

М. О. БАБ'ЯК, к.т.н., доцент, Львівська філія ДПТУ (Україна);  
А. Я. КУЛІЧЕНКО, Львівська філія ДПТУ (Україна)

## ДИНАМІКА ВЗАЄМОДІЇ РУХОМИХ КОНТАКТУЮЧИХ ПОВЕРХОНЬ НА ПРИКЛАДІ СТРУМОПРИЙМАЧІВ ЕЛЕКТРОРУХОМОГО СКЛАДУ

Розглянуто процес взаємного переміщення і контактування поверхонь струмоз'ємних елементів пантографа та контактної мережі з урахуванням особливостей впливу, параметрів швидкості та прискорення, визначення яких дозволить математично прогнозувати ступінь зношування контактуючих елементів.

Рассмотрен процесс взаимного перемещения и контактирования поверхностей токосъёмных элементов пантографа и контактной сети с учётом особенностей влияния параметров скорости и ускорения, определение которых позволит математически прогнозировать степень износа контактирующих элементов.

The process of mutual moving and contacting of surfaces of current collecting pantograph elements and contact network is considered taking into account the particularities of influence of speed and acceleration parameters, determination of which will allow to forecast mathematically the wear-out degree of contacting elements.

Механізм взаємного контактування поверхонь струмоз'ємних елементів та струмонесучого дроту є доволі складним за характером і особливістю своєї взаємодії, оскільки у процесі переміщення безпосередня точка контакту здійснює не чітко визначений прямолінійний рух, а переміщується за складною траєкторією. В першу чергу, це пов'язано з необхідністю використання для контакту не вузької смуги поверхні встановлених і закріплених у пантографі струмоз'ємних елементів, а задіяння якомога ширшої зони контактування, що забезпечує тривале ефективне використання цих складових деталей даного механізму.

Дослідження динаміки переміщення контактуючих поверхонь дозволить в комплексі відобразити всю картину і особливості миттєвих зміщень та їх траєкторій для окремих елементів цих двох поверхонь. Адже відомо, що для кожного миттєвого стану руху площини існують особливі криві і точки, які відповідають спеціальним властивостям швидкості та прискорення, встановлення яких дозволить чітко уявити собі процес взаємного тертя і, відповідно, прогнозувати рівень зношування матеріалу контактуючих елементів.

Типовим прикладом визначення траєкторій взаємного переміщення є метод розрахунку за допомогою кругів Бресса – типових кривих другого порядку, хоча в даному випадку вони є побічним результатом загальних висновків, отриманих для кривих  $n$ -го порядку. Крім цього, згідно вказаної методики можна визначити положення особливих точок перетину двох від-

повідних кіл, де вказані точки приймаються для того, щоб задовольнити встановлені умови при синтезі механізму контактування.

Миттєве положення тіла у процесі руху визначається відносно нерухомої системи відліку трьома координатами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  (рис. 1), де з міркувань наступних теоретичних викладок приймаємо, що поверхня струмоз'ємних елементів є нерухомою, а струмонесучий провідник переміщується. Тоді основне точкове перетворення для прийнятої системи координат матиме вигляд:

$$\begin{cases} X = x \cdot \text{Cos}c - y \cdot \text{Sin}c + a; \\ Y = x \cdot \text{Sin}c + y \cdot \text{Cos}c + b. \end{cases} \quad (1)$$

У подальшому теоретичному дослідженні даного процесу будемо використовувати такі позначення:

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{d^k X}{dt^k}; Y_k = \frac{d^k Y}{dt^k}; a_k = \frac{d^k a}{dt^k}; \\ b_k &= \frac{d^k b}{dt^k}; c_k = \frac{d^k c}{dt^k}. \end{aligned} \quad (2)$$

Тимчасовим точковим перетворенням для наведених координатних систем буде:

$$\begin{cases} X_k = l_k x + d_k y + a_k; \\ Y_k = -d_k x - l_k y + b_k, \end{cases} \quad (3)$$

де  $l_k = dk = f(c_1; c_2; c_3; \dots; c_k)$ .

Відомо, що прийняття абсолютних тимчасових співвідношень для координат:

$$(a_k, b_k, c_k), \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n), \quad (4)$$

є необхідним і достатнім, щоб зафіксувати динамічний стан  $n$ -го порядку рухомої площини у даному миттєвому положенні. Як буде наведе-

но далі, вибір координатних систем  $(x, y)$  при цьому є довільним. Це справедливо тоді і лише тоді, коли параметри переміщення (4) перетво-

рені у відповідності із зміною координат. Якщо параметри руху задані, то змінюватись можуть лише  $a$  і  $b$  без відповідної зміни системи (3).

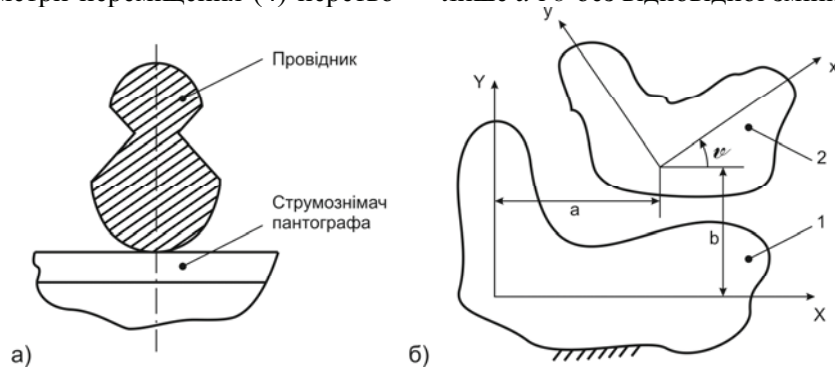


Рис. 1. Схема контактуючих елементів (а) та системи координат (б): 1 – нерухоме тіло; 2 – рухоме тіло

Припускається, що система параметрів руху (4) задана для співпадаючих систем координат ( $a=b=c=0$ ). Таке припущення прийнято згідно результатів спостережень та висновку, що динамічний стан руху відповідає переміщенню 3-го порядку, відображеного наведеним рівнянням (4), в якому  $n = 3$ , або у вигляді:

$$\begin{bmatrix} \dot{a} & \dot{b} & \dot{c} \\ \ddot{a} & \ddot{b} & \ddot{c} \\ \dddot{a} & \dddot{b} & \dddot{c} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

де точками позначено диференціювання по часу.

Згідно з твердженням про рівність співпадаючих систем координат ( $a=b=c=0$ ) рівняння (4) приймають вигляд:

$$\begin{aligned} l_1 &= 0, \quad d_1 = -c_1, \\ l_2 &= -c_1^2, \quad d_2 = -c_2, \\ l_3 &= -3c_1 \cdot c_2, \quad d_3 = c_1^3 - c_3, \\ l_4 &= -4c_1 \cdot c_3 - 3c_2^2 + c_1^4, \\ d_4 &= 6c_1^2 \cdot c_2^2 - c_4. \end{aligned} \quad (6)$$

**Полюси.** Далі можна встановити критерії для полюса  $P_k$   $k$ -го порядку [2], тобто точки, для якої вектор переміщення  $k$ -го порядку буде

$$D_k = \sqrt{X_k^2 + Y_k^2} = 0.$$

Вимагаючи, щоб  $X_k = Y_k = 0$ , отримуємо наступні умови:

$$\left. \begin{aligned} l_k x + d_k y + a_k &= 0; \\ -d_k x + l_k y + b_k &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (7)$$

з яких знаходимо рішення для координат  $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$  полюса  $P_k$ :

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_k &= \frac{b_k d_k - a_k l_k}{l_k^2 + d_k^2}; \\ \bar{y}_k &= -\frac{l_k b_k + a_k d_k}{l_k^2 + d_k^2} \end{aligned} \right\}. \quad (8)$$

Полюси швидкості, прискорення та похідної прискорення визначаються відповідними координатами:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= 0; \quad \bar{y}_1 = 0; \\ \bar{x}_2 &= \frac{\dot{a} - g\dot{b}}{1 + g^2}; \quad \bar{y}_2 = \frac{\dot{b} + g\dot{a}}{1 + g^2}; \end{aligned}$$

$$\bar{x}_3 = \frac{3g \cdot (\ddot{a} + 3\ddot{a}g) + (1-p) \cdot (\ddot{b} + 3\ddot{b}g)}{(1-p)^2 + 9g^2},$$

$$\bar{y}_3 = \frac{3g \cdot (\ddot{b} + 3\ddot{b}g) + (p-1) \cdot (\ddot{a} + 3\ddot{a}g)}{(1-p)^2 + 9g^2},$$

де  $g = \frac{\dot{c}}{c^2}$  та  $p = \frac{\ddot{c}}{c^3}$ .

Миттєвий центр  $P_1$  в полюсі швидкості рухомої площини (рис. 3) визначається рівняннями (8), з яких знаходимо:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_1 &= -\frac{\dot{a}}{\dot{c}} = -\frac{db}{dc} = -b'; \\ \bar{y}_1 &= \frac{\dot{a}}{\dot{c}} = \frac{da}{dc} = a' \end{aligned} \right\},$$

де штрихом позначено диференціювання по незалежному параметру  $c$ .

Нехай координати  $(a, b)$  визначають положення миттєвого центру  $P_1$  в нерухомій площині. Тоді характеристики переміщення миттєвого центру будуть визначатися похідними по часові від  $(a, b)$ . Підставляючи останні рівняння у співвідношення (3) і припускаючи, що  $(X, Y) \geq (a, b)$ , знаходимо складові виразу (5):

$$\begin{aligned} \dot{a} &= 0; \quad \dot{b} = 0; \\ \ddot{a} &= b' \cdot \dot{c}^2 - a' \cdot \ddot{c} + \ddot{a}; \quad \ddot{b} = a' \cdot \dot{c}^2 - b' \cdot \ddot{c} + \ddot{b}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{a} &= \dot{a} \cdot (\dot{c}^3 - \ddot{c}) + 3b' \cdot \dot{c} \cdot \ddot{c} + \ddot{a}; \\ \ddot{b} &= b' \cdot (\dot{c}^3 - \ddot{c}) - 3a' \cdot \dot{c} \cdot \ddot{c} + \ddot{b}.\end{aligned}$$

Систему параметрів руху для співпадаючих координатних систем із спільним початком у миттєвому центрі можна представити у вигляді:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{c} \\ \dot{a} & \dot{b} & \dot{c} \\ \ddot{a} & \ddot{b} & \ddot{c} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Стан руху миттєвого центру у даний момент часу можна визначити, перетворивши рівняння (9) і вирахувавши відповідні похідні по часу. Після цього – отримуємо наступне:

$$\begin{aligned}\dot{a} &= a' \cdot \dot{c} = 0; & \dot{b} &= b' \cdot \dot{c} = 0; \\ \ddot{a} &= a'' \cdot \dot{c}^2 + a' \cdot \ddot{c}; & \ddot{b} &= b'' \cdot \dot{c}^2 + b' \cdot \ddot{c}; \\ \ddot{\ddot{a}} &= a''' \cdot \dot{c}^3 + 3a'' \cdot \dot{c} \cdot \ddot{c} + a' \cdot \ddot{\ddot{c}}; \\ \ddot{\ddot{b}} &= b''' \cdot \dot{c}^3 + 3b'' \cdot \dot{c} \cdot \ddot{c} + b' \cdot \ddot{\ddot{c}}.\end{aligned}$$

Оскільки для площини  $c \neq 0$ , то останні наведені рівняння вимагають, щоб  $a' = b' = 0$ . Решта відмінних від нуля членів даних рівнянь прийматимуть такий вигляд:

$$\begin{aligned}\ddot{\ddot{a}} &= a''' \cdot \dot{c}^2; & \ddot{\ddot{b}} &= b''' \cdot \dot{c}^2; \\ \ddot{\ddot{\ddot{a}}} &= a'''' \cdot \dot{c}^3 + 3a''' \cdot \dot{c} \cdot \ddot{c}; & \ddot{\ddot{\ddot{b}}} &= b'''' \cdot \dot{c}^3 + 3b''' \cdot \dot{c} \cdot \ddot{c}.\end{aligned}$$

Рівняння з (3) є рівняннями переміщення точки в системі координат з початком в положенні  $(a, b)$ .

**Кола полюсів.** Досліджуємо природу вектора  $D_k$  для точок  $A$  на колі радіусу  $r$  навколо  $k$ -го полюса  $P_k$  (рис. 2).

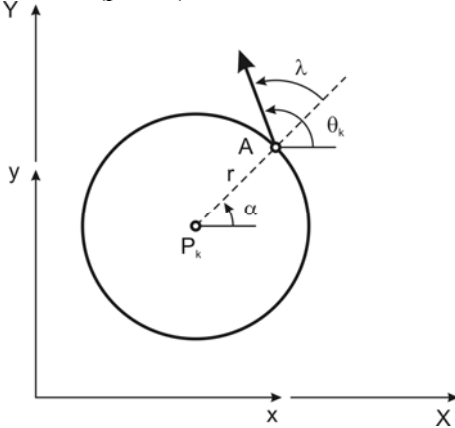


Рис. 2. Схема кола полюса

Координати точки  $A$  на даному колі становитимуть:

$$\begin{cases} x = \bar{x}_k + r \cdot \text{Cos}\alpha; \\ y = \bar{y}_k + r \cdot \text{Sin}\alpha \end{cases}, \quad (11)$$

а значення  $X_k$  та  $Y_k$  приймають вигляд

$$\begin{cases} X_k = l_k \cdot (\bar{x}_k + r \cdot \text{Cos}\alpha) + d_k \cdot (\bar{y}_k + r \cdot \text{Sin}\alpha) + a_k; \\ Y_k = -d_k \cdot (\bar{x}_k + r \cdot \text{Cos}\alpha) + l_k \cdot (\bar{y}_k + r \cdot \text{Sin}\alpha) + b_k \end{cases} \quad (12)$$

Підставляємо залежності із виразів (8) для  $\bar{x}_k$  та  $\bar{y}_k$  і знаходимо:

$$\begin{cases} X_k = r \cdot (l_k \cdot \text{Cos}\alpha + d_k \cdot \text{Sin}\alpha); \\ Y_k = r \cdot (l_k \cdot \text{Sin}\alpha - d_k \cdot \text{Cos}\alpha). \end{cases} \quad (13)$$

Звідси, величина вектора  $D_k$  буде рівною

$$|D_k| = \sqrt{X_k^2 + Y_k^2} = r \cdot \sqrt{l_k^2 + d_k^2} = \text{const}, \quad (14)$$

а напрям його визначається кутом

$$\text{tg}\theta_k = \frac{Y_k}{X_k} = \frac{l_k \cdot \text{Sin}\alpha - d_k \cdot \text{Cos}\alpha}{l_k \cdot \text{Cos}\alpha + d_k \cdot \text{Sin}\alpha}. \quad (15)$$

Важливе значення має кут  $\lambda$  між векторами  $D_k$  та  $P_kA = r$  (див. рис. 2), тангенс якого становить:

$$\text{tg}\lambda = \text{tg}(\theta_k - \alpha) = \frac{\text{tg}\theta_k - \text{tg}\alpha}{1 + \text{tg}\theta_k \cdot \text{tg}\alpha}, \quad (16)$$

або

$$\text{tg}\lambda = \frac{\text{Cos}\alpha \cdot (l_k \text{Sin}\alpha - d_k \text{Cos}\alpha) - \text{Sin}\alpha \cdot (l_k \text{Cos}\alpha + d_k \text{Sin}\alpha)}{\text{Cos}\alpha \cdot (l_k \text{Cos}\alpha + d_k \text{Sin}\alpha) + \text{Sin}\alpha \cdot (l_k \text{Sin}\alpha - d_k \text{Cos}\alpha)} \quad (16a)$$

Згідно з одержаним, приходимо до простого результату:

$$\text{tg}\lambda = -\frac{d_k}{l_k} \neq f(\alpha), \quad (16b)$$

який показує, що вектор  $D_k$  утворює з радіальним вектором  $P_kA = r$  постійний кут  $\lambda$ .

Вираз для полюсного кола швидкості матиме наступний вигляд:

$$V = \dot{c} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = \dot{c} \cdot r_v, \quad (17)$$

де  $r_v$  – радіус кола з центром на початку координат, або (що є тим же самим) в полюсі швидкості  $P_l$  (на рис. 3 це коло позначене буквою  $V$ ). Полюсне коло прискорення описується рівнянням:

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2) \cdot (1 + g^2) - 2x \cdot (a'' - b''g) - \\ - 2y \cdot (a''g + b'') + a^2 + b^2 - \frac{A^2}{\dot{c}^4} = 0,\end{aligned} \quad (18)$$

де  $A = \sqrt{\ddot{X}^2 + \ddot{Y}^2}$  – прийняте коло, на контурі якого сходяться прискорення, так зване «коло сходних прискорень», яке на рис. 4 позначене літерою  $A$ , і радіус якого  $r_A$  розраховується за

формулою  $r_A = \frac{A}{\sqrt{\dot{c}^4 + \dot{c}^2}}$ , а центр має координати

$\left( \frac{a'' - b''g}{1 + g^2}; \frac{a''g + b''}{1 + g^2} \right)$ , які співпадають з

координатами полюса прискорень  $P_2$ .

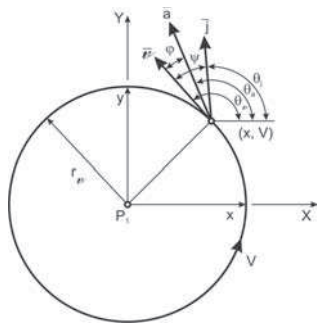


Рис.3. Схема кола з векторами, що характеризують рух

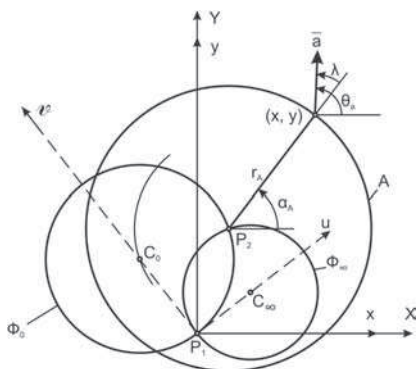


Рис.4. Криві прискорень, які сходяться

Далі розглядаємо окремі випадки контактної взаємодії поверхонь, характерні для даного механізму і динаміки його переміщень.

**Окремі характерні випадки.** Кут  $\lambda_{mn}$  між векторами  $D_m$  та  $D_n$ , де  $k = m, n$  визначається згідно наведених рівнянь (15) та (16):

$$tg\lambda_{mn} = \frac{X_m Y_n - Y_m X_n}{X_m X_n + Y_m Y_n}. \quad (19)$$

В останній вираз підставляємо рівняння (3) і одержуємо наступне розгорнуте рівняння (19а):

$$tg\lambda_{mn} = \frac{(x^2 + y^2) \cdot (l_n d_m - l_m d_n) + x \cdot (a_n d_m + b_n l_m - a_m d_n - b_m l_n) + \dots}{(x^2 + y^2) \cdot (l_n l_m + d_n d_m) + x \cdot (a_m l_n + a_n l_m - b_m d_n - b_n d_m) + \dots} \cdot \frac{y \cdot (a_m l_n + b_n d_m - b_m d_n - l_m a_n) + (a_m b_n - a_n b_m)}{y \cdot (a_m d_n + a_n d_m + b_m l_n + b_n l_m) + (a_n a_m + b_n b_m)}. \quad (19a)$$

Легко помітити, що при сталому значенні  $\lambda_{mn}$  одержане рівняння буде рівнянням кола. Отже, геометричним місцем точок рухомої площини, для яких кут  $\lambda_{mn}$  між векторами  $D_m$  та  $D_n$  має стале значення, буде коло. Крім того, зауважуємо, що полюси  $P_m$  ( $X_m = Y_m = 0$ ) та  $P_n$  ( $X_n = Y_n = 0$ ) задовольняють дані кола.

Кути  $\varphi$  та  $\psi$  між відповідними векторами (див. рис. 3) будуть рівними:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \lambda_{12} = \theta_a - \theta_v; \\ \psi &= \lambda_{13} = \theta_j - \theta_v. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

**а) Другий порядок.** Для кута  $\lambda_{12}$  рівняння (19а) матиме наступний вигляд:

$$tg\varphi = \frac{x^2 + y^2 - a''x - b''y}{g \cdot (x^2 + y^2) + b''x - a''y} \quad (21)$$

і пов'язане з векторами швидкості і прискорення. Тоді його можна привести до вигляду:

$$\Phi = tg\varphi \cdot [g \cdot (x^2 + y^2) + b''x - a''y] - (x^2 + y^2 - a''x - b''y) = 0. \quad (22)$$

Одержане рівняння є рівнянням кола, що проходить через початок координат. На рис. 5 це коло позначене літерою  $\Phi$ . Центр  $C$  цього кола лежить в точці  $(x, y)$  з координатами  $\left( \frac{a'' + b'' \cdot tg\varphi}{2 \cdot (1 - g \cdot tg\varphi)}; \frac{b'' - a'' \cdot tg\varphi}{2 \cdot (1 - g \cdot tg\varphi)} \right)$ , а радіус  $r_\Phi$  цього кола розраховується за наступною формулою:

$$r_\Phi = \frac{\sqrt{(a'' + b'' \cdot tg\varphi)^2 + (b'' - a'' \cdot tg\varphi)^2}}{2 \cdot (1 - g \cdot tg\varphi)}.$$

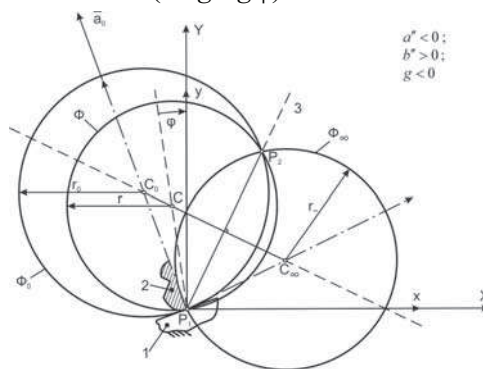


Рис. 5. Пучок окружностей  $\Phi$  для  $g < 0$ ; 1 – нерухома поверхня; 2 – рухома поверхня; 3 – радіальна вісь

Коло  $\Phi$  є кривою сімейства кіл, які характеризуються значенням  $tg\varphi$ . Для випадків, коли  $tg\varphi$  приймає значення 0 або  $\infty$ , рівняння (22) має кола, відомі як кола Бреста, для яких будь-які точки, що обертаються, за умови, що їх дотичне прискорення в даний момент рівне нулю і рівняння цієї кривої відносно полюса, виражене в полярних координатах, є рівнянням кола, яке називають *колом Бреста*. Або по іншому їх ще називають відповідно колом перегину і колом нульового тангенційного прискорення [3].

**б) Кола перегинів (криві нульового нормального прискорення).** Коли  $tg\varphi = 0$ , вектор швидкості і вектор прискорення є колінеарними, тобто коли нормальне прискорення рівне нулю. Це слугує критерієм для точки перегину траєкторії. Щоб отримати геометричне місце таких точок  $(x, y)$ , необхідно прирівняти до нуля чисельник правої частини рівняння (21). Тоді вираз (22) отримує вигляд:

$$\Phi_0 = x^2 + y^2 - a''x - b''y = 0. \quad (23)$$

Це коло перегину помічена літерою  $\Phi_0$  (рис. 5). Радіус цього кола розраховується згідно формули  $r_0 = 0,5 \cdot \sqrt{a''^2 + b''^2}$ , а центр  $C$  перебуває у точці  $(x, y)$  з координатами  $(a''/2; b''/2)$ . Із цілковитою впевненістю можна констатувати, що з точністю до 2-го порядку всі точки кола описують в даний момент (тобто в малому) прямолінійні траєкторії.

**в) Криві нульового тангенційного прискорення.** Коли  $tg\varphi = \infty$ , вектор швидкості і вектор прискорення є взаємно ортогональними, тобто тангенційне прискорення рівне нулю. Це є критерієм для точки, яка переміщується в нерухомій площині  $(X, Y)$  по круговій траєкторії з постійною швидкістю. Щоб отримати геометричне місце таких точок  $(x, y)$ , необхідно прирівняти до нуля знаменник правої частини рівняння (21), після чого вираз (22) отримає вигляд:

$$tg\psi = \frac{3\dot{c} \cdot \ddot{c} \cdot (x^2 + y^2) - x \cdot (a''' \dot{c}^3 + 3a'' \cdot \dot{c} \cdot \ddot{c}) - y \cdot (b''' \dot{c}^3 + 3b'' \cdot \dot{c} \cdot \ddot{c})}{(\ddot{c} - \dot{c}^2) \cdot (x^2 + y^2) + x \cdot (\ddot{b} \cdot \dot{c}^3 + 3b'' \cdot \dot{c} \cdot \ddot{c}) - y \cdot (\ddot{a} \cdot \dot{c}^3 + 3a'' \cdot \dot{c} \cdot \ddot{c})} \quad (25)$$

$$\Psi = (x^2 + y^2) \cdot [3g + (1-p) \cdot tg\psi] - x \cdot [a''' + 3a''g + (b''' + 3b''g) \cdot tg\psi] + y \cdot [-b''' - 3b''g + (a''' + 3a''g) \cdot tg\psi] = 0 \quad (26)$$

Це коло проходить через початок координат і на рис. 6 помічене буквою  $\Psi$ . Центр цього кола розташований у точці  $E$  з координатами:

$$\left. \begin{aligned} x_E &= \frac{a''' + 3a''g + (b''' + 3b''g) \cdot tg\psi}{6g + 2 \cdot (1-p) \cdot tg\psi} \\ y_E &= \frac{b''' + 3b''g - (a''' + 3a''g) \cdot tg\psi}{6g + 2 \cdot (1-p) \cdot tg\psi} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\text{де } g = \frac{\ddot{c}}{\dot{c}^2} \text{ та } p = \frac{\ddot{c}}{\dot{c}^3}.$$

А радіус даного кола буде рівним:

$$r_\Psi = \frac{\sqrt{[a''' + 3a''g + (b''' + b''g) \cdot tg\psi]^2 + [b''' + 3b''g - (a''' + 3a''g) \cdot tg\psi]^2}}{6g + 2 \cdot (1-p) \cdot tg\psi}.$$

Коло  $\Psi$  належить сімейству кривих, які характеризуються значенням  $tg\psi$ . Два екстремальних значення  $tg\psi$  дають пару окружностей, аналогічних екстремальним значенням  $tg\varphi$ .

**д) Крива нульової нульової нормальної складової похідної від прискорення.** Якщо  $tg\psi = 0$ , то похідна від прискорення і швидкість є колінеарними, тобто нормальна складова похідної від прискорення дорівнює нулю. Щоб одержати геометричне місце таких точок  $(x; y)$ , необхідно прирівняти до нуля чисельник правої частини рівняння (25), після чого одержуємо вираз:

$$\Phi_\infty = [g \cdot (x^2 + y^2) + b''x - a''y] = 0, \quad (24)$$

тобто рівняння кривої нульового тангенційного прискорення, яка на рис. 5 позначена літерою  $\Phi_\infty$ . Всі точки розміщені на цьому колі переміщуються так, що їхнє тангенційне прискорення рівне нулю. Радіус цієї кривої визначається згідно наступної формули

$$r_\infty = \frac{1}{2g} \sqrt{a''^2 + b''^2},$$

а її центр  $C_\infty$  лежить в точці  $(x, y)$  з координатами  $(-b''/2g; a''/2g)$ .

**г) Третій порядок.** Для кута  $\lambda_{13}$  рівняння (19 а) отримує вигляд (25) і зв'язане із швидкістю і похідною від прискорення. Після певного математичного перетворення це рівняння одержить форму (26)

$$\Psi_0 = 3g \cdot (x^2 + y^2) - x \cdot (a''' + 3a''g) - y \cdot (b''' + 3b''g) = 0. \quad (28)$$

Одержане рівняння кола є рівнянням кривої нульової нормальної складової похідної прискорення, позначеної на рис. 6 літерою  $\Psi_0$ . Всі точки цього кола переміщуються в даний час, тобто в даний миттєвий відрізок тривалості руху, з сталим нормальним прискоренням. Або говорячи по іншому: нормальне прискорення на дану мить руху є незмінним.



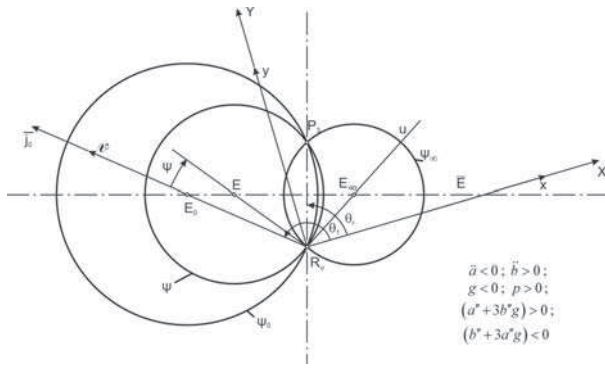


Рис.6. Схема руху третього порядку

Центр  $E_0$  даної кривої  $\Psi_0$  має наступні координати  $\left( \frac{a''' + 3a''g}{6g}; \frac{b''' + 3b''g}{6g} \right)$ , а її радіус –  $r_0 = \frac{\sqrt{(a''' + 3a''g)^2 + (b''' + 3b''g)^2}}{6g}$ .

е) **Крива нульової тангенційної складової похідної від прискорення.** Якщо  $tg\psi = \infty$ , то похідна від прискорення і швидкість є взаємно перпендикулярними, тобто дотична складова від прискорення рівна нулю. Щоб отримати геометричне місце таких точок, прирівнюємо до нуля знаменник правої частини рівняння (25):

$$\Psi_\infty = (1-p) \cdot (x^2 + y^2) - x \cdot (b''' + 3b''g) + y \cdot (a''' + 3a''g) = 0. \quad (29)$$

Наведене рівняння є рівнянням кривої нульової тангенційної складової похідної від прискорення, позначеної на рис. 6 символом  $\Psi_\infty$ . Всі точки даної кривої на даний час рухаються таким чином, що складова прискорення у напрямку швидкості є сталою.

Центр  $E_\infty$  кривої  $\Psi_\infty$  знаходиться у точці з координатами  $\left( \frac{b''' + 3b''g}{2 \cdot (1-p)}; \frac{a''' + 3a''g}{2 \cdot (1-p)} \right)$ , а радіус визначається згідно із залежністю  $r_\infty = \frac{\sqrt{(b''' + 3b''g)^2 + (a''' + 3a''g)^2}}{2 \cdot (1-p)}$ .

**Пучок окружностей.** При зміні  $\lambda_{mn}$  ми одержуємо пучок окружностей [4], які мають радіальні точки в  $P_m$  та  $P_n$ . За умови, що  $\lambda_{mn} = 0$ , чисельник перетворюється в нуль, ми отримуємо коло  $C_{mn}^0 = 0$  (див. рис. 5); коли  $\lambda_{mn} = \pi/2$ , знаменник стає рівним нулю і ми отримуємо коло  $C_{mn}^\infty = 0$ . Сукупність всіх кривих, які належать пучку, залежних від  $\lambda_{mn}$ , визначається наступним рівнянням:

$$K_1 \cdot C_{mn}^\infty + K_2 \cdot C_{mn}^0 = 0, \quad (30)$$

де  $K_1 = tg\lambda_{mn}$ ,  $K_2 = -1$ .

Центри цих окружностей повинні лежати на перпендикулярі до радіальної осі  $P_m P_n$ .

Для стану другого порядку система окружностей, коаксіальних з  $\Phi_0 = 0$  та  $\Phi_\infty = 0$ , складається із множини кривих

$$\Phi = tg\varphi \cdot \Phi_\infty - \Phi_0 = 0.$$

Рівняння радіальної осі має вигляд:

$$R_0 = \Phi_0 - \Phi_\infty = -x \cdot (b'' + a''g) + y \cdot (a'' + b''g) = 0 \quad (31)$$

Центрами  $C$  решти окружностей  $\Phi$  є кінцеві точки лінії  $\bar{C}$ , яка є перпендикулярною до радіальної осі. Таким чином, геометричним місцем центрів  $C$  є лінія  $\bar{C}$ , яка проходить через центри  $C_0$  та  $C_\infty$  (див. рис. 5)

Для стану третього порядку сімейство кривих  $\Psi$  описується рівнянням

$$\Psi = \Psi \cdot tg\psi - \Psi_0 = 0.$$

Рівняння радіальної осі має вигляд:

$$R_\psi = \Psi_0 - \Psi_\infty = 0 \quad (32)$$

і центри  $E$  окружностей  $\Psi$  лежать на лінії  $\bar{E}$ , яка є перпендикулярною до радіальної осі  $R_\psi$ .

### Особливі точки динаміки контактування.

**Точка Болла.** Точка перетину окружності перегину  $\Phi_0$  і кола  $\Psi_0$  нульової нормальній складової похідної від прискорення є особливою точкою в компланарному переміщенні, так званою *точкою Болла*, яку прийнято позначати символом  $B$ . Ця точка характерна тим, що прискорення, а також похідна від прискорення є колінеарними з вектором швидкості. Точка Болла показана на рис. 7.

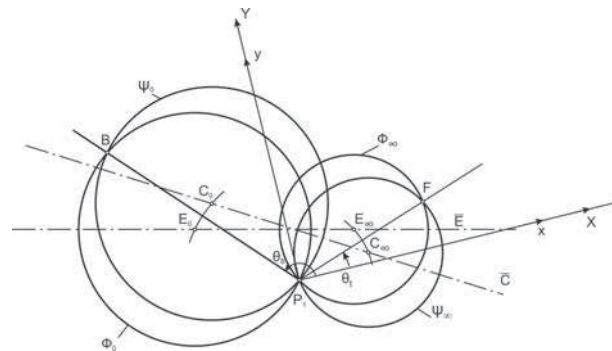


Рис.7. Точки Болла (B) та Джевота (F)

Записуємо основні рівняння окружностей  $\Phi_0$  та  $\Psi_0$ , використовуючи вже наведені залежності (23) та (28):

$$x^2 + y^2 - a''x - b''y = 0, \quad (23 a)$$

$$3g \cdot (x^2 + y^2) - x \cdot (a''' - 3a''g) - y \cdot (b''' + 3b''g) = 0 \quad (28a)$$

Помноживши ліву частину рівняння (23 а) на  $3g$  і віднявши із рівняння (28 а), одержуємо:

$$a'''x + b'''y = 0. \quad (33)$$

Якщо положення полюсного променя, який проходить через точку Болла  $\mathbf{B}$ , визначати кутом  $\theta_B$ , то отримуємо наступне:

$$\operatorname{tg} \theta_B = \frac{y}{x} = -\frac{a'''}{b''}. \quad (34)$$

Координати точки Болла будуть

$$\left( \frac{b''' \cdot (a''b''' - b''a''')}{(a''')^2 - (b''')^2}; \frac{a''' \cdot (b''a'' - a''b''')}{(a''')^2 + (b''')^2} \right).$$

Слід зауважити, що точка Болла є чисто геометричною точкою – в її координатах відсутні члени, які залежать від часу. Крім того, з точністю до третього порядку вона є єдиною точкою, яка здійснює прямолінійне переміщення. Тому траєкторія точки в рухомій площині має хвилеподібний характер.

**Точка Джевота.** Другою особливою точкою вважається точка перетину кривої  $\Phi_\infty$  нульового тангенційного прискорення та кола  $\Psi_\infty$  нульової тангенційної складової, похідної від прискорення. Цю точку називають точкою Джевота, яку на рис.7 позначено символом  $F$ . В цій точці тангенційного прискорення, а також тангенційна складова похідної від прискорення рівні нулю. Рівняння кривих  $\Phi_\infty$  та  $\Psi_\infty$ , згідно вже попередньо наведених рівнянь (24) та (29), мають наступний вигляд:

$$g \cdot (x^2 + y^2) + b''x - a''y = 0, \quad (24 \text{ а})$$

$$(1-p) \cdot (x^2 + y^2) - x \cdot (b''' + 3b''g) + y \cdot (a''' - 3a''g) = 0 \quad (29 \text{ а})$$

Віднявши одне рівняння від іншого, виключаємо члени другого порядку

$$x \cdot (tb'' + gb''') - y \cdot (ta'' + ga''') = 0, \quad (35)$$

де  $t = 3g^2 - p + 1$ .

Визначаючи положення полюсного променя, який проходить через точку Джевота, кутом  $\theta_i$ , одержуємо:

$$\operatorname{tg} \theta_i = \frac{y}{x} = \frac{tb'' + gb'''}{ta'' + ga''}. \quad (36)$$

Координати точки Джевота будуть

$$\left( \frac{a'' \cdot \operatorname{tg} \theta_i - b''}{g \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_i)}; \operatorname{tg} \theta_i \frac{a'' \cdot \operatorname{tg} \theta_i - b''}{g \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_i)} \right).$$

Ця точка характерна тим, що вона єдина, яка переміщується в площині за круговою траєкторією з нульовим тангенційним прискоренням та

нульовою тангенційною складовою похідною від прискорення, тобто вона рухається колом із сталою за величиною швидкістю.

**Висновки.** У процесі взаємного переміщення і безпосереднього контакту поверхні струмом'ємних елементів пантографа з поверхнею струмонесучого провідника, точка контакту проходить у просторі певний шлях за доволі складною траєкторією. Встановлення цієї траєкторії є досить важливим, оскільки це пов'язано з тим, що для кожного миттєвого стану переміщення площин існують особливі криві і точки, які відповідають спеціальним властивостям швидкості та прискорення, встановлення яких дозволить чітко уявити собі процес взаємного тертя і, відповідно, прогнозувати рівень зношування як матеріалу контактуючих елементів, так і струмонесучого провідника.

У наведеному вище дослідженні встановлено, що найбільш важливими випадками порядку  $m$  та  $n$ , які розглядались, є комбінація  $m = 1$ ,  $n = 2$  та  $n = 1$ ,  $m = 3$ . Перша система, яка розглядається за допомогою кругів Бресса, тобто для положення, в яких будь-які точки, що обертаються, за умови, коли їх дотичне прискорення в даний момент дорівнює нулю. Друга система дозволяє йти далі у дослідженні стану переміщення третього порядку, який залежить від часу.

Детально розглянуті п'ять точок системи: полюс швидкості  $P_1$ , полюс прискорення  $P_2$ , полюс похідної прискорення (прискорення другого порядку)  $P_3$ , точка Болла  $\mathbf{B}$ , точка Джевота  $F$ . Одержані величини характеризують стан руху і є важливими точками при вивченні стану переміщення третього порядку.

Наведені рівняння (3), що є рівняннями переміщення контактної точки при взаємному контактуванні двох поверхонь, представлені в системі координат з початком і  $(a, b)$ , що є справедливим для будь-якого іншого розташування початку координат. Підставивши вибрані координати у наведене рівняння (19 а) та провівши наступні математичні перетворення, можна отримати характеристики переміщення даної точки:

$$X = x; \quad Y = y;$$

$$\dot{X} = -y \cdot \dot{c}; \quad \dot{Y} = x \cdot \dot{c}$$

$$\ddot{X} = (-x + a'') \cdot \dot{c}^2 - y \cdot \ddot{c};$$

$$\ddot{Y} = (-y + b'') \cdot \dot{c}^2 + x \cdot \ddot{c};$$

$$\ddot{\ddot{X}} = (y + a''') \cdot \dot{c}^2 + 3 \cdot (-x + a'') \cdot \dot{c} \cdot \ddot{c} - y \cdot \ddot{\ddot{c}};$$

$$\ddot{\ddot{Y}} = (-x + b''') \cdot \dot{c}^2 + 3 \cdot (-y + b'') \cdot \dot{c} \cdot \ddot{c} + x \cdot \ddot{\ddot{c}}.$$

Одержані рівняння (система рівнянь) встановлює особливості характеристики руху до третього порядку для прийнятої точки в даній системі координат.

#### БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Бернштейн, С. А. Очерки по истории строительной механики [Текст] / С. А. Бернштейн. – М.: Госстройиздат, 1957. – 236 с.
2. Александров, В. М. Введение в механику контактных соединений [Текст] / В. М. Александров, М. И. Чебаков. – Р.-на-Д.: Изд-во ООО «ЦВВР», 2007. – 114 с.
3. Филин, А. П. Прикладная механика твердого деформируемого тела [Текст] / А. П. Филин. – М., 1975. – 386 с.
4. Бронштейн, И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов [Текст] / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев – М.: Наука, 1980. – 974 с.
5. Беляев, И. А. Токосъём и токоприёмники электроподвижного состава [Текст] / И. А. Беляев, В. П. Михеев, В. А. Шиян. – М.: Транспорт, 1976. – 184 с.

Надійшла до редколегії 14.07.2009