

ОСНОВИ ЕНЕРГЕТИЧНОГО ПІДХОДУ ДО АНАЛІЗУ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ СИСТЕМИ «КРІПЛЕННЯ – МАСИВ»

В статті наведені теоретичні побудови і практичні положення енергетичного підходу до аналізу напружено-деформованого стану системи «кріплення – масив».

В статье приведены теоретические построения и практические положения энергетического подхода к анализу напряженно-деформированного состояния системы «крепление – массив».

In the article the theoretical constructions and practical statements of energetic approach to the strained-and-stressed state analysis for a system «support – massif» are presented.

З досліджень у області термодинаміки рівноважних і нерівноважних систем [1 – 3] відомо, що поняття енергетичного підходу дуже часто співпадає з термодинамічним підходом, причому підходи іноді ототожнюються. У даній роботі енергетичний і термодинамічний підходи вважаються відмінними один від одного, що виходить з об'єкту, до якого вони прикладаються.

Так, в термодинамічному підході об'єктом є тепло і його зміни, в енергетичному – енергія і її перетворення. Таким чином, в авторському розумінні енергетичного підходу вплив тепла на параметри системи виключається. Дане зауваження слід аргументувати тим, що в системі «підземна споруда – оточуючий масив» тепло має до напружено-деформованого стану (НДС) опосередковане відношення [4, 5] і впливає на нього незначно [4, 6]. Для повноти картини слід зазначити, що термодинамічний підхід одинично застосовувався для процесу деформації ґрунтів [4, 6, 7], але результати цих досліджень не були впроваджені в практику, оскільки дослідження термодинамічних параметрів системи дуже неоднозначне і вимагає розвинутого математичного апарату.

Також слід зазначити, що останнім часом достатньо широко застосовується синергетичний підхід [1, 8, 9], який претендує на загальність його застосування до систем різного типу – від механічних до біологічних і соціальних. Дійсно, синергетичний підхід, заснований на положеннях термодинаміки нерівноважних процесів, проявив себе при дослідженні процесів самоорганізації [1, 9], і багато процесів можуть бути описані за допомогою його концептуального апарату (теорія флуктуацій – біфуркацій, теорія нерівноважних систем Пригожина, нерівноважна динаміка тощо).

Значущість синергетичний підхід отримав у описі нерівноважних нестационарних процесів, тобто процесів з параметрами, що змінюються в часі. Так, реологічні процеси можна характеризувати як нерівноважні і досліджувати за допомогою синергетики, але характер таких досліджень часто є описовим, оскільки її математичний апарат, претендуючи на універсальність, недостатньо розвинутий. У подальших теоретичних побудовах, присвячених деформації глинистих ґрунтів, автор користуватиметься термінологією і концепціями синергетики, розуміючи, що вони зручно описують деякі тимчасові процеси.

У енергетичному, втім, як і термодинамічному підході, але з поправкою на відсутність тепла деформація ґрунтів, елементів конструкції і сумісні деформації в системі «кріплення – масив» розглядаються як зміна об'єму і форми під дією зовнішніх сил.

Під енергетичним підходом в даній роботі розумітимемо сукупність прийомів оперування енергією системи, зокрема енергією деформації, як найважливішим її параметром. Під прийомами оперування енергією системи слід розуміти набір операцій над енергією, таких як її чисельне визначення, порівняння з деякими критеріями, перерозподіл в процесі зміни параметрів системи і так далі. Таким чином, застосування енергетичного підходу є оперування з енергією системи або її частин.

Зміна об'єму і форми (об'ємна деформація і деформація формозміни) є узагальненими координатами, зовнішні сили (тензор напружень) – узагальненими потенціалами.

Відповідно фундаментальне рівняння енергії в загальному випадку деформації (рівняння Гіббса) записується в наступному вигляді, який є класичним рівнянням термодинаміки:

$$dU = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad (1)$$

де dU – питома внутрішня енергія ґрунту (віднесена до одиниці об'єму); σ_{ij} і ε_{ij} – тензори напружень і деформацій відповідно.

На відміну від термодинамічного підходу рівняння Гіббса записане тільки для процесу деформації, вираз для питомої вільної енергії F і питомої енергії Гіббса G записується так [7]:

$$dF = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}; \quad (2)$$

$$dG = -\varepsilon_{ij} d\sigma_{ij}, \quad (3)$$

звідки компоненти тензора напружень і деформацій будуть рівні:

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \right); \varepsilon_{ij} = \left(-\frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \right). \quad (4)$$

Надалі в термодинамічному підході відбувається оперування з характеристичними величинами U , F і G як функціями від тензора σ_{ij} або ε_{ij} . У авторському розумінні енергетичного підходу досить операції з питомою внутрішньою енергією U , яка є універсальним параметром системи, яка деформується.

Останній вислів вимагає серйозного обґрунтування за допомогою системи доказів, причому дана система повинна базуватися на теоретичних і практичних визначеннях НДС і міцності системи.

Найзагальнішою наукою, яка визначає НДС, є механіка твердого тіла, що деформується, або механіка суцільного середовища, оскільки основною концепцією першої є те, що тіло є суцільним середовищем. Основними поняттями механіки суцільного середовища є «напруження» і «деформація», які є відносними характеристиками сили і переміщення. Питома енергія, у свою чергу, є множенням тензорів напружень і деформацій, сполучаючи в собі ці два поняття. Відповідно, робота з одним параметром (U) багато простіше, ніж з двома (σ_{ij} і ε_{ij}), хоча і вимагає відшукування і перемножування останніх. Таким чином, питома енергія U є надбудовою над напруженим і деформованим станом, включаючи їх.

Але визначення НДС не є самоціллю дослідження системи, що деформується, оскільки інформація про неї ще не має статусу, не систематизована і не зв'язана з деяким критерієм, який додає інформації про НДС деяке значення.

Цим критерієм є міцність. Розроблені основи визначення НДС системи вже не викликають ніяких сумнівів, оскільки ґрунтуються на перевіреному практикою фізико-математичному апараті, але саме в процесі визначення міцності, тобто порівняння тензорів σ_{ij} і ε_{ij} з критерієм міцності $[\sigma]$ або $[\varepsilon]$, починаються труднощі, пов'язані з вибором цього критерію.

Не розглядаючи природу визначення міцності детально, слід зазначити однобічність критерію міцності, вибраного або по напруженнях, або по деформаціях, що відображене в більшості ключових робіт в цій області [11 – 14]. Найбільш детально суть критеріїв міцності, також званих теоріями або гіпотезами міцності, розглянута в репрезентативній оглядовій роботі [12], в якій приведена їх класифікація. Детальний розгляд критеріїв міцності, починаючи з їх утворення (перша теорія міцності Галілея) і до сьогоднішніх днів, застосування критеріїв, що базуються тільки на напруженнях або тільки на деформаціях, може вважатися одностороннім, оскільки причиною руйнування є і перші, і другі. Причому, побічно цей факт доводиться нерозривним взаємозв'язком напружень і деформацій (через модуль пружності в узагальненому законі Гука). Найважливішим концептуальним проривом у визначенні міцності є пропозиція Бельтрамі, яка полягала у визначенні енергії деформації, віднесеної до одиниці об'єму. Пропозиція Бельтрамі, вдосконалена Т. Губером і Р. Генки (визначення не всієї енергії деформації, а тільки енергії формозміни) лягло в основу четвертої теорії міцності (енергетичної), яка, втім, в остаточному вигляді формулювалася у вигляді напружень, оскільки знайти критерій міцності по деформаціях для різних матеріалів виявилось складним.

Дослідження енергії в різних варіаціях пропозиції Бельтрамі (енергія формозміни Губера–Генки, енергія формозміни з урахуванням дисипації Рейнера, густина внутрішньої енергії Федорова) є основою енергетичного підходу, використовуваного надалі автором, важливість застосування якого доводиться не тільки теоретичними побудовами, запропонованими вище, але і практикою застосування.

Але практика дослідження міцності будівельних конструкцій, відображена в СНіП і ДБН, не спирається на позиції механіки суцільного середовища. Це виражається у тому, що практичні розрахунки міцності оперують не НДС, а зусиллями і переміщеннями. Розрахунок міцності залізобетонних конструкцій, зокрема, за-

снований на оперуванні моментами і нормальними силами, співвідношення яких порівнюється із значеннями міцності матеріалів. Причиною цього з'явилось те, що практична розрахункова діяльність, спираючись на методи будівельної механіки і опору матеріалів, використовувала стрижньові моделі, невідомими розрахунку яких були моменти і нормальні сили.

Поза сумнівом, для перевірочних розрахунків простих конструкцій розрахунків такого роду достатньо, але для детальних досліджень складних систем їх не вистачає. Таким чином, парадоксальний розрив між теорією і практикою можна виключити, скориставшись положеннями енергетичного підходу.

Висловивши докази в захист енергетичного підходу, слід продовжити його теоретичні побудови. Як вже було сказано, на відміну від термодинамічного, в енергетичному підході система бере участь в ізотермічному процесі деформації, тобто зміна вільної енергії тотожно рівна роботі в процесі деформації ($A = -\Delta F$), то можна записати роботу як

$$A = -\Delta F = -\int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}. \quad (5)$$

Розділяючи роботу по деформації об'єму A_o і форми A_ϕ , можна записати

$$A_o = -\int_0^{\varepsilon_o} \sigma_o \varepsilon_o = -\Delta F_o; \quad (6)$$

$$A_\phi = -\int_0^{\varepsilon_\phi} \tau_\phi \gamma_\phi = -\Delta F_\phi, \quad (7)$$

де σ_o – середнє нормальне напруження; ε_o – середня нормальна деформація; τ_ϕ – середнє дотичне напруження; γ_ϕ – середня дотична деформація.

Декілька складніше виглядають залежності для питомої енергії і роботи у разі пружно-пластичної деформації. Відомо, що при пружно-пластичній деформації $\delta\varepsilon_{ij} = \delta\varepsilon_{ij}^e + \delta\varepsilon_{ij}^p$, де $\delta\varepsilon_{ij}^e$ і $\delta\varepsilon_{ij}^p$ – відповідно незалишкова (пружна) і залишкова (пластична) компоненти загальної деформації, відповідно

$$\delta A = \sum \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \sum \sigma_{ij} (\delta\varepsilon_{ij}^e + \delta\varepsilon_{ij}^p). \quad (8)$$

Відомо, що у разі необоротних рівноважних процесів, тобто не залежних від часу, до яких

відноситься випадок пластичної деформації, частина питомої енергії розсіюється (енергія дисипації), трансформуючись в тепло, тобто $dU = A + Q$, де Q – енергія дисипації (розсіяння).

Остаточно рівняння для енергії дисипації записується в наступному вигляді:

$$\delta Q = dU - \delta A = \left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}^e} - \sigma_{ij} \right) \delta \varepsilon_{ij}^e + \left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}^p} - \sigma_{ij} \right) \delta \varepsilon_{ij}^p + \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right) \delta T. \quad (9)$$

Таким чином, роботу дисипації A^p (роботу при пластичній деформації $\delta A^p = \sum \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}^p$) при пружно-пластичному деформуванні можна визначити як різницю

$$A^p = A - A^e = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} - \int_0^{\varepsilon_{ij}^p} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^e. \quad (10)$$

Як видно, в представленому рівнянні не беруть участь такі важливі термодинамічні характеристики, як температура і ентропія. Прагнення прибрати ці характеристики з рівнянь енергетичного підходу пов'язане не тільки з тим, що температура не має чільної ролі в рівнянні стану і в процесі деформації, але також і з тим, що участь в рівнянні ентропії значно ускладнює їх.

Це пов'язано з тим, що рівняння одержує не цілком ясне фізичне значення, а ентропія є складно вимірюваною величиною, що також відмічене при детальному аналізі ентропійного критерію міцності [12].

Наочніше проілюструвати операції із знаходження енергії (роботи) можна за допомогою діаграм деформації матеріалів (рис. 1, 2).

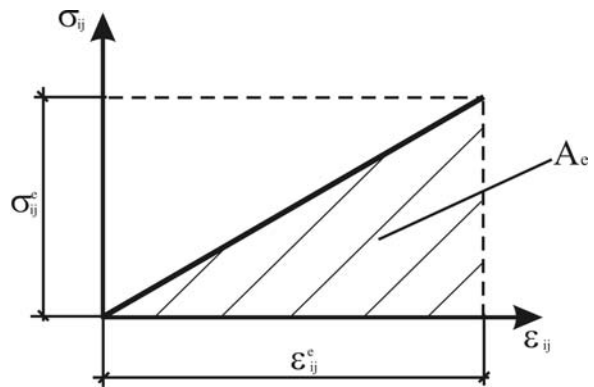


Рис. 1. Діаграма деформування пружного матеріалу із зазначенням роботи деформування

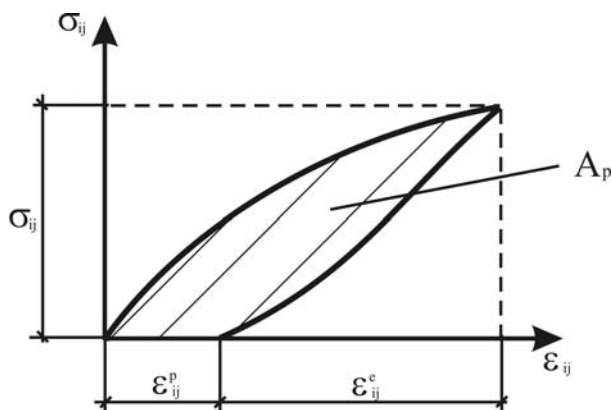


Рис. 2. Діаграма деформування пружно-пластичного матеріалу із зазначенням роботи деформування в пластичній області (енергія дисипації)

З представлених діаграм видно, що питому внутрішню енергію, яка розраховується за формулою (1), можна відобразити геометрично (заштрихована область на рис. 1 – питома робота пружної деформації, на рис. 2 – питома робота пластичної деформації або робота дисипації).

Надалі, остаточно прийнявши процес деформації ізотермічним, терміни «робота» і «енергія» вважаємо тотожними.

Невеликим недоліком діаграми пружно-пластичного деформування (рис. 1) є її отримання тільки після циклу «завантаження – розвантаження», що дозволяє, користуючись принципом суперпозиції деформацій, розділити їх. Недолік легко виправляється шляхом простих математичних операцій по інтегруванню кривої «напруження – деформація» (рис. 3).

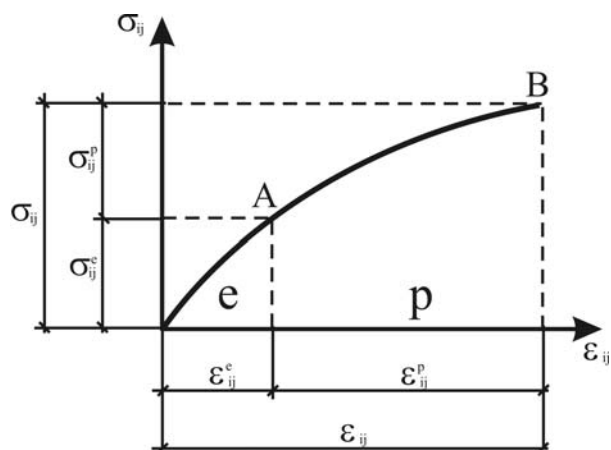


Рис. 3. Типова діаграма деформації глинистого ґрунту (графік Герсеванова)

Таким чином, знаючи перехід з пружного в пластичну деформацію в точці *A* (використавши який-небудь із законів течії) і розділяючи вид деформації без розвантаження, можна за-

писати, виходячи з геометричних параметрів діаграми

$$U = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \int_0^{\varepsilon_{ij}^e} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^e + \int_{\varepsilon_{ij}^e}^{\varepsilon_{ij}^p} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p, \quad (11)$$

або спрощено

$$U = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^e + \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^e + \sigma_{ij}^p) \varepsilon_{ij}^p. \quad (11')$$

Таким чином, представлені теоретичні побудови, що відносяться до енергетичного підходу, доводять те, що енергія є інтегральною характеристикою НДС як споруди, так і масиву. І в той же час енергія є критерієм міцності, по якому можна визначити загальний стан системи.

Стисло основне положення енергетичного підходу можна записати у вигляді

$$U_{\text{НДС}} \leq [U], \quad (12)$$

де $U_{\text{НДС}}$ – енергія, знайдена з розрахунку НДС системи; $[U]$ – розрахункова енергія матеріалу, при перевищенні значення якої відбувається його руйнування.

Таким чином, представлене рівняння є як інтегральним визначенням НДС системи, так і перевіркою її за критерієм міцності.

З'ясувавши закономірності енергії у випадку пружно-пластичної деформації, для повноти картини загальної поведінки глинистого ґрунту слід вивести рівняння енергії у випадку реологічних явищ, зокрема, повзучості. Таким чином, одержані рівняння можна застосовувати для оперування значеннями енергії, що властиво енергетичному підходу.

Запишемо загальну енергію деформації, дотримуючи принцип суперпозиції деформацій:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{общ}} &= \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_p + \mathcal{E}_v = \\ &= \int_0^{\varepsilon_e} \sigma_e \varepsilon_e d\varepsilon + \int_{\varepsilon_e}^{\varepsilon_p} \sigma_p \varepsilon_p d\varepsilon + \int_0^{\varepsilon_v} \sigma_v \varepsilon_v d\varepsilon. \end{aligned} \quad (13)$$

Перші два члени рівняння (13) вже теоретично обґрунтовані і практично реалізовані вище. Слід таким же чином практично вирішити тре-

тю частину рівняння $\mathcal{E}_v = \int_0^{\varepsilon_v} \sigma_v \varepsilon_v d\varepsilon$.

Відомо, що деформації, пов'язані з в'язкою компонентою деформування, залежать від часу.

Застосовуючи принцип суперпозиції деформацій, достатньо легко розділити всі три види

деформацій, викликані різними причинами. Розглядаючи процес повзучості або релаксації, найпростіше одержати кінцеву енергію руйнування, математично рівну множенню постійного напруження на деформацію в момент руйнування (рис. 4):

$$\mathcal{E}_{\text{обш}} = \sigma \varepsilon_v. \quad (14)$$

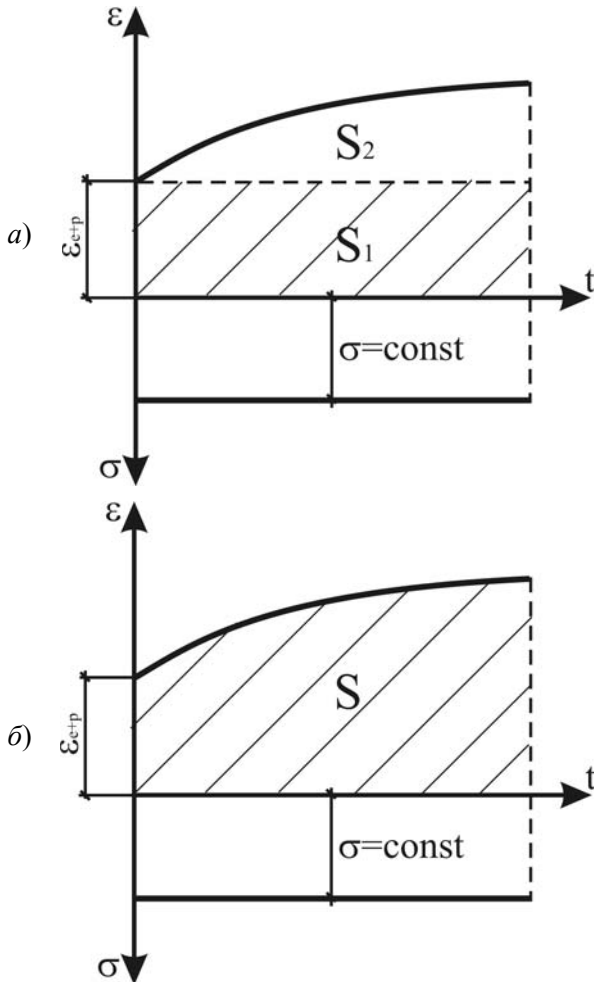


Рис. 4. Геометричне визначення загальної енергії деформації (а) і розділення кривої повзучості для визначення енергії компонент деформації (б)

Відповідно, геометричним значенням даного виразу є перемноження площі S , яку крива повзучості відділяє від осі абсцис (вісь часу t) на постійне напруження $\sigma = \text{const}$ (для умови повзучості, рис. 4, а). Причому, методично правильніше розділити площу S на дві частини: частина, яка відповідає умовно-миттевій пружно-пластичній деформації, і частина, яка відповідає тільки в'язкій деформації ε_v . Тобто, крива перетвориться таким чином (рис. 4, б).

Відповідно, загальну енергію деформації в даному випадку, як і компоненти деформації, можна розділити на дві частини, а енергію

в'язких деформацій можна обчислити як різницю загальної енергії і енергії миттєвих деформацій (природа миттєвих деформацій в цьому випадку неважлива), причому остання є константою:

$$\mathcal{E}_v = \mathcal{E}_{\text{обш}} - \mathcal{E}_{e+p} = \int_0^{\varepsilon_v} \varepsilon_v d\varepsilon - \sigma \varepsilon_{e+p}. \quad (15)$$

Для сімейства кривих повзучості енергію \mathcal{E}_{e+p} можна обчислити після побудови ізохронної кривої при $t = 0$ (рис. 5).

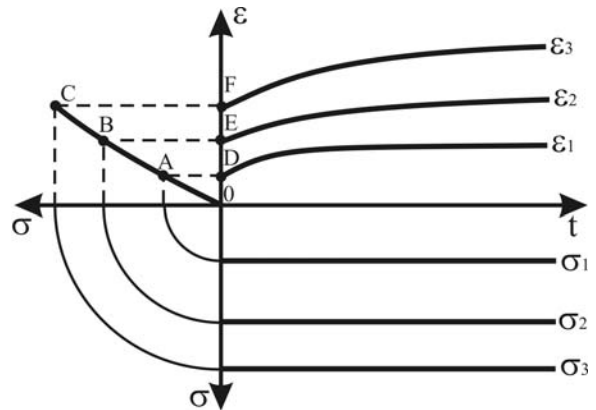


Рис. 5. Схема визначення енергії \mathcal{E}_{e+p} по ізохронній кривій при $t = 0$

Відповідно, площа фігури $0AD$ рівна енергії умовно-миттевої деформації кривої 1, тобто $\sigma_1 \varepsilon_1$, фігура $0BC$ – енергії $\sigma_2 \varepsilon_2$, фігура $0CF$ – енергії $\sigma_3 \varepsilon_3$, причому розділення виду деформації (пружна або пластична) проводиться за запропонованою вище методикою.

Таким чином, енергія в'язкої деформації є геометричним перемноженням площі S_v на постійне напруження (рис. 5) і записується як різниця енергій за формулою (15).

Основним висновком проведеної роботи є розробка теоретичних побудов і практичних положень відшукування енергії деформування, яка є інтегральною характеристикою НДС як споруди, так і масиву, а також критерієм міцності для найбільш загального випадку в'язко-пружно-пластичного середовища.

Причому практичні положення відшукування енергії деформування спираються на лабораторні дослідження, тобто процес пошуку параметрів базується на реальну поведінку елементів системи. Відповідно комплексність оперування енергією деформування від лабораторних дослідження через імітаційне моделювання до подальшого аналізу результатів дозволяє

найбільш математично адекватно описати складні процеси поведінки системи «кріплення – масив».

Практичним впровадженням наданої роботи може бути подальше застосування її положень в розрахункових комплексах, що дозволить більш детально аналізувати стан підземних споруд.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Гленсдорф, П. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций [Текст] / П. Гленсдорф, И. Пригожин. – М.: Мир, 1973. – 280 с.
2. де Гроот, С. Р. Термодинамика необратимых процессов [Текст] / С. Р. де Гроот. – М.: Гос. изд. техн.-теор. лит., 1956. – 280 с.
3. Гухман, А. А. Об основаниях термодинамики [Текст] / А. А. Гухман. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 384 с.
4. Гольдштейн, М. Н. Механические свойства грунтов. Основные компоненты грунта и их взаимодействие [Текст] / М. Н. Гольдштейн. – М.: Стройиздат, 1971. – 375 с.
5. Вялов, С. С. О проблемах реологии грунтов [Текст] / С. С. Вялов // Труды I Всесоюзного симпозиума по реологии грунтов. – Ереван: Изд-во Ереванского ун-та, 1973. – С. 6-25.
6. Гольдштейн, М. Н. Механические свойства грунтов. Напряженно-деформативные и прочностные характеристики [Текст] / М. Н. Гольдштейн. – М.: Стройиздат, 1973. – 304 с.
7. Королёв, В. А. Термодинамика грунтов [Текст] / В. А. Королёв. – М.: Изд-во МГУ, 1997. – 168 с.
8. Лоскутов, А. Ю. Введение в синергетику [Текст]: учебное руководство / А. Ю. Лоскутов, А. С. Михайлов. – М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 272 с.
9. Николис, Г. Самоорганизация в неравновесных системах [Текст] / Г. Николис, И. Пригожин. – М.: Мир, 1979. – 300 с.
10. Безухов, Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести [Текст] / Н. И. Безухов. – М.: Высш. шк., 1961. – 537 с.
11. Малинин, Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести [Текст] / Н. Н. Малинин. – М.: Машиностроение, 1968. – 400 с.
12. Булат-Корнейчук, Е. А. Научные открытия в механике разрушения [Текст] / Е. А. Булат-Корнейчук, В. И. Дырда. – Д.: Нова ідеологія, 2006. – 245 с.
13. Ишлинский, А. Ю. Математическая теория пластичности [Текст] / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М.: Физматлит, 2001. – 701 с.
14. Работнов Ю.Н. Введение в механику разрушения [Текст] / Ю. Н. Работнов. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 80 с.

Надійшла до редколегії 28.11.2009.