

А. Н. ПАСЕЧНИК, д.ф.-м.н., профессор, Академия таможенной службы (Украина);
 В. А. ПАСЕЧНИК, к.ф.-м.н., ДНУ (Украина);
 Н. Н. НОВОТНА, магистр, ДНУ (Украина)

МЕТОД РАСЧЕТА СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНЫ СО СМЕШАННЫМИ УСЛОВИЯМИ ЗАКРЕПЛЕНИЯ КОНТУРА

Запропонований асимптотичний метод розрахунку й дослідження власних коливань тонких пружних прямокутних пластин зі змішаними умовами закріплення контуру типу «защемлення-шарнір» для симетричного й асиметричного розміщення ділянок закріплення.

Предложен асимптотический метод расчета и исследования собственных колебаний тонких упругих прямоугольных пластин со смешанными условиями закрепления контура типа «защемление-шарнир» для симметричного и асимметричного размещения участков закрепления.

It is offered an asymptotic method of calculation and study of the eigen vibrations of thin elastic rectangular plates with mixed conditions of fastening the contour of type "pinching-joint" for symmetrical and asymmetrical placement of the fastening areas.

Применение пластин в реальных конструкциях связано с использованием различных способов закрепления определенных участков контура пластины [1]. В связи с этим, задача разработки эффективных методов исследования смешанных краевых задач теории пластин, решению которой посвящены работы [2-9], является весьма актуальной. В настоящее время для решения краевых задач теории пластин и оболочек весьма эффективными являются различные методы теории возмущения [3, 8].

Постановка задачи. Рассмотрим исследование собственных колебаний прямоугольной пластины со смешанными условиями закрепления контура методом возмущения вида граничных условий. Схема размещения участков для симметричного (а) и асимметричного (б) закрепления пластины представлена на рис.1. Соответствующее дифференциальное уравнение в безразмерном виде имеет вид [3]

$$\nabla^4 \bar{w} + \frac{m b^4}{D} \bar{w}_{tt} = 0,$$

$$\nabla^4 \bar{w} = \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right)^2, \quad (1)$$

где D – цилиндрическая жесткость; m – приведенная масса пластины; a, b – размеры пластины; ξ, η – безразмерные координаты; $\xi = x/b, \eta = y/b$.

Краевая задача для уравнения (1) определяется смешанными краевыми условиями [8]

$$\bar{w} = 0, w_{\xi\xi} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = \pm 0,5 k, \quad (2)$$

$$w = 0, w_{\eta\eta} = \bar{H}(\xi)(w_{\eta\eta} \pm w_{\eta}) \quad \text{при} \quad \eta = \pm 0,5, \quad (3)$$

где $\bar{H}(\xi) = H(\xi - k) + H(-\xi - k)$, $H(\xi)$ – функция Хевисайда, $k = a/b$.

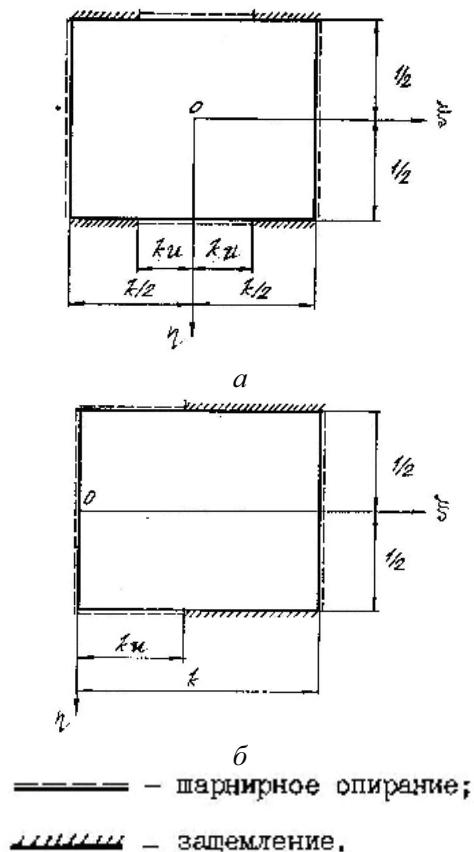


Рис. 1. Схема размещения участков закрепления пластины

Метод построения решения. Для построения решения уравнения (1) используем метод разделения переменных:

$$\bar{w} = w(\xi, \eta) \cdot T(t). \quad (4)$$

После подстановки выражения (4) в уравнение (1) получим два уравнения:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \theta^2 T = 0, \quad (5)$$

$$\nabla^4 w - \lambda w = 0, \quad (6)$$

где θ^2 – круговая частота собственных поперечных колебаний пластины; $\lambda = \frac{m\theta^2 b^4}{D}$ –

собственное число задачи.

В соответствии с [8] введем в граничные условия (3) параметр ε , чтобы при $\varepsilon=0$ были реализованы граничные условия шарнирного опирания по всему краю $\eta = \pm 0,5$, а при $\varepsilon=1$ – исходные смешанные граничные условия типа «защемление-шарнир»:

$$w=0, w_{j\eta\eta} = H(\xi)\varepsilon(w_{j\eta\eta} \pm w_{j\eta}) \text{ при } \eta = \pm 0,5, \quad (7)$$

При промежуточных значениях параметра ε реализуются смешанные граничные условия типа «упругое защемление-шарнир» с коэффициентом упругого замещения $\mu = \varepsilon/(1-\varepsilon)$.

Применим метод малого параметра. Для этого представим собственное число задачи λ и собственную форму ω в виде рядов по ε :

$$w = \sum_{i=0}^{\infty} w_i \varepsilon^i; \quad \lambda = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \varepsilon^i. \quad (8)$$

Подставляя ряды (8) в уравнение (6) и граничные условия (2), (7), приравнявая выражения при одинаковых степенях параметра ε получим следующую рекуррентную последовательность краевых задач:

$$\varepsilon^0: \quad \nabla^4 w_0 - \lambda_0 w_0 = 0, \quad (9)$$

$$w_0 = 0, w_{0\xi\xi} = 0 \text{ при } \xi = \pm 0,5k,$$

$$w_0 = 0, w_{0\eta\eta} = 0 \text{ при } \eta = \pm 0,5;$$

$$\varepsilon^j: \quad \nabla^4 w_j - \lambda_0 w_j = \sum_{i=1}^j \lambda_i w_{j-i}, \quad (10)$$

$$w_j = 0, w_{j\xi\xi} = 0 \text{ при } \xi = \pm 0,5k,$$

$$w_j = 0, w_{j\eta\eta} = \pm H(\xi) \sum_{i=0}^{j-1} w_{i\eta} \text{ при } \eta = \pm 0,5.$$

Рассмотрим построение решения задачи для случая прямосимметричных относительно осей ξ и η форм собственных колебаний.

В нулевом приближении имеем:

$$w_0 = \xi_0 \eta_0 = \cos\left(\frac{\pi m}{k} \xi\right) \cos(\pi n \eta), \quad (11)$$

$$\lambda_0 = \pi^4 \left(n^2 + \frac{m^2}{k^2} \right)^2, \quad (n, m) = 1, 3, 5, \dots \quad (12)$$

В первом приближении получаем следующую краевую задачу

$$\nabla^4 w_1 - \lambda_0 w_1 = \lambda_1 w_0, \quad (13)$$

$$w_1 = 0, w_{1\xi\xi} = 0 \text{ при } \xi = \pm 0,5k, \quad (14)$$

$$w_{1\eta\eta} = \pi n (-1)^{\frac{n-1}{2}} H(\xi) \cos\left(\frac{\pi m}{k} \xi\right), \quad (15)$$

$$w_1 = 0 \text{ при } \eta = \pm 0,5.$$

Решение ищем в виде разложения

$$w_1 = \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} Y_{li} \cos\left(\frac{\pi i}{k} \xi\right). \quad (16)$$

После подстановки выражения (16) в краевую задачу (13) – (15) получим две краевые задачи:

$i=m$

$$Y_{lm}^{IV} - 2 \frac{\pi^2 m^2}{k^2} Y_{lm}^{II} - \pi^4 n^2 \left(2 \frac{m^2}{k^2} + n^2 \right) Y_{lm} = \lambda_1 \cos(\pi n \eta), \quad (17)$$

$$Y_{lm}^{II} = \pm \pi n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \gamma_{mm},$$

$$Y_{lm} = 0 \text{ при } \eta = \pm 0,5. \quad (18)$$

$i \neq m$

$$Y_{li}^{IV} - 2 \frac{\pi^2 i^2}{k^2} Y_{li}^{II} - \pi^4 \left(n^2 + \frac{m^2}{k^2} - \frac{i^4}{k^4} \right) Y_{li} = 0, \quad (19)$$

$$Y_{li} = 0 \quad Y_{li}^{II} = \pm \pi n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \gamma_{im} \text{ при } \eta = \pm 0,5,$$

$$Y_{li}^{II} = \pm \pi n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \gamma_{im},$$

$$Y_{li} = 0 \text{ при } \eta = \pm 0,5. \quad (20)$$

Здесь

$$\gamma_{mm} = (1-2u) - \frac{1}{\pi m} \sin(2\pi m u),$$

$$\gamma_{im} = \frac{4}{\pi(m^2 - i^2)} [i \sin(\pi u i) \cos(\pi u m) -$$

$$- m \sin(\pi u m) \cos(\pi u i)] \text{ при } i \neq m,$$

$$H(\xi) \cos\left(\frac{\pi m}{k} \xi\right) = \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \gamma_{im} \cos\left(\frac{\pi i}{k} \xi\right).$$

Учитывая условия равномерности асимптотического разложения, определяем из краевой задачи (17) – (18) первую поправку к собственному числу λ_1

$$\lambda_1 = \frac{-Y_{1m}'' Y_0^I \Big|_{-0,5}^{0,5}}{\int_{-0,5}^{0,5} Y_0^2 d\eta} = 4\pi^2 n^2 \gamma_{mm}. \quad (21)$$

После определения λ_1 получим следующее выражение для Y_{1m}

$$Y_{1m} = \frac{n}{\pi\alpha} \gamma_{mm} \left[\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2ch \frac{\pi}{2} \beta_1} ch(\pi\beta_1\eta) - \eta \sin(\pi n \eta) \right], \quad i = m, \quad (22)$$

$$\alpha = n^2 + \frac{m^2}{k^2}; \quad \beta_1 = \sqrt{2 \frac{m^2}{k^2} + n^2}.$$

Решение задачи (19) – (20) поправок к собственному числу не дает, а вносит дополнительные слагаемые в форму колебаний:

$$Y_{i1} = \frac{n(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2\pi \left(\frac{i^2}{k^2} + n^2 \right)} \gamma_{im} \left[\frac{ch(\alpha_i \eta)}{ch \frac{\alpha_i}{2}} - \frac{\left\{ \begin{matrix} ch(\varphi_i \eta) \\ \cos(\beta_i \eta) \end{matrix} \right\}}{\left\{ \begin{matrix} ch \frac{\varphi_i}{2} \\ \cos \frac{\beta_i}{2} \end{matrix} \right\}} \right], \quad (23)$$

$$\left\{ \begin{matrix} i^2 > m^2 + n^2 k^2 \\ i^2 < m^2 + n^2 k^2 \end{matrix} \right\},$$

$$\alpha_i = \pi \sqrt{\frac{i^2 + m^2}{k^2} + n^2}; \quad \beta_i = \pi \sqrt{\frac{m^2 - i^2}{k^2} + n^2};$$

$$\varphi_i = \pi \sqrt{\frac{i^2 - m^2}{k^2} - n^2}.$$

Суммируя выражения (22) и (23) с учетом разложения (16), получаем первую поправку к собственной форме w_1 для прямосимметричных колебаний

$$w_1 = \frac{n}{\pi\alpha} \left\{ \gamma_{mm} \left[\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2ch \frac{\pi}{2} \beta_1} ch(\pi\beta_1\eta) - \eta \sin(\pi n \eta) \right] + \right.$$

$$\left. - \eta \sin(\pi n \eta) \right\} \cos\left(\frac{\pi m}{k} \xi\right) + \left[\frac{ch(\alpha_i \eta)}{ch \frac{\alpha_i}{2}} - \frac{\left\{ \begin{matrix} ch(\varphi_i \eta) \\ \cos(\beta_i \eta) \end{matrix} \right\}}{\left\{ \begin{matrix} ch \frac{\varphi_i}{2} \\ \cos \frac{\beta_i}{2} \end{matrix} \right\}} \right] \times \left. \cos\left(\frac{\pi m}{k} \xi\right) \right\}. \quad (24)$$

Аналогично получаем выражение для второй поправки к собственному числу λ_2

$$\lambda_2 = 4\pi^2 n^2 \gamma_{mm} \left\{ 1 - \frac{\gamma_{mm}}{\pi^2 \alpha} \left[\frac{\pi\beta_1}{2} th \frac{\pi\beta_1}{2} + \frac{n^2}{\alpha} - \frac{3}{2} \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{2n^2}{\alpha} \sum_{i=1,3,5} \gamma_{im}^2 \left[\alpha_i th \frac{\alpha_i}{2} + \frac{\left\{ \begin{matrix} -\varphi_i th \frac{\varphi_i}{2} \\ \beta_i tg \frac{\beta_i}{2} \end{matrix} \right\}}{2} \right] \right\}. \quad (25)$$

Рассматривая также центрально симметричные формы колебаний, получаем аналитические выражения, описывающие собственные числа и формы для любых значений волновых чисел в виде отрезков рядов возмущений:

$$\lambda = \pi^4 \alpha^4 + 4\pi^2 \alpha^2 \gamma_{mm} \varepsilon + \left\{ 4\pi^2 n^2 \gamma_{mm} \left(1 - \frac{\gamma_{mm}}{\pi^2 \alpha} \left[\frac{\pi\beta_1}{2} cth^{(-1)^m} \frac{\pi\beta_1}{2} + \frac{n^2}{\alpha} - \frac{3}{2} \right] - \frac{2n^4}{\alpha} \sum_{\substack{i=1,3,5,\dots \\ i=2,4,6,\dots}} \gamma_{im}^2 \left[\alpha_i cth^{(-1)^i} \frac{\alpha_i}{2} + \frac{\left\{ \begin{matrix} -\varphi_i cth^{(-1)^i} \frac{\varphi_i}{2} \\ \beta_i ctg^{(-1)^i} \frac{\beta_i}{2} \end{matrix} \right\}}{2} \right] \right\} \varepsilon^2 + \dots, \quad (26)$$

$$w = \left\{ \begin{matrix} \cos\left(\frac{\pi m}{k} \xi\right) \\ \sin\left(\frac{\pi m}{k} \xi\right) \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \cos(\pi n \eta) \\ \sin(\pi n \eta) \end{matrix} \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{n}{\pi \alpha} \gamma_{mm} \left\{ \begin{array}{l} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left\{ \begin{array}{l} ch(\beta_i \eta) \\ sh(\beta_i \eta) \end{array} \right\} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \end{array} \right\} \frac{\left\{ \begin{array}{l} ch \frac{\pi \beta_1}{2} \\ sh \frac{\pi \beta_1}{2} \end{array} \right\}}{2} - \right. \\
& \left. - \left\{ \begin{array}{l} \sin(\pi n \eta) \\ \cos(\pi n \eta) \end{array} \right\} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \cos \frac{\pi n}{k} \xi \\ \sin \frac{\pi n}{k} \xi \end{array} \right\} + \\
& + n \left\{ \begin{array}{l} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \end{array} \right\} / (2\pi \alpha) \cdot \sum_{\substack{i=1,3,5... \\ i=2,4,6...}}^{\infty} \gamma_{im} \left\{ \begin{array}{l} ch \alpha_{i1} \eta \\ sh \alpha_{i1} \eta \\ ch \frac{\alpha_{i1}}{2} \\ sh \frac{\alpha_{i1}}{2} \end{array} \right\} - \\
& \left. - \left\{ \begin{array}{l} ch(\varphi_{i1} \eta) \\ ch(\varphi_{i1} \eta) \\ \cos(\beta_{i1} \eta) \\ \sin(\beta_{i1} \eta) \\ ch(\varphi_{i1} / 2) \\ ch(\varphi_{i1} / 2) \\ \cos(\beta_{i1} / 2) \\ \sin(\beta_{i1} / 2) \end{array} \right\} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \cos(\frac{\pi i \xi}{k}) \\ \sin(\frac{\pi i \xi}{k}) \end{array} \right\} \varepsilon + \dots ; \\
& \left. \left\{ \begin{array}{l} i^2 > m^2 + n^2 k^2 \\ i^2 < m^2 + n^2 k^2 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} n, m = 1, 3, 5 \dots \\ n, m = 2, 4, 6 \dots \end{array} \right\}, \right\} (27)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\gamma_{mm} &= (1 - 2u) + \frac{(-1)^m}{\pi m} \sin(2\pi m u), \\
\gamma_{im} &= \frac{4}{\pi(m^2 - i^2)} \left[\left\{ \begin{array}{l} i \\ m \end{array} \right\} \sin(\pi u i) \cos(\pi u m) - \right. \\
& \left. - \left\{ \begin{array}{l} m \\ i \end{array} \right\} \sin(\pi u m) \cos(\pi u i) \right] \text{ при } i \neq m.
\end{aligned}$$

Аналогично решается задача определения собственных частот пластины, имеющей несимметрично расположенные участки смешанных граничных условий (рис.1, б). Выражения для собственного числа λ и собственной формы w в этом случае имеют вид (26) и (27) соответственно, со следующей заменой

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}} \text{ на } (-1), \left\{ \begin{array}{l} (i, m) = 1, 3, 5 \dots \\ (i, m) = 2, 4, 6 \dots \end{array} \right\} \text{ на } (i, m) = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \frac{\pi m \xi}{k} \\ \sin \frac{\pi m \xi}{k} \end{array} \right\} \text{ на } \sin \frac{\pi m \xi}{k}, \left\{ \begin{array}{l} \cos \frac{\pi i \xi}{k} \\ \sin \frac{\pi i \xi}{k} \end{array} \right\} \text{ на } \sin \frac{\pi i \xi}{k}.$$

Коэффициент γ_{im} в этом случае имеет следующий вид

$$\begin{aligned}
\gamma_{mm} &= u - \frac{1}{2\pi m} \sin(2\pi m u), \\
\gamma_{im} &= \frac{2}{\pi(m^2 - i^2)} [i \sin(\pi u m) \cos(\pi u i) - \\
& - m \sin(\pi u i) \cos(\pi u m)] \text{ при } i \neq m.
\end{aligned}$$

Далее отрезок ряда для собственного числа перестраиваем в дробно-рациональную функцию АП и подсчитываем значение первого собственного числа краевой задачи (6), (7), (2) при $\varepsilon = 1$.

Анализ результатов. Результаты численных исследований зависимости частот собственных колебаний от величины участка защемления представлены на рис. 2, где $Z = \lambda / \pi^4$.

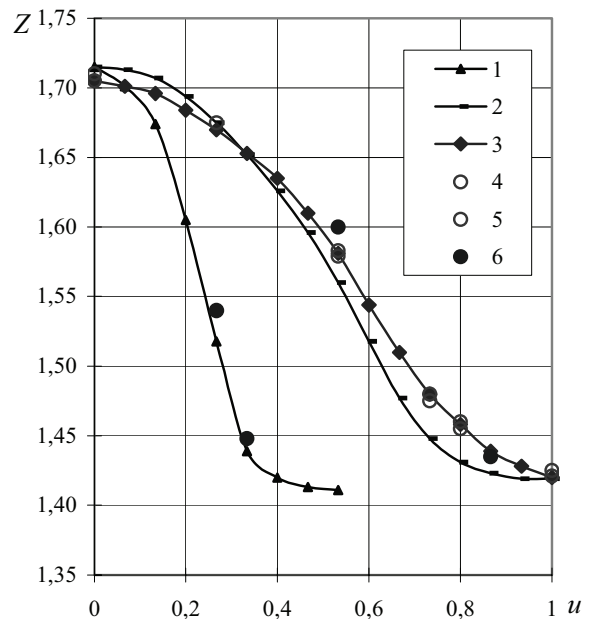


Рис. 2. Зависимость частоты от величины участка защемления

Решения, полученные на основе предложенного подхода, для пластины с симметричным и асимметричным расположением участка защемления представлены кривыми 1, 2; 3 – результаты, полученные при помощи метода интегральных уравнений [9]; 4, 5 – экспериментальные данные [9]; 6 – результаты для некоторых промежуточных значений параметра u , полученные методом парных рядов [7]. Для предельного случая $\varepsilon = 1$ при полном защемлении краев пластины $\eta = \pm 0,5$ первое собственное

число задачи, вычисленное на основании построенного решения равно $\lambda=1,7081\pi^4$, а полученное численно [5, 6] – $\lambda=1,7050\pi^4$ (погрешность составляет 0,18%). Анализ приведенных данных показывает, что в целом, расхождение полученных результатов с известными не превышает 2%.

Для случая симметричного расположения участков замещения зависимость собственного числа от размеров участка шарнирного опирания имеет три характерных участка. На первом участке от $u=0,0$ до $u=0,05$ с ростом параметра u собственное число уменьшается незначительно. На следующем участке от $u=0,05$ до $u=0,4$ собственное число уменьшается почти линейно. На третьем – от $u=0,4$ до $u=0,5$ уменьшение собственного числа также незначительно.

Для пластины с несимметричным расположением участка защемления эти зоны будут располагаться в следующих пределах значений параметра u : первая – $u = 0,0-0,2$; вторая – $u = 0,2-0,8$; третья – $u = 0,8-1,0$.

Выводы. Полученные результаты свидетельствуют о том, что на собственную частоту оказывают малое влияние как небольшие по размеру участки шарнирного опирания (первый участок кривой), так и небольшие участки защемления (третий участок кривой). Существуют также такие соотношения размеров участков смешанных граничных условий, при которых их небольшое изменение существенно влияет на частоту собственных колебаний пластины (второй участок кривой).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Смирнов, В. А. Расчет пластин сложного очертания [Текст] / В. А. Смирнов. – М.: Стройиздат, 1978. – 303 с.
2. Марченко, В. А. Краевые задачи в областях с шелкозернистой границей [Текст] / В. А. Марченко, Е. Я. Хрущов. – К.: Наук. думка, 1974. – 277 с.
3. Образцов, И. Ф. Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций [Текст] / И. Ф. Образцов, Б. В. Нерубайло, И. В. Андрианов. – М.: Машиностроение, 1991. – 416 с.
4. Вольмир, А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек [Текст] / А. С. Вольмир. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
5. Тимошенко, С. П. Колебания в инженерном деле [Текст] / С. П. Тимошенко. – М.: Физмашгиз, 1959. – 439 с.
6. Гонткевич, В. С. Собственные колебания пластинок и оболочек [Текст] / В. С. Гонткевич. – К.: Наук. думка, 1964. – 287 с.
7. Цейтлин, А. И. Колебания прямоугольной пластинки со смешанными краевыми условиями [Текст] / А. И. Цейтлин, Б. Т. Гликман // Исследования по теории сооружений. Т. 19. – М., 1972. – С. 185-194.
8. Андрианов, И. В. Численно-асимптотический метод решения нелинейных смешанных краевых задач механики [Текст] / И. В. Андрианов, В. А. Пасечник // Механіка. – 1999. – Вип. 2, Т. 2. – С. 5-12.
9. Ota, T. Fundamental frequencies of simple supported but partially clamped square plates [Текст] / T. Ota, M. Hamada // Bull. of Japan Soc. of Mech. Eng. – 1963. – V. 6, № 23. – P. 397-403.

Поступила в редколлегию 14.08.2009