа для систем SF, SAJ и SCX

j	$p_j, 1/c$	j	$p_j, 1/c$
SF		SAJ	
1, 2	0	1, 2	0
3	-1 800	3	-990
4	-1 640	4	-1140
5, 6	-5 610	5, 6	-6,29±335i
7	-1 790	7	-5 040
8	-1 650	8	-3 900
9, 10	-56,5±585i	9, 10	-2,33±17,3i
11, 12	-38,2±554i	11, 12	1,24±11,9i
13, 14	-11,9±314i	13	-1440
15, 16	-34,1±874i	14, 15	-0,21±91,1i
17, 18	±857i	16, ..., 34	0
19, 20	-3,64±638i	SAJ + SCX	
21, 22	±542i	1, 2	0
23, 24	-3,89±315i	3	-4 000
25, 26	-2,31±17,1i	4	-3 900
27, 28	1,25±11,9i	5	-891
29, 30	-0,21±88,6i	6	-1440
31	-148	7	-1440
32, 33	0	8, 9	-2,33±17,3i
34	-1,14	10, 11	1,24±11,9i
		12, ..., 34	0

Собственные числа были упорядочены QR-алгоритмом, так что сравнивать их можно только по значениям. Даже без анализа собственных векторов понятно, что числа с номерами $j = 9, 11, 14$ системы SAJ являются пределами для собственных чисел $j = 25, 27, 29$

системы SAF. Правдоподобно выглядит предположение, что большие отрицательные числа одной системы переходят в большие отрицательные числа другой системы, у обеих систем по пять таких чисел, но соответствие между ними не очевидно. Не вполне понятно, какое из чисел системы SF переходит в число

РУХОМИЙ СКЛАД ЗАЛІЗНИЦЬ І ТЯГА ПОЇЗДІВ

$-6,29 \pm 335i$ системи SAJ. Числа $j = 9, \dots, 24$ SF, кроме одной пары, соответствуют, видимо, колебаниям боковых рам на упругих элементах большой жесткости в буксовых узлах, поскольку у этих чисел велика мнимая часть.

Изучение собственных векторов подтверждает сделанные выводы и позволяет внести в них некоторые уточнения. Рассмотрим систему SAJ с шарнирами в буксовых узлах. Уравнения связей не нарушают первые 15 собственных векторов:

1, 2 – нефизические решения, появившиеся из-за того, что в уравнениях движения нет переменных $\varphi_m^{(кп)}$, есть лишь их производные;

3, 4, 13 – чрезвычайно быстро затухающие решения, описывающие движение колесных пар против сил псевдоскольжения (например, боковой относ тележки без виляния);

5, 6 – колебания виляния наддрессорной балки;

7, 8 – то же, что и 3, 4 – вращение колесных пар относительно своей оси без продольного смещения;

9, 10 – колебания бокового отбоя кузова (колесные пары также совершают колебания бокового отбоя и виляния, но отношение амплитудных значений ψ и u меньше приблизительно на 20 %, чем предусматривает решение Клингеля);

11, 12 – совместные колебания бокового отбоя и виляния колесных пар (амплитуда коле-

баний кузова, меньше, чем при формах 9 и 10);

14, 15 – колебания тележки под кузовом в продольном направлении (комплекты рессорного подвешивания деформируются в продольном направлении).

Для всех этих векторов можно найти соответствующие собственные векторы системы SF с близкими значениями компонент. Некоторые векторы γ_j приведены в табл. 3. Векторы γ_{13} , γ_{27} для тележки без связей при больших жесткостях упругих элементов в буксовых узлах практически совпадают с векторами γ_5 , γ_{11} для тележки с шарнирами в буксах. Вектор γ_9 (SF) описывает продольные колебания боковых рам относительно колесных пар, что несовместимо со связями, которым подчинена система SAJ, и найти соответствующий вектор среди собственных векторов последней не удастся. Движение тележки неустойчиво, у собственных чисел p_{27} (SF) и p_{11} (SAJ) положительная действительная часть. Колесные пары совершают автоколебания виляния и бокового отбоя (соотношение между амплитудами u и ψ – как у решения Клингеля), боковой отбоя кузова вдвое превышает боковой отбоя колесной пары. На рис. 2 показано, как меняются компоненты соответствующего собственного вектора при изменении жесткости $C^{(\delta)} = C_x^{(\delta)} = C_y^{(\delta)}$.

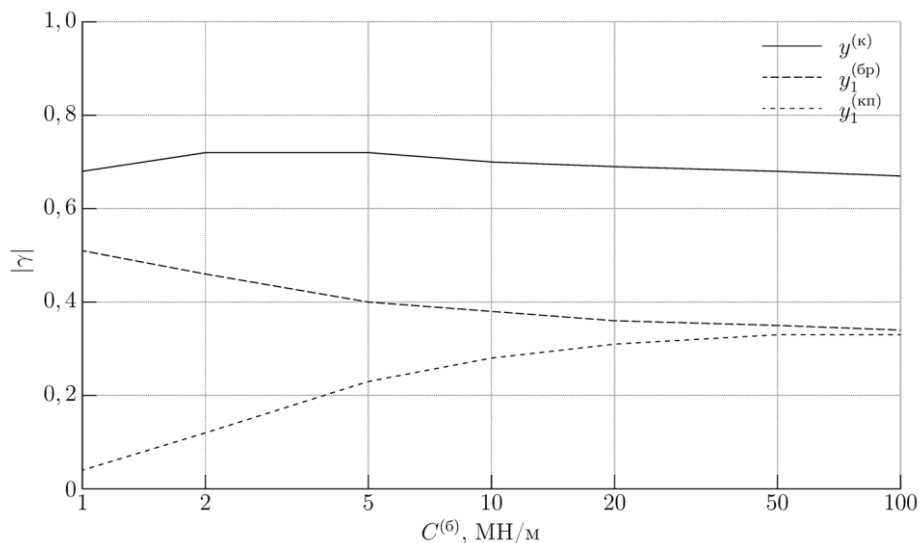


Рис. 2. Форма колебаний, по которой происходит потеря устойчивости

Компоненты собственных векторов γ_j

Компонента	SF						SAJ			
	$j = 9$		$j = 13$		$j = 27$		$j = 5$		$j = 11$	
	$ \gamma $	$\arg \gamma$	$ \gamma $	$\arg \gamma$	$ \gamma $	$\arg \gamma$	$ \gamma $	$\arg \gamma$	$ \gamma $	$\arg \gamma$
$x^{(к)}$										
$y^{(к)}$					0,67	-1,47			0,67	-1,47
$\psi^{(нб)}$	0,30	1,19	0,98	-1,61	0,13	0,42	1,00	-1,59	0,13	0,40
$x_1^{(бр)}$	0,65	-1,67	0,13	-2,15	0,13	0,42	0,04	2,82	0,14	0,40
$y_1^{(бр)}$	0,06	-2,82			0,34	-1,26			0,34	-1,26
$\psi_1^{(бр)}$										
$x_2^{(бр)}$	0,65	1,47	0,13	0,99	0,13	-2,73	0,04	-0,33	0,14	-2,74
$y_2^{(бр)}$	0,06	-2,82			0,34	-1,26			0,34	-1,26
$\psi_2^{(бр)}$										
$x_1^{(кп)}$										
$y_1^{(кп)}$	0,02	1,29			0,33	-1,25			0,34	-1,26
$\varphi_1^{(кп)}$										
$\psi_1^{(кп)}$	0,16	2,88	0,06	2,80	0,13	0,42	0,04	2,82	0,13	0,40
$x_2^{(кп)}$										
$y_2^{(кп)}$	0,02	1,29			0,33	-1,25			0,34	-1,26
$\varphi_2^{(кп)}$										
$\psi_2^{(кп)}$	0,16	2,88	0,06	2,80	0,13	0,42	0,04	2,82	0,13	0,40

Если к шарнирам в буксах добавит жесткую продольную связь в рессорном подвешивании (табл. 2, колонка SAJ + SCX), то исчезнут формы колебаний 5, 6, 14, 15 системы SAJ, которые сопровождаются деформациями рессорных комплектов в продольном направлении, и появится еще 4 собственных вектора, соответствующих нулевым собственным числам и нарушающих уравнения связей. Прочие собственные числа изменятся незначительно.

Научная новизна и практическая значимость

Научная новизна состоит в адаптации метода исследования устойчивости движения Ляпунова по линейному приближению к случаю, когда уравнения движения железнодорожных экипажей

записаны в форме дифференциально-алгебраических уравнений Лагранжа 1 рода. Такая форма записи позволяет упростить исследование устойчивости за счет отказа от выделения множества независимых обобщенных координат с последующим исключением зависимых и допускает вычисление матрицы коэффициентов легко алгоритмируемым способом. Информация об устойчивости экипажей крайне важна, поскольку конструкция ходовых частей должна в обязательном порядке исключать потерю устойчивости в эксплуатационном диапазоне скоростей.

Выводы

1. Предложен эффективный способ исследования устойчивости движения железнодорожных экипажей, описанный уравнениями Ла-

РУХОМИЙ СКЛАД ЗАЛІЗНИЦЬ І ТЯГА ПОЇЗДІВ

гранжа I рода. Критерии устойчивости – действительные числа показателей экспоненциальных функций, удовлетворяющих уравнениям движения, – не должны быть больше нуля. Сами показатели могут быть найдены как собственные числа некоторой матрицы A , зависящей от матриц физических параметров M, B, F, C, K и матрицы коэффициентов связей L , с помощью QR–алгоритма [2, гл. 4].

2. Собственные векторы этой матрицы, соответствующие ненулевым собственным числам, удовлетворяют уравнениям связей. Преимущество предложенного способа состоит в легкой алгоритмизируемости вывода уравнений движения (не нужно выбирать независимые обобщенные координаты).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Деммель, Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения / Дж. Деммель ; пер. с англ. Х. Д. Икрамова. – Москва : Мир, 2001. – 435 с.
2. Лазарян, В. А. Устойчивость движения рельсовых экипажей / В. А. Лазарян, Л. А. Длугач, М. Л. Коротенко. – Киев : Наук. думка, 1972. – 198 с.
3. Орлова, А. М. Влияние конструктивных схем и параметров тележек на устойчивость, ходовые качества и нагруженность грузовых вагонов : автореф. дис. ... д-ра техн. наук : 05.22.07 / Орлова Анна Михайловна ; Петербург. гос. ун-т путей сообщения. – Санкт-Петербург, 2008. – 32 с.
4. Bigoni, D. Sensitivity analysis of the critical speed in railway vehicle dynamics / D. Bigoni, H. True, A. P. Engsig-Karup // *Vehicle System Dynamics*. – 2014. – Vol. 54. – Iss. suppl. – P. 272–286. doi: 10.1080/00423114.2014.898776
5. Critical speed of a Korean high-speed train through optimization with measured wheel profiles / C.-S. Jeon, H.-S. Cho, C.-S. Park, S.-W. Kim, T.-W. Park // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*. – 2018. – Vol. 232. – Iss. 1. – P. 171–181. doi: 10.1177/0954409716662091
6. Gasch, R. Non-linear bogie hunting / R. Gasch, W. Kik, D. Moelle // *Vehicle System Dynamics*. – 1981. – Vol. 10. – Iss. 2-3. – P. 145–148. doi: 10.1080/00423118108968657
7. Influence of vehicle parameters on critical hunting speed based on Ruzicka model / D. Cui, Li Li, X. Jin, X. Xiao, J. Ding // *Chinese Journal of Mechanical Engineering*. – 2012. – Vol. 25. – Iss. 3. – P. 536–542. doi: 10.3901/cjme.2012.03.536
8. Kalker, J. J. Three-dimensional elastic bodies in rolling contact / J. J. Kalker. – Dordrecht : Springer, 1990. – 314 p. doi: 10.1007/978-94-015-7889-9
9. Mao, X. A design method for rail profiles based on the geometric characteristics of wheel-rail contact / X. Mao, G. Chen // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*. – 2018. – Vol. 232. – Iss. 5. – P. 1255–1265. doi: 10.1177/0954409717720346
10. Mazzola, L. Evaluation of the hunting behavior of a railway vehicle in a curve / L. Mazzola, S. Alfi, S. Bruni // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*. – 2014. – Vol. 229. – Iss. 5. – P. 530–541. doi: 10.1177/0954409713517379
11. Moelle, D. Computation of Limit Cycles of a Wheelset Using a Galerkin Method / D. Moelle, H. Steinborn, R. Gasch // *Vehicle System Dynamics*. – 1979. – Vol. 8. – Iss. 2-3. – P. 168–171. doi: 10.1080/00423117908968592
12. Molatefi, H. Critical speed and limit cycles in the empty Y25-freight wagon / H. Molatefi, M. Hecht, M. H. Kadivar // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*. – 2006. – Vol. 220. – Iss. 4. – P. 347–359. doi: 10.1243/09544097jrrt67
13. Polach, O. Bogie design for better dynamic performance: example of a locomotive bogie / O. Polach // *European Railway Review*. – 2003. – No. 1. – P. 69–77.
14. Polach, O. Comparison of Methods Analyzing Bifurcation and Hunting of Complex Rail Vehicle Models / O. Polach, I. Kaiser // *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. – 2012. – Vol. 7. – Iss. 4. doi: 10.1115/1.4006825
15. Polach, O. Compatibility of the non-linear and linearized stability assessment during railway vehicle design / O. Polach // *Vehicle System Dynamics*. – 2006. – Vol. 44. – Iss. suppl. – P. 129–138. doi: 10.1080/00423110600869537

РУХОМИЙ СКЛАД ЗАЛІЗНИЦЬ І ТЯГА ПОЇЗДІВ

16. True, H. The Dynamics of a Railway Freight Wagon Wheelset with Dry Friction Damping / H. True, R. Asmund // Vehicle System Dynamics. – 2002. – Vol. 38. – Iss. 2. – P. 149–163. doi: 10.1076/vesd.38.2.149.5617
17. Xia, F. On the dynamics of the three-piece-freight truck / F. Xia, H. True // Proceedings of the 2003 IEEE/ASME Joint Rail Conference. – 2003. – P. 149–159. doi: 10.1109/trcon.2003.1204661

О. Г. РЕЙДЕМЕЙСТЕР^{1*}, С. І. ЛЕВИЦЬКА^{2*}

^{1*}Каф. «Вагони та вагонне господарство», Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна, вул. Лазаряна, 2, Дніпро, Україна, 49010, тел. +38 (056) 373 15 19, ел. пошта reidemeister.a@gmail.com, ORCID 0000-0001-7490-7180

^{2*}Каф. «Іноземні мови», Придніпровська державна академія будівництва та архітектури, вул. Чернишевського, 24А, Дніпро, Україна, 49000, тел. +38 (056) 756 33 56, ел. пошта svetik23com@ukr.net, ORCID 0000-0001-6725-0280

СТІЙКІСТЬ РУХУ ЗАЛІЗНИЧНИХ ЕКІПАЖІВ, ЩО ОПИСУЮТЬ РІВНЯННЯ ЛАГРАНЖА І РОДУ

Мета. У статті необхідно оцінити стійкість руху залізничних екіпажів, коливання яких описані рівняннями Лагранжа I роду, в припущенні, що відсутні нелінійності з розривами правих частин. **Методика.** За основу прийнято метод дослідження стійкості руху Ляпунова за лінійним наближенням. Рівняння руху складено в матричній формі. Сили кріпа обчислені у відповідності з лінійною теорією Калкера. Послідовними диференціюваннями рівнянь зв'язків індекс системи рівнянь знижений з 2 до 0. Власні числа матриці коефіцієнтів отриманої таким чином системи знайдені за допомогою QR-алгоритму. Відповідно до критерію Ляпунова про стійкість за лінійним наближенням рух стійкий, якщо у всіх власних чисел дійсна частина негативна. Нетривіальним є наявність «зайвих» ступенів свободи, яких немає у механічній системі (в її рівняннях руху залишили тільки незалежні координати). Цим ступеням свободи відповідають власні числа і власні вектори, що не мають відношення до стійкості. Щоб знайти правило, що дозволяє їх виключити, ми розглянули кілька моделей візків, із жорсткими і пружними зв'язками великої жорсткості у вузлах. У граничному випадку великих жорсткостей результати для системи без жорстких зв'язків повинні співпасти з результатами для системи з жорсткими зв'язками. **Результати.** Проведено аналіз і зіставлені частоти (з декрементом) і форми коливань 3-елементного візка зі зв'язками і без них. При аналізі стійкості системи зі зв'язками становлять інтерес тільки ті власні числа, власні вектори яких не порушують зв'язків. Значення цих чисел є межами для власних чисел системи, в якій жорсткі зв'язки замінені пружними елементами великої жорсткості, що дозволяє залишити критерій Ляпунова незмінним. **Наукова новизна** полягає в адаптації методу дослідження стійкості руху Ляпунова за лінійним наближенням до випадку, коли рівняння руху залізничних екіпажів записані в формі диференційно-алгебраїчних рівнянь Лагранжа I роду. **Практична значимість.** Зазначена форма запису рівняння руху дозволяє спростити дослідження стійкості за рахунок відмови від виділення безлічі незалежних узагальнених координат із наступним виключенням залежних і допускає обчислення матриці коефіцієнтів легко алгоритмізованим способом. Інформація про стійкість екіпажів украй важлива, оскільки конструкція ходових частин повинна в обов'язковому порядку виключати втрату стійкості в експлуатаційному діапазоні швидкостей.

Ключові слова: залізничний екіпаж; стійкість руху; диференційно-алгебраїчні рівняння

A. G. REIDEMEISTER^{1*}, S. I. LEVYTSKA^{2*}

^{1*}Dep. «Cars and Car Facilities», Dnipropetrovsk National University of Railway Transport named after Academician V. Lazaryan, Lazaryan St., 2, Dnipro, Ukraine, 49010, tel. +38 (056) 373 15 19, e-mail reidemeister.a@gmail.com, ORCID 0000-0001-7490-7180

^{2*}Dep. «Foreign Languages», Prydniprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture, Chernyshevsky St., 24 A, Dnipro, Ukraine, 49000, tel. +38 (056) 756 33 56, e-mail svetik23com@ukr.net, ORCID 0000-0001-6725-0280

STABILITY OF MOTION OF RAILWAY VEHICLES DESCRIBED WITH LAGRANGE EQUATIONS OF THE FIRST KIND

РУХОМИЙ СКЛАД ЗАЛІЗНИЦЬ І ТЯГА ПОЇЗДІВ

Purpose. The article aims to estimate the stability of the railway vehicle motion, whose oscillations are described by Lagrange equations of the first kind under the assumption that there are no nonlinearities with discontinuities of the right-hand sides. **Methodology.** The study is based on the Lyapunov's stability method of linear approximation. The equations of motion are compiled in a matrix form. The creep forces are calculated in accordance with the Kalker linear theory. Sequential differentiations of the constraint equations reduced the equation system index from 2 to 0. The coefficient matrix eigenvalues of the system obtained in such a way are found by means of the QR-algorithm. In accordance with Lyapunov's criterion of stability in the linear approximation, the motion is stable if the real part of all eigenvalues is negative. The presence of «superfluous» degrees of freedom, which the mechanical system does not have (in whose motion equations there are left only independent coordinates) is not trivial. Herewith the eigenvalues and eigenvectors correspond to these degrees of freedom and have no relation to the stability. In order to find a rule that allows excluding them, we considered several models of a bogie, with rigid and elastic constraints of high rigidity at the nodes. In the limiting case of high rigidities, the results for a system without rigid constraints must coincide with the results for a system with rigid constraints. **Findings.** We carried out the analysis and compared the frequencies (with decrements) and the vibration modes of a three-piece bogie with and without constraints. When analysing the stability of the system with constraints, only those eigenvalues are of interest whose eigenvectors do not break the constraints. The values of these numbers are limits for the eigenvalues of the system, in which rigid constraints are replaced by elastic elements of high rigidity, which allows us to leave the Lyapunov's criterion unchanged. **Originality** consists in the adaptation of Lyapunov's stability method of linear approximation to the case when the equations of railway vehicle motion are written in the form of differential-algebraic Lagrange equations of the first kind. **Practical value.** This written form of the equation of motion makes it possible to simplify the stability study by avoiding the selection of a set of independent generalized coordinates with the subsequent elimination of dependent ones and allows for the coefficient matrix calculation in an easily algorithmized way. Information on the vehicle stability is vitally important, since the truck design must necessarily exclude the loss of stability in the operational speed range.

Keywords: railway vehicle; motion stability; differential-algebraic equations

REFERENCES

1. Demmel, D. (2001). *Vychislitel'naya lineynaya algebra. Teoriya i prilozheniya*. Moscow: Mir. (in Russian)
2. Lazaryan, V. A., Dlugach, L. A., & Korotenko, M. L. (1972). *Ustoychivost dvizheniya relsovykh ekipazhey*. Kyiv: Naukova dumka. (in Russian)
3. Orlova, A. M. (2008). *Vliyanie konstruktivnykh skhem i parametrov telezhek na ustoychivost, khodovye kachestva i nagruzhennost gruzovykh vagonov*. (Avtoreferat dissertatsii doktora tekhnicheskikh nauk). Emperor Alexander I St. Petersburg State Transport University, Saint Petersburg. (in Russian)
4. Bigoni, D., True, H., & Engsig-Karup, A. P. (2014). Sensitivity analysis of the critical speed in railway vehicle dynamics. *Vehicle System Dynamics*, 52(sup1), 272-286. doi: 10.1080/00423114.2014.898776 (in English)
5. Jeon, C.-S., Cho, H.-S., Park, C.-S., Kim, S.-W., & Park, T.-W. (2018). Critical speed of a Korean high-speed train through optimization with measured wheel profiles. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, 232(1), 171-181. doi: 10.1177/0954409716662091 (in English)
6. Gasch, R., Kik, W., & Moelle, D. (1981). Non-Linear Bogie Hunting. *Vehicle System Dynamics*, 10(2-3), 145-148. doi: 10.1080/00423118108968657 (in English)
7. Cui, D., Li, L., Jin, X., Xiao, X., & Ding, J. (2012). Influence of vehicle parameters on critical hunting speed based on Ruzicka model. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 25(3), 536-542. doi: 10.3901/cjme.2012.03.536 (in English)
8. Kalker, J. J. (1990). *Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact*. Dordrecht: Springer. doi: 10.1007/978-94-015-7889-9 (in English)
9. Mao, X., & Chen, G. (2018). A design method for rail profiles based on the geometric characteristics of wheel-rail contact. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, 232(5), 1255-1265. doi: 10.1177/0954409717720346 (in English)
10. Mazzola, L., Alfi, S., & Bruni, S. (2014). Evaluation of the hunting behavior of a railway vehicle in a curve. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, 229(5), 530-541. doi: 10.1177/0954409713517379 (in English)
11. Moelle, D., Steinborn, H., & Gasch, R. (1979). Computation of Limit Cycles of a Wheelset Using a Galerkin Method. *Vehicle System Dynamics*, 8(2-3), 168-171. doi: 10.1080/00423117908968592 (in English)

РУХОМИЙ СКЛАД ЗАЛІЗНИЦЬ І ТЯГА ПОЇЗДІВ

12. Molatefi, H., Hecht, M., & Kadivar, M. H. (2006). Critical speed and limit cycles in the empty Y25-freight wagon. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, 220(4), 347-359. doi: 10.1243/09544097jrtr67 (in English)
13. Polach, O. (2003). Bogie design for better dynamic performance: example of a locomotive bogie. *European Railway Review*, 1, 69-77. (in English)
14. Polach, O., & Kaiser, I. (2012). Comparison of Methods Analyzing Bifurcation and Hunting of Complex Rail Vehicle Models. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 7(4), 041005. doi: 10.1115/1.4006825 (in English)
15. Polach, O. (2006). Comparability of the non-linear and linearized stability assessment during railway vehicle design. *Vehicle System Dynamics*, 44(sup1), 129-138. doi: 10.1080/00423110600869537 (in English)
16. True, H., & Asmund, R. (2003). The Dynamics of a Railway Freight Wagon Wheelset With Dry Friction Damping. *Vehicle System Dynamics*, 38(2), 149-163. doi: 10.1076/vesd.38.2.149.5617 (in English)
17. Fujie Xia, & True, H. (n.d.). (2003). On the dynamics of the three-piece-freight truck. *Proceedings of the 2003 IEEE/ASME Joint Railroad Conference*. doi: 10.1109/rrcon.2003.1204661 (in English)

Поступила в редколлегию: 25.06.2018

Принята к печати: 03.10.2018