

С. А. КОСТРИЦЯ, к.т.н., доцент, ДІТ (Україна);
Б. М. ТОВТ, ДІТ (Україна)

ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДІВ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТУВАННЯ МЕХАНІЧНИХ КОНСТРУКЦІЙ

У статті розглядається питання чисельної реалізації методів математичного програмування в задачах оптимального проектування механічних конструкцій. На базі методу проєкцій градієнта розроблена й апробована методика чисельної оптимізації механічних конструкцій. Виконано аналіз збіжності процесу оптимізації для різних початкових проєктів. Надано рекомендації щодо добору початкових проєктів при чисельній оптимізації.

В статье рассматривается вопрос численной реализации методов математического программирования в задачах оптимального проектирования механических конструкций. На базе метода проекций градиента разработана и апробирована методика численной оптимизации механических конструкций. Выполнен анализ сходимости процесса оптимизации для различных начальных проектов. Даны рекомендации по выбору начальных проектов при численной оптимизации.

In the article the question of numeral realization of methods of the mathematical programming is examined in the tasks of the optimum planning of mechanical constructions. On the base of method of gradient projections the method of numeral optimization of mechanical constructions is developed and approved. The analysis of convergence of optimization process is executed for different initial projects. The recommendation on the choice of initial projects during numeral optimization is given.

Однією з першочергових задач на даному етапі розвитку техніки є задача оптимального проектування механічних конструкцій. Актуальність порушеної проблеми ґрунтується на необхідності економії матеріалів і сировини на стадіях як виготовлення, так і проектування машин. Існує значна кількість першоджерел з питань математичного програмування, теорії та методів оптимізації. Однак проблема чисельної реалізації методів математичного програмування належить до задач оптимального проектування механічних конструкцій досліджена недостатньо. Тому постає питання розробки дієвої процедури чисельної оптимізації у задачах механіки.

Задачу нелінійного математичного програмування у формальній постановці сформулюємо так: знайти такий вектор змінних проектування (проєкт конструкції) $b \in R^k$, який мінімізує функціонал якості

$$\psi_0(b) \quad (1)$$

при заданих обмеженнях

$$\psi_i(b) = 0, i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

$$\psi_i(b) \leq 0, i = n + 1, \dots, m, \quad (3)$$

Для вирішення задачі застосуємо метод проєкцій градієнта (МПП), алгоритм якого базується на тому, що на кожній ітерації функціонал

якості зменшується, а обмеження не порушуються [1, 2].

Основну складність при використанні МПП для оптимізації реальних конструкцій представляє процедура обчислення матриці градієнтів функцій які задають обмеження на змінні проектування і параметри стану конструкції.

Матриця обмежень A має вигляд:

$$A = \left(\frac{\partial \psi(B, Z)}{\partial B} \right)^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial b_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial b_2} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial b_j} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial b_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial b_2} & \dots & \frac{\partial \psi_2}{\partial b_j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_m}{\partial b_1} & \frac{\partial \psi_m}{\partial b_2} & \dots & \frac{\partial \psi_m}{\partial b_j} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

де Z – вектор розмірності m змінних стану; B – вектор розмірності j змінних проектування.

Елементи матриці $\frac{\partial \psi(B, Z)}{\partial B}$ можна знайти шляхом диференціювання аналітичних залежностей обмежень від змінних проектування. Але при оптимізації реальних механічних конструкцій такі залежності одержати практично неможливо, тому пропонується складові елементи матриці обмежень одержувати чисельно

[3]. З цією метою використаємо відомий вираз для обчислення частинних похідних функції багатьох змінних:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial b_k} = \frac{\psi_i(b_1, b_2, \dots, b_k + \Delta b_k, \dots, b_j) - \psi_i(b_1, b_2, \dots, b_k, \dots, b_j)}{\Delta b_k} \quad (5)$$

Визначення значень функції ψ_i виконується розрахунком конструкції за методом скінченних елементів (МСЕ) [4]. А саме: спочатку визначаються напруження σ'_i у елементі, для якого задані обмеження потім, після надання приросту k -му параметру, розрахунок повторюється та визначається напруження σ''_i за зміненого значення k -го параметра.

Складові матриці обмежень визначаються як

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial b_k} = \frac{\sigma''_i - \sigma'_i}{\Delta b_k} \quad (6)$$

З метою якісної оцінки впливу варіацій змінних проектування на цільову функцію використовуються вираз:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial b_k} = \frac{\sigma''_i - \sigma'_i}{\Delta b_k} \cdot \lambda, \quad (7)$$

де λ – нормуючий множник, який обчислюється за виразом:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^m \left(\frac{\sigma''_j - \sigma'_j}{\Delta b_k} \right)^2}} \quad (8)$$

Недоліком такої методики можна назвати необхідність перерахунку конструкції за МСЕ. Проте це нівелюється сучасним рівнем розвитку обчислювальної техніки. Важливою особливістю запропонованої методики є невелика розмірність матриці обмежень. Наприклад, належно до задач механіки деформованого тіла, міцність конструкції за деякого виду навантаження обумовлена міцністю кількох елементів. З цього виходить, що число функцій обмежень за міцністю і розмірність матриці обмежень A будуть невеликі.

Для апробації методики чисельної оптимізації оберемо задачу оптимізації тристрижневої статично невизначеної ферми, яка має аналітичне рішення [1]. Навантаження ферми здійснюється силою $P = 28,3$ кН яка прикладена під кутом $\theta = 45^\circ$ (див. рис. 1).

Метою проектування є вибір площ поперечних перерізів окремих стрижнів b_1 , b_2 і b_3 таким чином, щоб ферма мала найменшу вагу

та задовольнялись обмеження на напруження та розміри стрижнів. Функціонал якості для даної задачі – вага конструкції:

$$\psi_0 = \rho \cdot g \cdot (10\sqrt{2} \cdot b_1 + 10 \cdot b_2 + 10\sqrt{2} \cdot b_3),$$

де $\rho \cdot g$ – питома вага матеріалу, з якого виготовлена ферма.

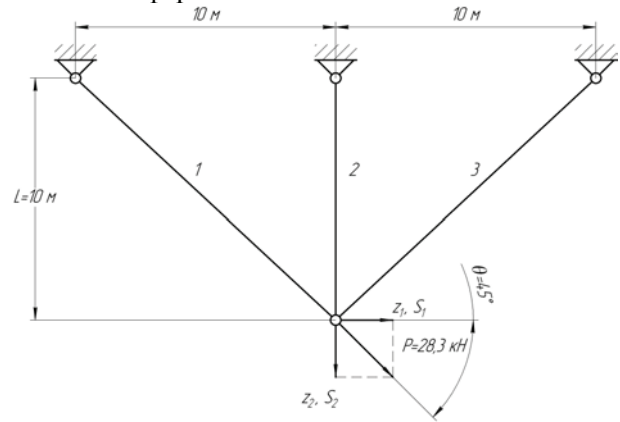


Рис. 1. Тристрижнева ферма

Обмеження на напруження у стрижнях ферми:

$$\begin{aligned} \sigma_1 - [\sigma_1] &\leq 0, \\ \sigma_2 - [\sigma_2] &\leq 0, \\ \sigma_3 - [\sigma_3] &\leq 0. \end{aligned}$$

Обмеження на змінні проектування задамо у вигляді:

$$b_1 > 0, b_2 > 0, b_3 > 0.$$

Задача була вирішена трьома способами:

- ✓ аналітично, за допомогою умов Куна-Таккера;
- ✓ чисельно, МПГ з використанням аналітичних виразів для функцій які задають обмеження на напруження у стрижнях;
- ✓ чисельно, МПГ з використанням запропонованої чисельної процедури визначення градієнтів функцій які задають обмеження на напруження у стрижнях (МПГ сумісно із МСЕ).

Оптимальні проекти та значення функціонала якості, обчислені різними способами наведені у табл. 1.

Як видно з табл. 1, значення цільової функції при чисельній оптимізації є близьким до аналітичного рішення. Менше значення цільової функції для способів чисельної оптимізації пояснюється наявністю заданої, на початку процедури оптимізації, точності визначення функцій активних обмежень і збіжності рішення. За третім способом, як бачимо за вектором оптимального проекту, отримали що середній стрижень матиме дещо більший поперечний переріз, ніж у перших двох ($0,604 \text{ см}^2$ супроти

0,577 см² і 0,518 см²). З боковими нахиленими стрижнями ситуація протилежна (1,082 см² супроти 1,115 см² і 1,134 см²). Результати розв'язку індикаторної задачі підтверджують правиль-

ність запропонованої методики чисельної оптимізації механічних конструкцій за допомогою МПГ сумісно із МСЕ.

Таблиця 1

Оптимальні проекти та значення цільової функції

№	Метод оптимізації	Оптимальний проект b , см ²	Оптимальне значення ψ_0
1	Умови Куна-Таккера	$[1,115 \ 0,577]^T$	3,731
2	МПГ	$[1,134 \ 0,518]^T$	3,725
3	МПГ+МСЕ	$[1,082 \ 0,604]^T$	3,664

Аналіз процесу оптимізації за МПГ сумісно із МСЕ виконано також на прикладі балкового ростверку, розрахункова схема якого зображена на рис. 2.

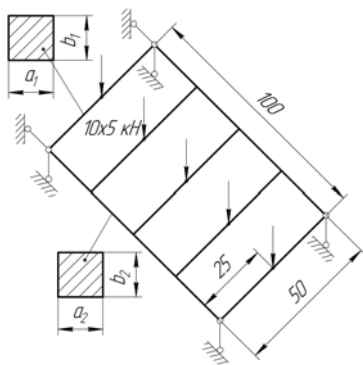


Рис. 2. Балковий ростверк

У якості функціонала якості виступав сумарний об'єм конструкції:

$$\psi_0 = 5 \cdot (50 \cdot a_1 \cdot b_1) + 2 \cdot (100 \cdot a_2 \cdot b_2)$$

де a_1, b_1, a_2, b_2 – змінні проектування (розміри поперечних перерізів балок).

Задача полягала у мінімізації функціонала якості за заданих обмежень на змінні стану і змінні проектування.

Обмеження на змінні стану задавались у вигляді:

$$\sigma_1 - [\sigma] \leq 0,$$

$$\sigma_2 - [\sigma] \leq 0.$$

де $\sigma_i, i=1,2$ – дійсне значення максимального напруження відповідно у поперечних та поздовжніх балках;

$[\sigma]$ – допустиме значення напруження яке приймалось рівним 200 МПа.

Обмеження на змінні проектування приймались у вигляді:

$$a_1 > 0, b_1 > 0, a_2 > 0, b_2 > 0.$$

Для даної механічної системи аналітичні залежності напружень від змінних проектування відсутні. Тому для вирішення цієї задачі застосовано методику чисельної оптимізації за МПГ сумісно із МСЕ.

Для порівняльного аналізу була проведена оптимізація конструкції з двох різних початкових проектів. Один з яких мав балки з прямокутним поперечним перерізом (проект b_1^0), другий – квадратним поперечним перерізом (проект b_2^0):

$$b^0 = [a_1 \ b_1 \ a_2 \ b_2]^T$$

$$b_1^0 = [3 \ 4 \ 3 \ 5,5]^T$$

$$b_2^0 = [3,5 \ 3,5 \ 4,5 \ 4,5]^T$$

Як видно із графіків, зображених на рис. 3 і 4, для прикладу з b_1^0 одержали 51 і 40 % зменшення об'єму матеріалу відповідно у порівнянні із початковим ($\psi_0 = 6300$ см³) і вихідним проектами ($\psi_0 = 5180$ см³) (вихідним називатимемо наступний за початковим проект із активним обмеженнями). Оптимальний проект було досягнуто за 28 ітерацій.

Для прикладу з b_2^0 отримали 56% і 51% вигащ у об'ємі матеріалу відповідно у порівнянні з початковим ($\psi_0 = 7112$ см³) і вихідним проектами ($\psi_0 = 6253$ см³). Конструкцію було оптимізовано за 37 ітерацій. Одержані результати зведено до табл. 2.

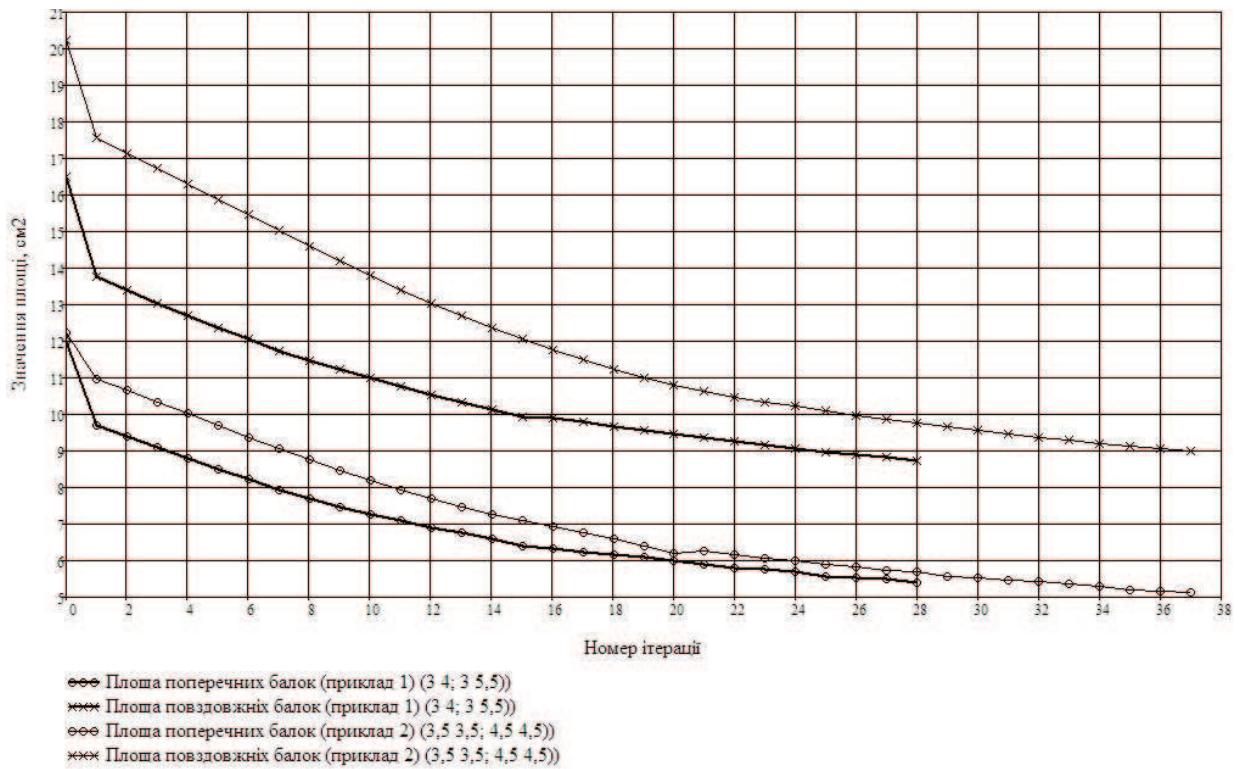


Рис. 3. Графік зміни площ поперечних перерізів балкового ростверку у ході оптимізаційного процесу

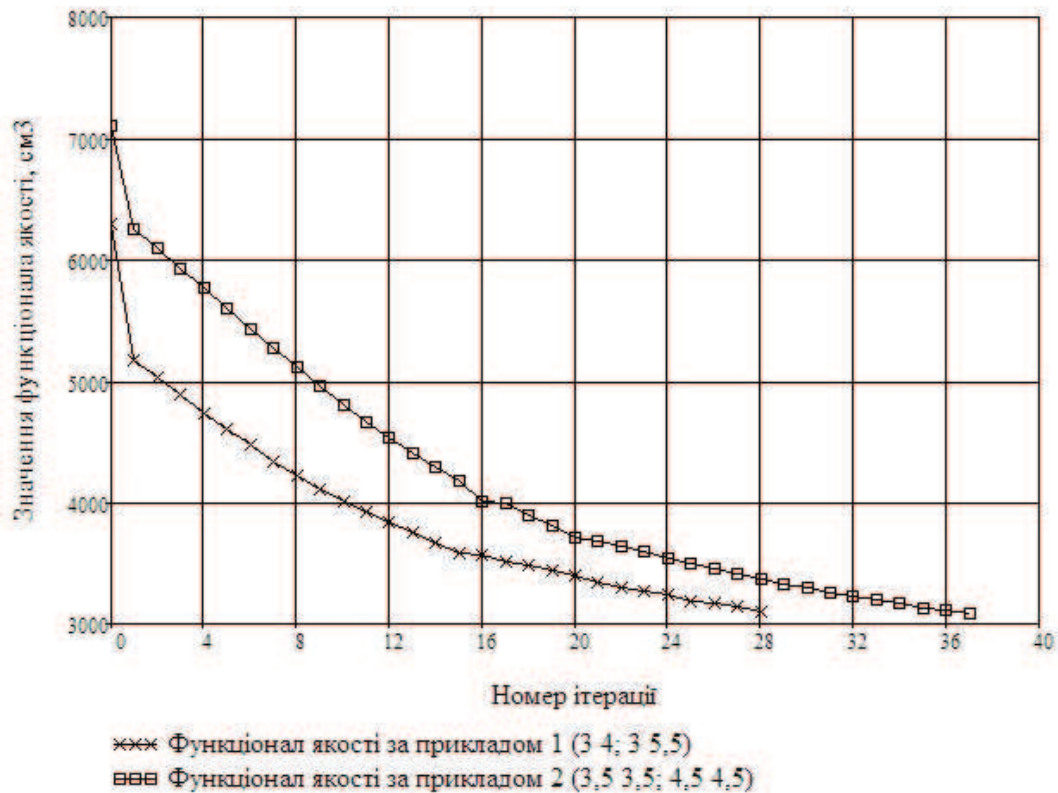


Рис. 4. Графік зміни функціонала якості задачі у ході оптимізаційного процесу

Одержані результати вказують на те, що оптимізаційний процес збігається до оптимального проекту з різних початкових параметрах. Відмітимо, що темп оптимізації падає з наближенням до оптимального проекту (рис. 4). По-

яснюється це особливостями алгоритму оптимізаційної процедури [1]. Слід зауважити, що кількість ітерацій для проекту b_1^0 , з початковою формою перерізу балок у вигляді прямокутника менша, ніж для проекту b_2^0 – з початковою фо-

рмою перерізу балок у вигляді квадрату, причому виграш у кількості обчислень є значним (11 ітерацій). Усе це вказує на те, що на почат-

ку процедури чисельної оптимізації слід особливо уважно підходити до питання добору змінних проектування у початковому проекті.

Таблиця 2

Результати чисельної оптимізації балкового ростверку

№		1		2	
Початковий проект, см		$b_1^0 = [3 \ 4 \ 3 \ 5,5]^T$		$b_2^0 = [3,5 \ 3,5 \ 4,5 \ 4,5]^T$	
Значення цільової функції, см ³	Значення напружень у елементі, МПа	$\psi_0 = 6300$	$\sigma_1 = 156$ $\sigma_2 = 165$	$\psi_0 = 5180$	$\sigma_1 = 175$ $\sigma_2 = 165$
Вихідний проект, см		$b_1^1 = [2,50 \ 3,88 \ 2,52 \ 5,46]^T$		$b_2^1 = [3,21 \ 3,42 \ 4,11 \ 4,27]^T$	
Значення цільової функції, см ³	Значення напружень у елементі, МПа	$\psi_0 = 5180$	$\sigma_1 = 199$ $\sigma_2 = 200$	$\psi_0 = 6253$	$\sigma_1 = 200$ $\sigma_2 = 200$
Оптимальний проект, см		$b_1^{opt} = [0,77 \ 7,00 \ 1,02 \ 8,57]^T$		$b_2^{opt} = [0,70 \ 7,36 \ 1,08 \ 8,33]^T$	
Значення цільової функції, см ³	Значення напружень у елементі, МПа	$\psi_0 = 3103$	$\sigma_1 = 198$ $\sigma_2 = 200$	$\psi_0 = 3087$	$\sigma_1 = 198$ $\sigma_2 = 200$
Відсоткове зменшення функціонала якості		51	40	56	51
Початковий проект	Вихідний проект				
Кількість ітерацій		28		37	

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Хог, Е. Прикладное оптимальное проектирование [Текст] / Е. Хог, Я. Арора. – М.: Мир, 1983. – 480 с.
2. Реклейтис, Г. Оптимизация в технике [Текст] / Г. Реклейтис, А. Рейвиндран, К. Регсдел. – М.: Мир, 1986. – 320 с.
3. Костриця, С. А. Применение МКЭ к задачам оптимального проектирования несущих конст-

- рукций подвижного состава железнодорожного транспорта [Текст] / С. А. Костриця // Вісник Дніпропетр. нац. ун-ту заліз. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – 2003. – № 1. – С. 127-129.
4. Бате, К. Численные методы анализа и метод конечных элементов [Текст] / К. Бате, Е. Вилсон. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.

Надійшла до редколегії 24.07.2009