

А. С. РАСПОПОВ, к.т.н., доцент, ДИИТ (Украина);
 С. П. РУСУ, асс., ДИИТ (Украина);
 В. Е. АРТЕМОВ, асс., ДИИТ (Украина)

ПРИМЕНЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В ЗАДАЧЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СИСТЕМЫ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Диференціальні рівняння руху елементарної балки із врахуванням рухомих, пружних та дисипативних сил надані за типами коливань та об'єднують поздовжні, крутильні, згинальні коливання, а також коливання зсуву. Основна топологічна структура зображена у формі зваженого та двоїстого графів для знаходження силових та кінематичних параметрів. Відображаюча алгебраїчна система записується в вигляді тензорних співвідношень.

Дифференциальные уравнения движения элементарной балки с учетом подвижных, упругих и дисипативных сил представлены по типам колебаний и объединяют продольные, крутильные, изгибные колебания, а также колебания сдвига. Основная топологическая структура изображена в форме взвешенного и двойственного графов для нахождения силовых и кинематических параметров. Отображающая алгебраическая система записывается в виде тензорных соотношений.

The differential equations of beam motion considering of moving, elastic and dissipative forces are presented on types of oscillations and integrate longitudinal, torsional, bending as well as shearing vibrations. The basic topological structure is figured in the form of the weighed and dual graphs for determination of force and kinematic parameters. The representing algebraic system is noted as tensor relations.

Отмеченные в [1] трудности, связанные с получением точного решения некоторых сложных, в том числе и нелинейных задач динамики дискретно-континуальных стержневых систем, могут быть преодолены с помощью приближенных методов, основанных на замене действительной распределенной системы расчетной схемой с конечным числом степеней свободы. В частности, для динамического расчета мостовых конструкций при действии подвижной нагрузки, также моделируемой системой дискретных элементов,

такой подход представляется наиболее эффективным.

В данной работе рассматриваются некоторые предпосылки, позволяющие рассчитывать стержневые и балочные конструкции с объемными (дисковыми) массами. В этом случае элементарная балка состоит из двух твердых тел, центры тяжести которых соединены безынерционными упругими связями – стержнями, обладающими жесткостными характеристиками исходной конструкции балки.

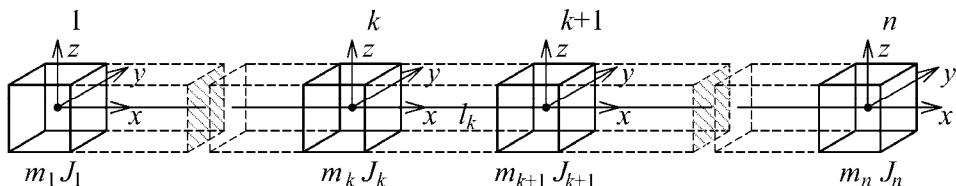


Рис. 1. Дискретная модель балки

Каждое твердое тело имеет шесть степеней свободы и может совершать, в общем случае, поступательные и вращательные движения. В целом, неразрезная конструкция представляется в виде системы твердых тел, последовательно связанных между собой упругими стержнями (рис. 1).

Колебания элементарной балки с шестью степенями свободы на каждом конце описываются с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений, которые можно разложить по

отдельным видам колебаний для каждого k -го тела [2]. Например, при $k=1$ уравнения собственных продольных и крутильных колебаний имеют вид

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{u}_{x_1} &= \frac{EF_1}{l_1} (u_{x_2} - u_{x_1} - l_1); \\ J_{xx}^{(1)} \ddot{\varphi}_{x_1} &= \frac{GJ_{x_1}}{l_1} (\varphi_{x_2} - \varphi_{x_1}). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Соответственно, для колебаний сдвига в горизонтальной и вертикальной плоскостях можно записать

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{zz}^{(1)} \ddot{\varphi}_{z_1} = \frac{6EJ_{z1}}{l_1^2} (u_{y_2} - u_{y_1}); \\ m_1 \ddot{u}_{y_1} = \frac{12EJ_{z1}}{l_1^3} (u_{y_2} - u_{y_1}), \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{yy}^{(1)} \ddot{\varphi}_{y_1} = -\frac{6EJ_{y1}}{l_1^2} (u_{z_2} - u_{z_1}); \\ m_1 \ddot{u}_{z_1} = \frac{12EJ_{y1}}{l_1^3} (u_{z_2} - u_{z_1}). \end{array} \right.$$

В свою очередь, уравнения изгибных колебаний в направлении осей y , z приводятся к виду

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{zz}^{(1)} \ddot{\varphi}_{z_1} = \frac{4EJ_{z1}}{l_1} (\varphi_{z_2} - \varphi_{z_1}); \\ m_1 \ddot{u}_{y_1} = -\frac{6EJ_{z1}}{l_1^2} (\varphi_{z_2} - \varphi_{z_1}), \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{yy}^{(1)} \ddot{\varphi}_{y_1} = \frac{4EJ_{y1}}{l_1} (\varphi_{y_2} - \varphi_{y_1}); \\ m_1 \ddot{u}_{z_1} = \frac{6EJ_{y1}}{l_1^2} (\varphi_{y_2} - \varphi_{y_1}), \end{array} \right.$$

a)

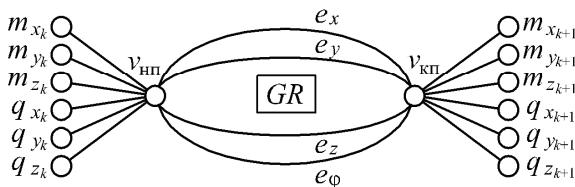


Рис. 2. Графы GR и GR^*

Понятия «импеданса» и «адмитанса» в большей степени относятся к электротехнике и комбинаторной топологии, однако все чаще встречаются в научной литературе, посвященной проблемам механических колебаний [3, 4]. Элементы матриц Y , Z приведены в работах [2, 3, 5] и могут быть также получены при решении задач деформирования стержня от единичных линейных и угловых перемещений или единичных сил и моментов. Для пространственных колебаний k -го стержня, расположенного между k -м и $(k+1)$ -м телом, матрица адмитансов и соответствующая обратная матрица импедансов имеют вид [3].

где J_{xx} , J_{yy} , J_{zz} – центральные моменты инерции твердого тела.

Элементарную балку, совершающую пространственные колебания, можно представить графом GR , подобным графу континуальной балки [6] и отображающей алгебраической системой дифференциальных уравнений для каждого тела в матричном виде

$$\frac{d^2}{dt^2} Q = \bigcup_{i=1}^6 Y_i S, \quad (4)$$

или в сокращенной форме

$$F = Y S, \quad (5)$$

где \bigcup – операция объединения векторов Y_i в матрицу жесткости (адмитансов) Y по соответствующим столбцам

$$Y_i = \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z & u_x & u_y & u_z \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 & Y_5 & Y_6 \end{vmatrix} ;$$

$$Q = \{J_{xx} \varphi_x \ J_{yy} \varphi_y \ J_{zz} \varphi_z \ | \ mu_x \ mu_y \ mu_z\};$$

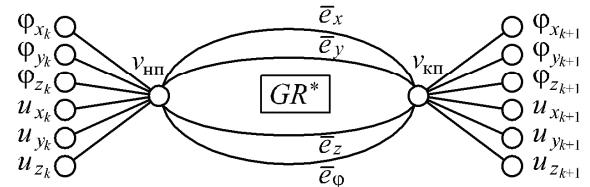
$F = \{m_x \ m_y \ m_z \ | \ q_x \ q_y \ q_z\}$ – вектор силовых параметров; $S = \{\varphi_x \ \varphi_y \ \varphi_z \ | \ u_x \ u_y \ u_z\}$ – вектор кинематических параметров (индекс k опущен).

Связь между вектором усилий и вектором перемещений также можно выразить через матрицу податливостей (импедансов)

$$Z_i = \begin{vmatrix} m_x & m_y & m_z & q_x & q_y & q_z \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 & Z_5 & Z_6 \end{vmatrix} ;$$

$$F = Z^{-1} S; \quad S = Z F. \quad (6)$$

б)



С учетом выражений (5), (6) граф GR для элементарной балки и двойственный ему граф GR^* могут быть представлены в следующей форме (рис. 2).

Таким образом, вершины графа GR^* соответствуют шести обобщенным координатам (кинематическим параметрам), а вершины графа GR – шести обобщенным силам (силовым параметрам) для каждого конца балки.

Двойственный граф GR^* может быть построен следующим образом: внутрь каждого контура (конечную область [7]) поместим по одной вершине и одну дополнительную вершину во внеш-

ний контур (бесконечную область). Эти вершины будут обозначать кинематические параметры элементарной балки. Соответствующие дуги графа GR^* содержат все силы связи, которые учитываются в сечениях между телами, а также все импедансы рассеченных частей. Число вершин и ребер в графах GR и GR^* будет одинаковым. Очевидно, исходный граф GR также является двойственным для GR^* .

Более сложные стержневые системы могут иметь большее число входов, состояния каждого из которых описывается шестью независимыми переменными. Однако, такие системы также могут быть разделены на элементарные составляющие (стержни, балки), модели которых топологически представляются графами GR и GR^* .

Несложно заметить, что каждый столбец матриц Y и Z соответствует определенному типу колебаний. Поэтому ребрам графов GR и GR^* присвоены значения векторов адмитансов Y_i и импедансов Z_i ($i=1,2,\dots,6$):

$$\left. \begin{aligned} e_\varphi &= Y_1; e_y = Y_3 \cup Y_5; e_z = Y_2 \cup Y_6; e_x = Y_4; \\ \bar{e}_\varphi &= Z_1; \bar{e}_y = Z_3 \cup Z_5; \bar{e}_z = Z_2 \cup Z_6; \bar{e}_x = Z_4. \end{aligned} \right\} (7)$$

$$\left. \begin{aligned} J_{xx}^{(k)} \ddot{\varphi}_{x_k} &= -\frac{GJ_{xk}}{l_k} (\varphi_{x_k} - \varphi_{x_{k-1}}) + \frac{GJ_{xk+1}}{l_{k+1}} (\varphi_{x_{k+1}} - \varphi_{x_k}) \\ J_{yy}^{(k)} \ddot{\varphi}_{y_k} &= -\frac{4EJ_{yk}}{l_k} (\varphi_{y_k} - \varphi_{y_{k-1}}) + \frac{4EJ_{yk+1}}{l_{k+1}} (\varphi_{y_{k+1}} - \varphi_{y_k}) - \frac{6EJ_{yk}}{l_k^2} (u_{z_k} - u_{z_{k-1}}) + \frac{6EJ_{yk+1}}{l_{k+1}^2} (u_{z_{k+1}} - u_{z_k}) \\ J_{zz}^{(k)} \ddot{\varphi}_{z_k} &= -\frac{6EJ_{zk}}{l_k^2} (u_{y_k} - u_{y_{k-1}}) + \frac{6EJ_{zk+1}}{l_{k+1}^2} (u_{y_{k+1}} - u_{y_k}) - \frac{4EJ_{zk}}{l_k} (\varphi_{z_k} - \varphi_{z_{k-1}}) + \frac{4EJ_{zk+1}}{l_{k+1}} (\varphi_{z_{k+1}} - \varphi_{z_k}) \\ m_k \ddot{u}_{x_k} &= -\frac{EF_k}{l_k} (u_{x_k} - u_{x_{k-1}} - l_k) + \frac{EF_{k+1}}{l_{k+1}} (u_{x_{k+1}} - u_{x_k} - l_{k+1}) \\ m_k \ddot{u}_{y_k} &= -\frac{12EJ_{zk}}{l_k^3} (u_{y_k} - u_{y_{k-1}}) + \frac{12EJ_{zk+1}}{l_{k+1}^3} (u_{y_{k+1}} - u_{y_k}) + \frac{6EJ_{zk}}{l_k^2} (\varphi_{z_k} - \varphi_{z_{k-1}}) - \frac{6EJ_{zk+1}}{l_{k+1}^2} (\varphi_{z_{k+1}} - \varphi_{z_k}) \\ m_k \ddot{u}_{z_k} &= -\frac{12EJ_{yk}}{l_k^3} (u_{z_k} - u_{z_{k-1}}) + \frac{12EJ_{yk+1}}{l_{k+1}^3} (u_{z_{k+1}} - u_{z_k}) - \frac{6EJ_{yk}}{l_k^2} (\varphi_{y_k} - \varphi_{y_{k-1}}) + \frac{6EJ_{yk+1}}{l_{k+1}^2} (\varphi_{y_{k+1}} - \varphi_{y_k}) \end{aligned} \right\} (9)$$

Так как, состояния любого параметра НП, КП стержня в графах GR , GR^* (см. рис. 2) принимают значения 0 или 1 [6], то несложно определить переменные, соответствующие направлениям, вдоль которых силы не действуют и исключить их из системы (9). Таким образом, можно учесть условия закрепления концевых или промежуточных сечений балки.

Пример графа для пространственных колебаний балки, состоящей из трех дискретных масс и двух связывающих стержней, представлен на рис. 3.

Ребра e_y , e_z и \bar{e}_y , \bar{e}_z объединяют векторы изгиба и сдвига. В результате получаем взвешенные графы GR и GR^* [7] с весами на дугах Y_i и Z_i , и матрицы смежности Y , Z с элементами, имеющими вес y_{ij} и z_{ij} ($i,j=1,2,\dots,6$), которые отражают отдельные виды колебаний для каждого тела.

Очевидно, что основными компонентами графа GR будут подграфы G_x , G_φ , G_y , G_z , кольцевая сумма которых в различных сочетаниях позволяет получить графы GL и GT для совместных изгибно-продольных и изгибно-крутильных колебаний, а также граф GR для пространственных колебаний балки [6].

Для промежуточных тел, находящихся внутри стержневой системы, матрицы Y , Z для соседних стержней определяются по формулам:

$$Y_k = -(Y_{k-1} + Y_{k+1}); Z_k^{-1} = -(Z_{k-1}^{-1} + Z_{k+1}^{-1}). \quad (8)$$

В координатной форме с учетом (8) получим систему дифференциальных уравнений, которая объединяет продольные, крутильные, изгибные колебания и колебания сдвига k -го тела

Запишем соотношения между обобщенными силами и обобщенными координатами на двух концах балки следующим образом

$$F_{k+1} = g_k F_k = g_k Y_k S_k; \quad (10)$$

$$S_{k+1} = \delta_k S_k = \delta_k Z_k F_k, \quad (11)$$

где, согласно [3], переходные матрицы g_k , δ_k называются тензорами передачи и могут рассматриваться как матрицы преобразования C_g , C_δ .

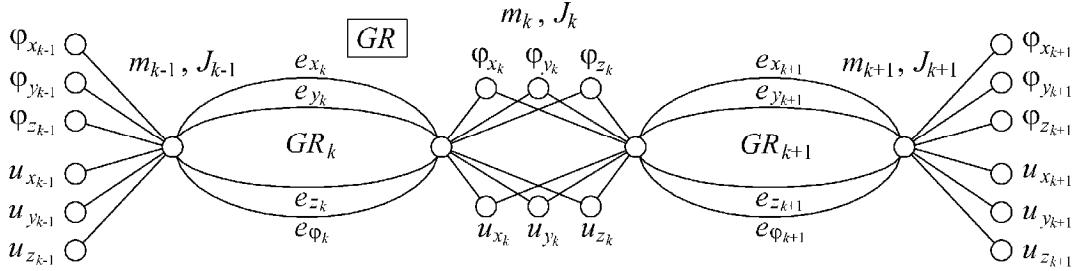


Рис. 3. Граф для описания пространственных колебаний балки

$k+1 \setminus k$	m_x	m_y	m_z	q_x	q_y	q_z	$k+1 \setminus k$	φ_x	φ_y	φ_z	u_x	u_y	u_z
m_x	1	0	0	0	0	0	φ_x	1	0	0	0	0	0
m_y	0	1	0	0	0	0	φ_y	0	1	0	0	0	$-l_k$
$g_k = m_z$	0	0	1	0	0	0	φ_z	0	0	1	0	l_k	0
q_x	0	0	0	1	0	0	u_x	0	0	0	1	0	0
q_y	0	0	l_k	0	1	0	u_y	0	0	0	0	1	0
q_z	0	$-l_k$	0	0	0	1	u_z	0	0	0	0	0	1

Несложно заметить, что матрица g_k представляет собой транспонированную форму матрицы δ_k , т. е. $g_k = \delta_k^t$. Произведения матриц $g_k Y_k$ и $\delta_k Z_k$ образуют матрицу взаимных адmittансов \tilde{Y}_k и матрицу взаимных импедансов \tilde{Z}_k [3]. Уравнения связи между переменными F при переходе от одного конца балки к другому и переменными S можно записать в следующей форме

$$F_{k+1} - g_k F_k = 0; S_{k+1} - \delta_k S_k = 0, \quad (12)$$

или

$$F_{k+1} - \tilde{Y}_k S_k = 0; S_{k+1} - \tilde{Z}_k F_k = 0. \quad (13)$$

Матрицу адmittансов всей конструкции можем получить формальным путем, объединив все адmittансы элементарных балок в одну квадратную квазидиагональную матрицу

$$Y = \begin{vmatrix} Y_1 & [0] & \dots & [0] \\ [0] & Y_2 & \dots & [0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [0] & [0] & \dots & Y_n \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Следует иметь в виду, что отдельные элементы дискретной системы, примыкающие к одним и тем же узлам необходимо соединить в одну систему либо с учетом соотношений (8), либо с помощью матрицы преобразования C_g^t [3]

$$Y' = C_g^t Y C_g^t. \quad (15)$$

Каждый элемент матрицы C_g является единичной или нулевой матрицей шестого порядка, которые образуются в зависимости от того, стыкуется ли с данным узлом соответствующий стержень: если да – E , если нет – $[0]$. Строки матрицы C_g соответствуют перемещениям концов (тел) отдельно взятых элементарных балок, а столбцы – обобщенным координатам основной системы.

Аналогичным образом получаем матрицу импедансов соединенной системы в квазидиагональной форме

$$Z = \begin{vmatrix} Z_1 & [0] & \dots & [0] \\ [0] & Z_2 & \dots & [0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [0] & [0] & \dots & Z_n \end{vmatrix}, \quad (16)$$

для которой также с использованием матрицы преобразования C_δ^t можно записать

$$Z' = C_\delta^t Z C_\delta^t. \quad (17)$$

Результирующая матрица для параметров системы приводится к виду

$$\begin{vmatrix} F' \\ S' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y' & [0] \\ [0] & Z' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} S' \\ F' \end{vmatrix}. \quad (18)$$

В случае, если матрицы (15), (17), полученные суммированием жесткостей или податливостей отдельных стержней свободной конструкции, являются особенными (вырожденными), то необходимо с учетом условий закрепления элементов для пространственной задачи исключить

не менее шести переменных и соответствующие этим переменным строки (столбцы) матриц Y , Z . Другими словами, при наложении закреплений для k -го участка балки из системы (9) следует исключить часть соответствующих заданным (лишним) степеням свободы уравнений.

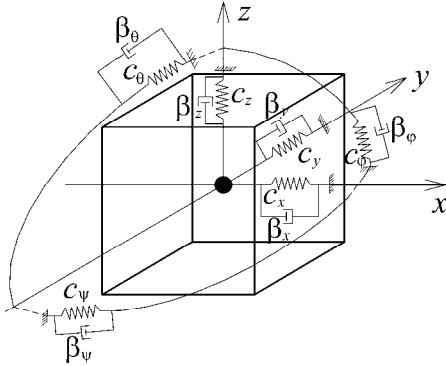


Рис. 4. Участок балки с упругими закреплениями

Для участка балки с упруго-вязкой опорой, упругой относительно поперечных и угловых перемещений (рис. 4) в адмитансы Y_i соответствующего ребрам графа GR добавляются элементы Y_i^c , учитывающие жесткость опоры в соответствующем направлении

$$Y_i^c = \{c_\theta, c_\varphi, c_\psi, c_x, c_y, c_z\}, \quad (19)$$

где $c_\theta, c_\varphi, c_\psi$ – угловые, c_x, c_y, c_z – линейные жесткости опоры.

В уравнения собственных пространственных колебаний для такого участка (4) входят слагаемые, учитывающие добавленную жесткость и демпфирование

$$\frac{d^2}{dt^2} Q = \bigcup_{i=1}^6 Y_i S + Y_i^c S_0 + Y_i^\beta \dot{S}, \quad (20)$$

где $S_0 = \{\varphi_{x_k}^0, \varphi_{y_k}^0, \varphi_{z_k}^0 | u_{x_k}^0, u_{y_k}^0, u_{z_k}^0\}$; $\varphi_{x_k}^0, \varphi_{y_k}^0, \varphi_{z_k}^0$ – начальные углы поворота, которым соответствуют положения равновесия для угловых жесткостей, $u_{x_k}^0, u_{y_k}^0, u_{z_k}^0$ – равновесное положение для линейных жесткостей; $Y_i^\beta = \{\beta_\theta, \beta_\varphi, \beta_\psi, \beta_x, \beta_y, \beta_z\}$; $\beta_\theta, \beta_\varphi, \beta_\psi$ – угловые, $\beta_x, \beta_y, \beta_z$ – линейные коэффициенты демпфирования опоры.

Связи, приложенные к участкам балки, также можно представлять в графе конструкции, который отражает ее динамическую схему. Их моделирование осуществляется с помощью до-

бавления к правой части дифференциальных уравнений (20) силовых воздействий – реакций, возникающих в связях.

Пространственные реакции, учитывающие влияние сил тяжести, подвижной, упругой и диссипативной от различных видов силовых воздействий можно описать единой структурой в матричной форме

$$F = \Lambda^F \cdot R \cdot P, \quad (21)$$

где $\Lambda^F = \{U_k | E\}$, R – матрица поворота связанной с участком балки системы координат относительно инерциальной системы; P – сила реакции в связанной системе координат; E –

$$\text{единичная матрица; } U_k = \begin{vmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{vmatrix}.$$

Так, подвижная нагрузка F_v учитывается блочной матрицей

$$F_v = \Lambda_{vk}^F \cdot {}^Y R^Z \cdot P_v, \quad (22)$$

где P_v – подвижная сила, которая вычисляется по алгоритму, приведенному в работе [8].

Для моделирования пути на пролетном строении рельсовые нити задают с помощью сплайна, опорные точки которого жестко закреплены с участками пути. Подвижная нагрузка определяется с учетом положения колесной пары и сплайнового пути в каждый момент времени движения поезда по мосту.

Выводы

Полученные дифференциальные уравнения для различных видов колебаний балки в качестве исходных данных содержат кинематические, массово-инерционные и жесткостные характеристики элементов балки в начальный момент времени. Интегрируя систему матричных дифференциальных уравнений (4) получаем кинематические характеристики каждого тела во времени. В случае упругого закрепления и демпфирования используются уравнения (20). Система дифференциальных уравнений для балочного элемента, представленного в дискретной системе в виде k тел с r закреплениями, содержит $(6k - r)$ уравнений движения. Для моделирования вынужденных колебаний пролетных строений мостов при действии подвижного состава используются уравнения (20) с дополнительными слагаемыми в виде блочных матриц (21), (22). Таким образом, предложенные зависимости позволяют определить динамические реакции, возникающие в процессе движения подвижного состава по деформируемому пролетному строению моста.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Распопов, А. С. Построение дискретных динамических моделей балочных элементов на основе конечных автоматов [Текст] / А. С. Распопов // Будівництво та техногенна безпека. Зб. наук. пр.: Нац. акад. природоохор. та курорт. буд-ва. – 2007. – Вип. 21. – С. 27-34.
2. Бойцов, Г. В. Справочник по строительной механике корабля. – Т. 2. Пластины. Теория упругости, пластичности и ползучести. Численные методы [Текст] / Г. В. Бойцов, О. М. Палий, В. С. Чувиковский. – Л.: Судостроение, 1982. – 366 с.
3. Крон Г. Исследование сложных систем по частям (диакоптика) [Текст] / Г. Крон. – М.: Наука, 1972. – 544 с.
4. Пановко, Я. Г. Устойчивость и колебания упругих систем: Современные концепции, ошибки и парадоксы [Текст] / Я. Г. Пановко, И. И. Губanova. – М.: Наука, 1979. – 384 с.
5. Чирас, А. А. Строительная механика: Теория и алгоритмы [Текст] / А. А. Чирас. – М.: Стройиздат, 1989. – 255 с.
6. Распопов, А. С. Конечно-графовый подход к решению задач динамики стержневых конструкций [Текст] // Вісник Дніпропетр. нац. ун-ту заліз. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – 2008. – Вип. 21. – С. 170-176.
7. Свами М. Графы, сети и алгоритмы [Текст] / М. Свами, К. Тхуласираман. – М.: Мир, 1984. – 455 с.
8. Распопов, А. С. К вопросу компьютерного моделирования движения поезда по мосту [Текст] / А. С. Распопов, С. П. Русу, В. Е. Артемов // Методи розв'язування прикладн. задач мех. деформівного твер. тіла : Зб. наук. пр. / Дніпр. нац. ун-т. – 2007. – Вип. 8. – С. 133-139.

Поступила в редколлегию 17.07.2009