УДК 531.3

В. В. КРАВЕЦ, д.т.н., профессор, УГХТУ (Украина);
В. В.КРАВЕЦ, к.т.н. доцент, ДИИТ (Украина);
Т. В. КРАВЕЦ, асс., ДИИТ (Украина)

КВАТЕРНИОННЫЕ МАТРИЦЫ В НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ СКОРОСТНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ СИСТЕМ

Наведено систему чотирьох кватерніонних матриць для подання основних залежностей теорії кінцевого повороту, кінематики й нелінійної динаміки асиметричного твердого тіла в тривимірному просторі. Застосувавши рівняння у формі Ейлера-Лагранжа й систему чотирьох кватерніонних матриць, побудована блочно-матрична модель нелінійної динаміки вільного асиметричного твердого тіла в тривимірному просторі. Одержані результати апробовані. Запропоновані алгоритми безпосередньо адаптовані до обчислювального експерименту.

Приведена система четырех кватернионных матриц для представления основных зависимостей теории конечного поворота, кинематики и нелинейной динамики асимметричного твердого тела в трехмерном пространстве. Применив уравнения в форме Эйлера-Лагранжа и систему четырех кватернионных матриц, построена блочно-матричная модель нелинейной динамики свободного асимметричного твердого тела в трехмерном пространстве. Полученные результаты апробированы. Предложенные алгоритмы непосредственно адаптированы к вычислительному эксперименту.

The system of four quaternion matrices for presentation of main relationships of the theory of final rotation, kinematics and nonlinear dynamics of an asymmetric solid body in a three-dimensional space is presented. By means of application of equations in the form of Euler-Lagrange and the system of four quaternion matrices, the block-matrix model of nonlinear dynamics of a free asymmetric solid body in a three-dimensional space is built. The results obtained are approved. The offered algorithms are adapted directly to computing experiment.

Введение. В Днепропетровске усилиями выдающихся ученых и конструкторов М. К. Янгеля, В. А. Лазаряна, В. С. Будника, Н. Ф. Герасюты был создан мощный научно-технический потенциал способный решать сложные задачи транспортных систем различного назначения не имеющих аналогов в мировой практике: ракет-носителей (РН), боевых железнодорожных ракетных комплексов (БЖРК), высокоскоростного наземного транспорта (ВСНТ) [6, 17, 31]. Силами научных школ по динамике и управлению движением, руководимых В.А. Лазаряном, Н.Ф. Герасютой, и включающих известных ныне ученых Е. П. Блохина, Л. М. Коротенка, В. Ф. Ушкалова, Ю.В. Демина, Г. И. Богомаза, С. В. Мямлина, Н. М. Хачапуридзе, а также А. А. Красовского, И. М. Игдалова, Ю. Д. Шептуна, А.П. Алпатова и др. которыми разрабатывались оригинальные методы исследований транспортных систем на основе натурных и вычислительных экспериментов [2, 11, 12, 19, 25]. При этом большое внимание уделялось организации и проведению математического моделирования динамики, устойчивости, управляемости движением. Технология проведения вычислительных экспериментов поднималась на новый уровень по мере совершенствования вычислительной техники [5, 23], и достигло высокой степени развития благодаря научным школам, объединившим усилия инженеров, механиков, математиков при разработке и построении математических моделей, адекватных техническим задачам динамики сложных механических систем, включая экипажи скоростного наземного транспорта.

1. Вычислительный эксперимент. Вычислительный эксперимент играет ведущую роль при решении задач динамического проектирования технических систем [6, 12, 13, 17, 19, 21, 27, 31]. Методология вычислительного эксперимента заложена в трудах Глушкова В. М. [5], Моисеева Н. Н. [23] и др. Важными являются разработки отдельных этапов технологического цикла вычислительного эксперимента:

– построение математических моделей адекватных физическим процессам в технических системах, возможность их унификации и модификации;

– составление компактных вычислительных алгоритмов и соответствующих эффективных вычислительных программ, возможность их простой и быстрой верификации.

2. Математическая модель. При разработке математических моделей используются различные методы механики и математический аппарат [3, 7, 8, 10, 11, 21, 27, 30, 33]. Научная школа, возглавляемая академиком В. А. Лазаряном для построения математических моделей динамики железнодорожных экипажей, широко использует уравнения Лагранжа второго рода в обобщенных координатах. Дальнейшее развитие этого научного направления связано с поиском целесообразной формы представления математических моделей адаптированных к современной вычислительной технике. Для этой цели используются дифференциальные уравнения движения в форме Эйлера-Лагранжа, которые в значительной мере облегчают процесс построения математических моделей и позволяют получить симметричную и более простую структуру этих уравнений при сравнении с традиционными уравнениями И. Ньютона (координатный метод), Ж. Лагранжа (метод обобщенных координат) [10, 28]. Центральным элементом такой концепции является симметрия [36], понимаемая по Г. Вейлю как упорядоченность, совершенство [4]. А. И. Лурье обращает внимание на дифференциальные уравнения движения в форме Эйлера-Лагранжа и высоко оценивает их возможности для исследований динамики голономных и неголономных систем твердых тел [20].

Схематично нелинейные уравнения движения свободного твердого тела в пространстве в форме Эйлера−Лагранжа записываются в виде:

$$\varepsilon_i(T) = \sum_k \left\| \frac{\overline{M}^k_{yi}}{\overline{Q}^k_{yi}} \right\|, \qquad (1)$$

где $\varepsilon_i(T)$ – эйлеров оператор, $\overline{M}^k_{yi}, \overline{Q}^k_{yi}$ – приведенные к массе m_i обобщенные моменты и силы, приложенные к i-му твердому телу. В этих уравнениях в качестве переменных интегрирования принимаются квазискорости. Матричные составляющие обобщенных сил в уравнениях движения Эйлера-Лагранжа определяются известным методом [20] как множители при вариациях квазикоординат в выражении элементарной работы. Приведенные уравнения Эйлера-Лагранжа положены в основу математических моделей, используемых в вычислительных экспериментах в процессе динамического проектирования сложных транспортных систем.

3. Постановка задач динамического проектирования транспортных систем. Рассматриваются две обобщенные постановки задачи динамического проектирования транспортных систем:

− традиционная, основная задача механики движения, широко используемая применительно к летательным аппаратам [6, 12, 19],

− обратная задача механики движения, целесообразность решения которой применительно к скоростным экипажам железнодорожного транспорта обосновывается в работах [13, 26].

Традиционная постановка задач динамического проектирования летательных аппаратов сводится к следующему: заданы характеристики летательного аппарата, система сил и моментов воздействующие на объект, включая управляющие; находятся кинематические параметры движения, в частности, траектория полета. Отметим здесь, что управляющие силы и моменты формируются с помощью, так называемой, инерциальной измерительной системы [8].

Обратные задачи динамического проектирования естественно и логично формулируются для скоростных экипажей железнодорожного транспорта, и их обобщенная постановка сводится к следующему: задана траектория движения − реальный железнодорожный путь, имеющий кривизну в плане и профиле, локальные неровности и т.п., внешние воздействия, инерционные и геометрические параметры экипажа; находится динамическая нагруженность пути, элементов конструкции, соответствующая заданному режиму движения скоростного экипажа по реальному железнодорожному пути. Здесь полагается, что кинематические параметры движения и, в частности, траектория движения отслеживается с помощью инерциальной измерительной системы той или иной известной схемы.

4. Математический аппарат. Для решения поставленных обобщенных задач динамики, различные научные школы развивают оригинальные математические методы описания кинематики и динамики твердых тел, где наряду с традиционным векторным исчислением [16, 29] широко используется матричное [33], тензорное исчисление [10, 11], алгебра кватернионов и гиперкомплексных чисел [3, 7, 8, 27], кватернионные матрицы [1, 15, 22, 27, 30, 34, 36]. Практическая реализация на ЭВМ построенных математических моделей приводит к необходимости введения конкретных систем отсчета, индексных обозначений, искомых переменных и применения соответствующего математического аппарата матричного или тензорного исчисления. С применением матричных методов связываются такие преимущества, как возможность непосредственной и достаточно простой реализации составленных алгоритмов на ЭВМ, компактность записи и обозримость вычислительного алгоритма, снижение трудоемкости составления и тестирования программ, уменьшение вероятности ошибок [11, 13, 24, 26, 32, 33]. По оценке А. М. Летова [18] целесообразность приведения уравнений к матричной форме определяется «не только соображениями математического изящества, достигаемого здесь введением симметричной и компактной записи, но и существом дела».

Как видится авторам дальнейшее совершенствование методов описания кинематики и нелинейной динамики в трехмерном пространстве ассиметричных твердых тел возможно на основе применения совокупности четырех кватернионных матриц, достаточных для рассматриваемого круга задач механики и направленных на адаптацию математических моделей технических объектов к вычислительному эксперименту.

5. Кватернионные матрицы. При изложении принципов симметрии в физике [36], в теории конечного поворота твердого тела [29], при решении задач навигации и управления ориентацией [3, 7, 8, 15, 27, 31] оказалось удобным применять алгебру кватернионов и гиперкомплексных чисел. Кватерниону сопоставляется квадратная (4×4)-матрица, называемая кватернионной [1, 22, 35]. Ниже приводятся обозначения совокупности четырех унифицированных кватернионных матриц, обладающих упорядоченной структурой [14]:

$$A = \begin{Vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ -a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ -a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{Vmatrix},$$

$${}^tA = \begin{Vmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{Vmatrix},$$

$${}^tA^t = \begin{Vmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{Vmatrix},$$

$$A^t = \begin{Vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ -a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ -a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{Vmatrix}, \tag{2}$$

две из которых A, ${}^tA$ эквивалентны кватерниону и две ${}^tA^t$, A^t − сопряженному кватерниону. Задача заключается в представлении этими кватернионными матрицами основных зависимостей теории конечного поворота, кинематики и нелинейной динамики в трехмерном пространстве для ассиметричного твердого тела в виде, удобном для символьных и аналитических преобразований при составлении математических моделей.

6. Сложение конечных поворотов. Последовательность конечных поворотов твердого тела в пространстве удобно описать совокупностью параметров Родрига–Гамильтона [20]:

$$a_{0k} = \cos\frac{\varphi_k}{2},$$

$$a_{1k} = n_{1k}\sin\frac{\varphi_k}{2},$$

$$a_{2k} = n_{2k}\sin\frac{\varphi_k}{2},$$

$$a_{3k} = n_{3k}\sin\frac{\varphi_k}{2}, \quad \left(k = 1, 2, 3, \ldots n\right) \tag{3}$$

где k-й конечный поворот осуществляется на угол φ_k вокруг направленной оси вращения, характеризуемой единичным вектором $\overline{n}_k(n_{1k}, n_{2k}, n_{3k})$.

Заданным параметрам Родрига–Гамильтона сопоставим совокупность четырех кватернионных матриц $A_k, {}^tA_k, {}^tA_k^t, A_k^t$. Тогда кватернионные матрицы результирующего поворота R и ${}^tR$ определяются произведением кватернионных матриц той же структуры A_k и ${}^tA_k$ в принятой последовательности поворотов:

$$R = \prod_{k=1}^{n} A_k, \qquad {}^tR = \prod_{k=1}^{n} {}^tA_k. \tag{4}$$

Кватернионные матрицы результирующего поворота, эквивалентные сопряженному кватерниону ${}^tR^t$ и R^t, определяются произведением матриц той же структуры в обратном порядке:

$$ {}^{t}R^{t} = \prod_{k=n}^{1} {}^{t}A_{k}^{t}, \quad R^{t} = \prod_{k=n}^{1} A_{k}^{t}. \qquad (5) $$

то есть рассматриваемые пары кватернионных матриц результирующего поворота связаны операцией транспонирования: ${}^{t}[R]^{t} = {}^{t}R^{t}$, ${}^{t}[{}^{t}R]^{t} = R^{t}$.

Матрицу конечного поворота определяет коммутативное произведение составленных кватернионных матриц, эквивалентных кватерниону: $R \cdot {}^{t}R$ или ${}^{t}R \cdot R$,
а обратную матрицу конечного поворота определяет коммутативное произведение кватернионных матриц результирующего поворота, эквивалентных сопряженному кватерниону: ${}^{t}R^{t} \cdot R^{t}$ или $R^{t} \cdot {}^{t}R^{t}$.

7. Кинематика твердого тела в пространстве. Формулы преобразования координат произвольной точки в подвижной системе осей y_i и неподвижной $x_i\,(i = 1,2,3)$, начало которых совмещено, и обратно имеют вид:

$$ x_0 = A \cdot {}^{t}A \cdot y_0, \quad y_0 = A^{t} \cdot {}^{t}A^{t} \cdot x_0, \qquad (6) $$

где x_0, y_0 − матрицы-столбцы (4×1) координат точки в неподвижных и подвижных осях; $A, {}^{t}A, {}^{t}A^{t}, A^{t}$ − кватернионные матрицы, сформированные по параметрам Родрига-Гамильтона $a_j\,(j = 0,1,2,3)$, характеризующие поворот подвижных осей относительно неподвижных.

Установлена зависимость кватернионных матриц $\Omega_y, {}^{t}\Omega_y, {}^{t}\Omega_y^{t}, \Omega_y^{t}$, составленных по компонентам угловой скорости в подвижных осях $\omega_{iy}\,(i = 1,2,3)$, и кватернионных матриц $\Omega_x, {}^{t}\Omega_x, {}^{t}\Omega_x^{t}, \Omega_x^{t}$, составленных по компонентам угловой скорости в неподвижных осях $\omega_{ix}\,(i = 1,2,3)$ через исходные кватернионные матрицы $A, {}^{t}A, {}^{t}A^{t}, A^{t}$, $\dot{A}, {}^{t}\dot{A}, {}^{t}\dot{A}^{t}, \dot{A}^{t}$, составленные по параметрам Родрига–Гамильтона $a_j\,(j = 0,1,2,3)$ и их производным по времени $\dot{a}_j\,(j = 0,1,2,3)$ соответственно:

$$ \Omega_y = 2\,{}^{t}A^{t} \cdot \dot{A}, $$

$$ {}^{t}\Omega_y = 2A^{t} \cdot {}^{t}\dot{A}, $$

$$ {}^{t}\Omega_y^{t} = 2\,{}^{t}\dot{A}^{t} \cdot A, $$

$$ \Omega_y^{t} = 2\dot{A}^{t} \cdot {}^{t}A; $$

$$ \Omega_x = 2\dot{A} \cdot {}^{t}A^{t}, $$

$$ {}^{t}\Omega_x = 2\,{}^{t}\dot{A} \cdot A^{t}, $$

$$ {}^{t}\Omega_x^{t} = 2A \cdot {}^{t}\dot{A}^{t}, $$

$$ \Omega_x^{t} = 2\,{}^{t}A \cdot \dot{A}^{t}. \qquad (7) $$

8. **Нелинейная динамика.** Для описания нелинейной динамики свободного ассиметричного твердого тела в пространственном движении используется дифференциальные уравнения в форме Эйлера-Лагранжа [20], приведенные к матричной записи:

$$ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \omega_s} + \omega^{t} \cdot \Gamma_s \frac{\partial T}{\partial \omega} = Q_s, \qquad (8) $$

где Γ_s − квадратная матрица трехиндексных символов γ_{ts}^{r}; $\dfrac{\partial T}{\partial \omega}$ − матрица-столбец частных производных от кинетической энергии твердого тела по квазискоростям ω_s; Q_s − обобщенная сила, отнесенная к квазикоординате π_s.

Учитывая структуру полученных матриц трехиндексных символов и выполнив необходимые преобразования, представим уравнения движения Эйлера-Лагранжа совокупностью блочных матриц, составными элементами которых являются кватернионные матрицы:

$$ \left\| \begin{array}{c|c} \dfrac{I_y}{m} & \dfrac{1}{2}\left({}^{t}Y_c + Y_c\right) \\ \hline \dfrac{1}{2}\left(Y_c^{t} + {}^{t}Y_c^{t}\right) & E_0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \dot{\omega}_y \\ \hline \dot{V}_{0y} \end{array} \right\| + $$

$$ + \left\| \begin{array}{c|c} \dfrac{1}{2}\left({}^{t}\Omega_y + \Omega_y\right) & \dfrac{1}{2}\left({}^{t}V_y + V_y\right) \\ \hline 0 & \dfrac{1}{2}\left({}^{t}\Omega_y + \Omega_y\right) \end{array} \right\| \times \qquad (9) $$

$$ \times \left\| \begin{array}{c|c} \dfrac{I_y}{m} & \dfrac{1}{2}\left({}^{t}Y_c + Y_c\right) \\ \hline \dfrac{1}{2}\left(Y_c^{t} + {}^{t}Y_c^{t}\right) & E_0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \omega_y \\ \hline V_{0y} \end{array} \right\| = \frac{1}{m}\left\| \begin{array}{c} M \\ \hline Q \end{array} \right\|. $$

где m − масса твердого тела; I_y − матрица инерции твердого тела, вычисленная в связанной системе координат; M, Q − обобщенные силы; $Y_c, {}^{t}Y_c, Y_c^{t}, {}^{t}Y_c^{t}$ − кватернионные матрицы, составленные по координатам центра масс тела; $\Omega_y, {}^{t}\Omega_y$ − кватернионные матрицы, составленные по квазискоростям ω_y; $V_y, {}^{t}V_y$ − кватернионные матрицы, составленные по квазискоростям V_{0y}; E_0, O − единичная и нулевая (4×4)-матрицы.

9. Инварианты. Параметры Родрига–Гамильтона, их производные по времени, компоненты угловой скорости в подвижных и неподвижных осях связаны инвариантными соотношениями

$$a_0\dot{a}_0 + a_1\dot{a}_1 + a_2\dot{a}_2 + a_3\dot{a}_3 = 0,$$

$$4(\dot{a}_0^2+\dot{a}_1^2+\dot{a}_2^2+\dot{a}_3^2) = \omega_{1y}^2+\omega_{2y}^2+\omega_{3y}^2 = \omega_{1x}^2+\omega_{2x}^2+\omega_{3x}^2, \quad (10)$$

а также удовлетворяют условиям нормировки $a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$.

10. Апробация. Рассмотрим частные случаи. Пусть полюс связанной системы осей совмещен с центром масс твердого тела, т.е. $Y_c = 0$. Тогда полученные уравнения движения существенно упрощаются и могут быть представлены в виде системы двух матричных уравнений:

$$I_y^c\cdot\dot{\omega}_y + \frac{1}{2}\left({}^t\Omega_y + \Omega_y\right)I_y^c\cdot\omega_y + \frac{1}{2}\left({}^tV_y + V_y\right)v_{cy}m = M,$$

$$m\dot{v}_{cy} + \frac{1}{2}\left({}^t\Omega_y + \Omega_y\right)mv_{cy} = Q. \quad (11)$$

Полагая $V_{0y} = 0$, получим уравнения вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной точки, принятой в качестве полюса связанных осей, т.е. динамические уравнения Эйлера принимают вид:

$$I_y\cdot\dot{\omega}_y + 0{,}5\left({}^t\Omega_y + \Omega_y\right)I_y\cdot\omega_y = M. \quad (12)$$

В случае, рассмотренном Эйлером, когда точка закрепления совпадает с центром масс, связанные оси являются главными центральными осями инерции и главный момент внешних сил равен нулю, уравнения пространственного движения твердого тела по инерции в матричной записи принимают лаконичный вид:

$$\left\|\begin{matrix} I_{11}^{yc} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22}^{yc} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33}^{yc}\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}\dot{\omega}_1^y \\ \dot{\omega}_2^y \\ \dot{\omega}_3^y\end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix} 0 & -\omega_3^y & \omega_2^y \\ \omega_2^y & 0 & -\omega_1^y \\ -\omega_2^y & \omega_1^y & 0\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix} I_{11}^{yc} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22}^{yc} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33}^{yc}\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}\omega_1^y \\ \omega_2^y \\ \omega_3^y\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}0 \\ 0 \\ 0\end{matrix}\right\|. \quad (13)$$

В развернутой записи, приведенные здесь уравнения совпадают с известными [28]. Эти частные случаи подтверждают достоверность полученной блочно-матричной модели нелинейной динамики асимметричного твердого тела в трехмерном пространстве, составленной на основе совокупности четырех кватернионных матриц.

Заключение. Приведенная система четырех кватернионных матриц оказалась достаточной для описания кинематики и нелинейной динамики ассиметричного твердого тела в трехмерном пространстве, а составленные алгоритмы − удобными при проведении аналитических преобразований. Упорядоченность искомых зависимостей достигнута применением кватернионных матриц, где в качестве их элементов используются параметры Родрига–Гамильтона, квазискорости, координаты характерных точек. Изложенные алгоритмы сложения конечных поворотов, описания кинематики и динамики ассиметричных твердых тел в трехмерном пространстве обеспечивают автоматизм получения искомых зависимостей. Цели верификации алгоритмов служат симметрия математического описания искомых зависимостей с помощью кватернионных матриц и наличие инвариантных выражений, присущих используемым переменным.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Беллман, Р. Введение в теорию матриц [Текст] / Р. Беллман. – М.: Наука, 1976. – 352 с.
2. Блохин, Е. П. Динамика поезда [Текст] / Е. П. Блохин, Л. А. Манашкин. − М.: Транспорт, 1982. − 222 с.
3. Бранец, В. Н. Механика космического полета: Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела [Текст] / В. Н. Бранец, И. П. Шмыглевский. – М.: Наука, 1973. – 320 с.
4. Вейль, Г. Симметрия [Текст] / Г. Вейль. – М.: Наука, 1986. – 192 с.
5. Глушков, В. М. Фундаментальные исследования и технология программирования [Текст] / В. М. Глушков // Программирование. – 1980. – № 2. – С.3-13.
6. Ракета как объект управления [Текст] : учебник / И. М. Игдалов и др.; под ред. акад. С. Н. Конюхова. − Д.: АРТ-Пресс, 2004.− 544 с.
7. Икес, Б. П. Новый метод выполнения численных расчетов, связанных с работой системы управления ориентацией, основанный на использовании кватернионов [Текст] / Б. П. Икес // Ракетная техника и космонавтика. – 1970. – 8, № 1. – С. 13-19.

8. Ишлинский, А. Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация [Текст] / А. Ю. Ишлинский. – М.: Наука, 1976. – 672 с.
9. Казанова, Г. Векторная алгебра [Текст] / Г. Казанова. – М.: Мир, 1979. – 120 с.
10. Кильчевский, Н. А. Курс теоретической механики [Текст] / Н. А. Кильчевский. – М.: Наука, 1977. – т. 1. – 480с.; т. 2. – 544 с.
11. Коренев, Г. В. Тензорное исчисление [Текст] / Г. В. Коренев. – М.: Изд-во МФТИ, 1995. – 240 с.
12. Костров, А. В. Движение асимметричных баллистических аппаратов [Текст] / А. В. Костров. − М.: Машиностроение, 1984. − 271 с.
13. Kravets, V. V. Evaluating the Dynamic Load on a High-Speed Railroad Car [Текст] / V. V. Kravets // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, № 3. – P. 324-329.
14. Кравец, Т. В. Построение группы мономиальных матриц, изоморофных группе кватернионов [Текст] / Т. В. Кравец // IV Межд. конф. «Математика. Моделирование. Экология». Тезисы докл. − 1996. − С. 76.
15. Кравець, Т. В. Представлення кватерніонними матрицями послідовності скінчених поворотів твердого тіла у просторі [Текст] / Т. В. Кравець // «Автоматика – 2000». Праці конференції. − Львів, 2000. − **2**. − С. 140-145.
16. Кузичева, З. А. Векторы, алгебры, пространства [Текст] / З. А. Кузичева. − М.: Знание, сер. «Математика и кибернетика». − 1970. − 11. − 64 с.
17. Лазарян, В. А. Динамика транспортных средств [Текст] / В. А. Лазарян. – К.: Наук. думка, 1985. – 528 с.
18. Летов, А. М. Устойчивость нелинейных регулируемых систем [Текст] / А. М. Летов. – М.: Физматгиз, 1962. – 484 с.
19. Лебедев, А. А. Баллистика ракет [Текст] / А. А. Лебедев, Н. Ф. Герасюта. − М.: Машиностроение, 1970. − 224 с.
20. Лурье, А. И. Аналитическая механіка [Текст] / А. И. Лурье. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.
21. Литвин-Седой, М. З. Механика систем связанных тел [Текст] / М. З. Литвин-Седой // Итоги науки и техники. Общая механика. − М.: Наука, 1982. − № 5. − С. 2-52.
22. Мальцев, А. И. Основы линейной алгебры [Текст] / А. И. Мальцев. – М.: Наука, 1970. – 400 с.
23. Моисеев, Н. Н. Математика ставит эксперимент [Текст] / Н. Н. Моисеев. – М.: Наука, 1979. – 224 с.
24. Мямлин, С. В. Симметрия математической модели и достоверность вычислительного эксперимента [Текст] / С. В. Мямлин, В. В. Кравец // Зб. наук. пр. Вінницького держ. аграрн. ун-ту. − 2003. − Вип. 15. − С. 339-340.
25. Мямлин, С. В. Моделирование динамики рельсовых экипажей [Текст] / С. В. Мямлин. – Д.: Новая идеология, 2002. – 240 с.
26. Мямлин, С. В. Каскадный алгоритм определения динамической нагруженности элементов конструкции скоростного вагона [Текст] / С. В. Мямлин, В. В. Кравец // Залізн. трансп. України. – 2004. – № 4. – С. 47-50.
27. Онищенко, С. М. Применение гиперкомплексных чисел в теории инерциальной навигации. Автономные системы [Текст] / С. М. Онищенко. − К.: Наук. думка, 1983. − 208 с.
28. Павловский, М. А. Теоретическая механика [Текст] / М. А. Павловский, Т. В. Путята. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1985. – 328 с.
29. Парс, Л. А. Аналитическая динамика [Текст] / Л. А. Парс. − пер. с англ. − М.: Наука, 1971. − 636 с.
30. Плотников, П. К. Применение кватернионных матриц в теории конечного поворота твердого тела [Текст] / П. К. Плотников, Ю. Н. Челноков // Сб. научн.-метод. статей по теор. механике. − М.: Высш. шк., 1981. − Вып. 11. − С. 122-128.
31. Раушенбах, Б. В. Управление ориентацией космических аппаратов [Текст] / Б. В. Раушенбах, Е. Н. Токарь. − М.: Наука, 1974. − 598 с.
32. Сигорский, В. П. Математический аппарат инженера [Текст] / В. П. Сигорский. – Киев: Техніка, 1977. – 768 с.
33. Стражева, И. В. Векторно-матричные методы в механике полета [Текст] / И. В. Стражева, В. С. Мелкумов. − М.: Машиностроение, 1973. − 260 с.
34. Челноков, Ю. Н. Об одном винтовом методе описания движения твердого тела [Текст] / Ю. Н. Челноков // Сб. научн.-метод. статей по теор. механике. − М.: Высш. шк., 1981.− Вып. 11.− С. 129-138.
35. Шевалле, К. Теория групп Ли [Текст] / К. Шевалле. − М.: Изд-во Ин. Лит, 1948. – Т. 1. – 315 с.
36. Элиот, Дж. Симметрия в физике [Текст] / Дж. Элиот, П. Добер. – М.: Мир, 1983. – т. 1. – 368 с.; т. 2. – 416 с.

Поступила в редколлегию 30.07.2009