

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

У статті викладено результати теоретичних досліджень з метою математичного моделювання планування експериментів. Новим є те, що планування експериментів ведеться одночасно за трьома показниками якості. Цими показниками є міцність з'єднання покриття з основою, зносостійкість та товщина покриття. Розробка математичного моделювання планування експерименту за декількома показниками дає можливість зменшити кількість та вартість експериментів.

В статье представлены результаты теоретических исследований с целью математического моделирования планирования экспериментов. Новым является то, что планирование экспериментов проводится одновременно по трем показателям качества. Этими показателями является прочность сцепления покрытия с основой, износостойкость и толщина покрытия. Разработка математического моделирования планирования эксперимента по нескольким показателям дает возможность уменьшить количество и стоимость экспериментов.

In the article the results of theoretical researches aimed at the mathematical design of planning the experiments are presented. The new is that planning the experiments is conducted simultaneously on three indices of quality. They are coverage-to-basis strength of adhesion, wearproofness and coverage thickness. Development of mathematical design of planning the experiment on a few indices enables decreasing a quantity and cost of experiments.

На даний час у науковому світі методи наукових досліджень умовно можна розділити на теоретичні, теоретико-експериментальні і експериментальні [1]. Теоретичний метод побудований на узагальненні накопиченого досвіду або результатів експериментальних досліджень. Теоретико-експериментальний припускає створення або розвиток теорії з подальшою перевіркою експериментом, уточненням і визначенням необхідних параметрів. Експериментальний – припускає встановлення зв'язку між функціями і аргументами. Даний метод базується на математичному плануванні експериментів, регресійному і дисперсійному аналізі. Другий і третій перелічені методи наукових досліджень тісно зв'язані між собою і часто виступають єдиним цілим. У будь-якому випадку, побудова теорії вимагає експериментального підтвердження. Проте, на даний час проведення експериментів пов'язане з чималими фінансовими витратами і часто вимагає тривалого часу, тому при підготовці до експериментів необхідно використовувати математичний апарат, направлений на мінімізацію кількості експериментів без втрати якості та достовірності результатів.

Як вирішення позначеної проблеми виступає математичне планування експериментів. Існують різні методи планування, що набули широкого поширення в науково-технічній літературі [2]. Метою даної статті є розвиток теорії планування експериментів і застосування до конкретних практичних завдань.

При відновленні деталей за вихідні показники узяті міцність зчеплення $\sigma_{зч}$ покриття зі зношеною поверхнею, зносостійкість і товщина покриття. Ці показники вибрані виходячи з таких міркувань. При будь-якому способі відновлення деталей (за основу взято наплавлення, газотермічне напилення і гальванічні методи нанесення покриттів), міцність зчеплення ϵ , фактично, головним показником якості технологічного процесу. Даний показник безпосередньо впливає на надійність і безпеку експлуатації деталей і вузлів, тому цей показник повинен бути максимальним $\sigma_{зч} \rightarrow \max$. Зносостійкість є найважливішим експлуатаційним показником, оскільки головне завдання зрештою – підвищення ресурсу експлуатації, зниження вартості ремонту деталей, підвищення надійності. Тому цей показник також повинен прагнути до максимуму. Товщина покриття важлива з погляду точності нанесення відновлюючого покриття з урахуванням припусків на механічну (фінішну) обробку, що, у свою чергу, впливає на вартість відновлення деталей. Цей показник повинен розраховуватися перед процесом відновлення деталей, він не прагне ні до максимуму, ні до мінімуму, але при цьому необхідно товщину покриття визначити таким чином, щоб припуск на фінішну обробку був мінімальним, тобто можна сказати, що товщина покриття повинна бути можливо мінімальною.

Таким чином, приходимо до завдання, коли технологічний процес оцінюється за трьома по-

казниками. Розглядаючи теорію планування експерименту і не обмежуючи спільності розгляду, вважатимемо, що кожний із трьох показників необхідно отримати якомога меншим.

Позначимо через x вектор технологічних параметрів, а якість відновлення – через $F_i(x)$, $i = \overline{1,3}$. У математичному плані переходимо до завдання векторної оптимізації

$$\begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ F_3(x) \end{pmatrix} \rightarrow \min \quad (1)$$

за умови $x \in X$, де X – область допустимих значень параметрів технологічного процесу.

Необхідно відзначити, що функції $F_i(x)$, $i = \overline{1,3}$ невідомі, і їх значення при конкретному x можуть бути визначені тільки на підставі відповідного експерименту.

Перш за все, нагадаємо, що множина $X_* \subseteq X$ є рішенням задачі векторної оптимізації (1), якщо будь-яка точка $x_* \in X_*$ є ефективною і будь-які дві точки з X_* незрівняні між собою за Парето.

Значення множини X_* дозволяють в просторі функціоналів $F_i(x)$ побудувати деяку поверхню, що відображає взаємозв'язок між цими трьома показниками.

Основна ідея планування експерименту за трьома показниками полягає в тому, що вибирається деяка початкова точка $x(0) \in X$ і в околиці цієї точки за одним з відомих методів виконується експеримент. За наслідками цього експерименту апроксимуються функції $F_i(x)$, $i = \overline{1,3}$.

Нехай $\tilde{F}_i(x)$, $i = \overline{1,3}$ є функціями апроксимацій, тоді для них розглядається задача:

$$\begin{pmatrix} \tilde{F}_1(x) \\ \tilde{F}_2(x) \\ \tilde{F}_3(x) \end{pmatrix} \rightarrow \min \quad (2)$$

за умови $x \in X$.

Вирішивши цю задачу, отримуємо множину $\tilde{X}_* \subseteq X$, яка з певною точністю є наближенням множини X_* .

Виконаний в околиці точки $x(0)$ експеримент дозволяє оцінити градієнти функцій $F_i(x)$ в даній точці та отримати конус напрямів зменшення всіх трьох функцій.

Вибравши напрямок з даного конуса, обчислюємо наступну точку планування експерименту за формулою

$$x(1) = x(0) + g(0)t, \quad (3)$$

де $\alpha_i > 0$, g_i – напрямки з конуса убунання, вершина якого знаходиться в точці $x(0)$;

t – крок.

Подібна процедура продовжується до тих пір, поки не буде виконано співвідношення:

$$\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3 = 0, \quad (4)$$

де $\alpha_i > 0$, g_i – градієнти, що оцінюються за наслідками експерименту.

Після того, як буде виконано співвідношення (4) по всіх точках даного процесу виконуємо побудову функцій $\tilde{F}_i(x)$, а потім вирішуємо задачу (2).

Щодо невідомих функцій $F_i(x)$, $i = \overline{1,3}$ припускаємо, що вони є квадратичними формами.

Дане припущення дозволяє визначити мінімальне число експериментів. Так, наприклад, якщо технологічний процес визначається двома параметрами x_1 і x_2 , то в загальному вигляді функції $F_i(x)$ мають вигляд:

$$F(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + a_{10}x_1 + a_{02}x_2 + a_{00}.$$

Звідки витікає, що число експериментів повинне бути не меншого шести, щоб можна було визначити коефіцієнти a_{ij} , $i, j = 0, 1, 2$.

У математичному експерименті приймаємо:

$$F_1(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + 100;$$

$$F_2(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 + 200;$$

$$F_3(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 + 300.$$

Вибираємо в якості початкового центру експерименту точку

$$x(0) = [5, 7].$$

З кроком 0,5 будуємо повний факторний план експерименту навколо вибраної точки і отримуємо наступні результати (табл. 1).

На підставі результатів даного експерименту обчислюємо градієнти функцій в точці $x(0)$.

$$g_1(x(0)) = \nabla F_1(x(0)) = (8; 10);$$

$$g_2(x(0)) = \nabla F_2(x(0)) = (4; 10);$$

$$g_3(x(0)) = \nabla F_3(x(0)) = (4; 6).$$

Таблиця 1

№ пор.	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3
1	5,5	7,5	150,5	236,5	318,5
2	5,5	6,5	140,5	226,5	312,5
3	4,5	6,5	132,5	222,5	308,5
4	4,5	7,5	142,5	232,5	314,5

На рис. 1 представлені дані вектора.

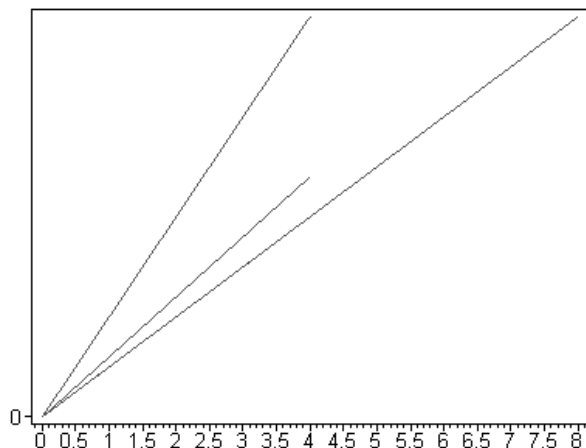


Рис. 1. Розташування градієнтів в початковій точці

Як впливає із значень градієнтів і рис. 1, градієнти $g_1(x(0))$ і $g_2(x(0))$ визначають конус убування всіх функцій F_1, F_2, F_3 .

Вибираємо напрям g переходу в новий центр експерименту таким чином:

$$g = -(g_1(x(0)) + g_2(x(0))) / 2 = (-6; 10).$$

У даному напрямі з кроком 0,5 обчислюємо нову точку центру експерименту $x(1)$:

$$x(1) = x(0) + 0.5g = (2; 2).$$

В околиці точки $x(1)$ виконуємо експеримент, і результати представляємо у вигляді табл. 2.

Таблиця 2

№ пор.	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3
1	2,5	2,5	102,5	200,5	302,5
2	2,5	1,5	102,5	200,5	306,5
3	1,5	1,5	100,5	202,5	308,5
4	1,5	2,5	100,5	202,5	304,5

Значення градієнта в точці $x(1)$ за даними

табл. 2 дорівнюють

$$g_1(x(1)) = (2; 0);$$

$$g_2(x(1)) = (-2; 0);$$

$$g_3(x(1)) = (-2; -4).$$

На рис. 2 представлено взаємне розташування даних векторів.

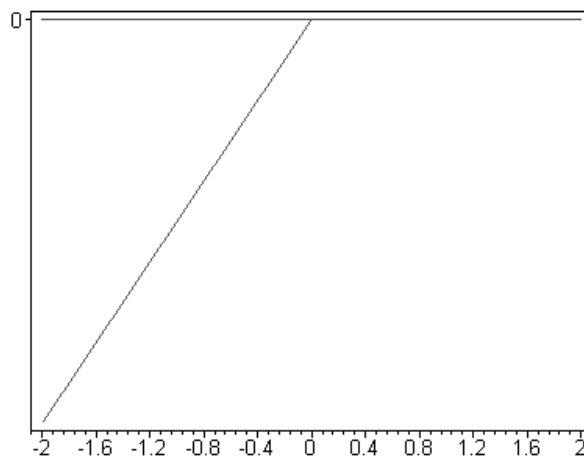


Рис. 2. Розташування градієнтів в наступній точці

За результатами експериментів виконаємо апроксимацію у вигляді квадратичних форм.

На рис. 3, 4, 5 дано графічне представлення результатів апроксимації, а над кожним з рисунків її аналітичний вигляд.

Використовуючи прийняті позначення результати апроксимації можна записати у вигляді

$$\tilde{F}_1 = 105 - 2x_1 - 4x_2 + x_1^2 + 4.6 \cdot 10^{-12} x_1 x_2 + x_2^2;$$

$$\tilde{F}_2 = 213 - 6x_1 - 4x_2 + x_1^2 + 7.25 \cdot 10^{-13} x_1 x_2 + x_2^2;$$

$$\tilde{F}_3 = 325 - 6x_1 - 8x_2 + x_1^2 + 6.6 \cdot 10^{-13} x_1 x_2 + x_2^2.$$

Як впливає з даного уявлення, доданками з добуток x_1, x_2 можна знехтувати і для подальшого аналізу прийняти залежності

$$\tilde{F}_1 = 105 - 2x_1 - 4x_2 + x_1^2 + x_2^2;$$

$$\tilde{F}_2 = 105 - 2x_1 - 4x_2 + x_1^2 + x_2^2;$$

$$\tilde{F}_3 = 325 - 6x_1 - 8x_2 + x_1^2 + x_2^2.$$

По даних залежностях визначаємо межі області рішення задачі (2).

З рівняння

$$\nabla \tilde{F}_1 + \lambda \nabla \tilde{F}_2 = 0 \text{ за умови } \lambda \geq 0$$

отримуємо

$$\begin{pmatrix} -2 + 2x_1 \\ -4 + 2x_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 + 2x_1 \\ -4 + 2x_2 \end{pmatrix} = 0,$$

звідки визначаємо параметричне завдання межі

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1 + 3\lambda}{1 + \lambda}; \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

При $\lambda = 0$ маємо $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, а при $\lambda \rightarrow \infty$ отримуємо $x_1 = 3$, $x_2 = 2$.

Таким чином, відрізок між цими точками складає частину межі множини рішення задачі (2).

Розглянувши рівняння

$$\nabla \tilde{F}_1 + \lambda \nabla \tilde{F}_3 = 0$$

і рівняння

$$\nabla \tilde{F}_2 + \lambda \nabla \tilde{F}_3 = 0,$$

знаходимо решту складових меж множини рішень задачі (2).

На рис. 6 представлено рішення задачі (2)

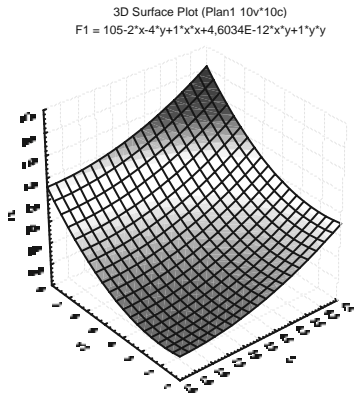


Рис. 3. Апроксимація F_1

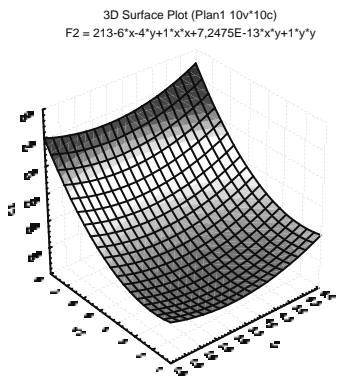


Рис. 4. Апроксимація F_2

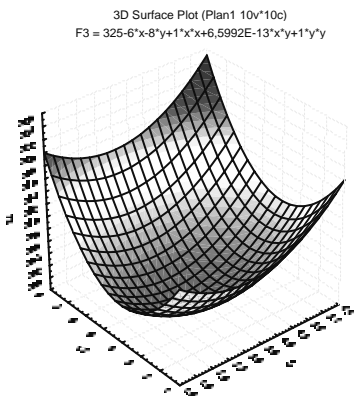


Рис. 5. Апроксимація F_3

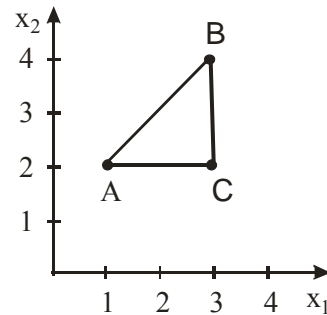


Рис. 6. Геометричне представлення рішення задачі (2)

Точки трикутника ABC є набором раціональних параметрів технологічного процесу. Таким чином, у статті побудовано область допустимих параметрів, з якої необхідно вибирати значення параметрів при реалізації технологічного процесу.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Рыжов, Э. В. Математические методы в технологических исследованиях. [Текст] / Э. В. Рыжов, О. А. Горленко. – К: Наук. думка, 1990. – 184 с.
2. Сулов, А. Г. Научные основы технологии машиностроения [Текст] / А. Г. Сулов, А. М. Дальский. – М.: Машиностроение, 2002. – 684 с.

Надійшла до редколегії 24.12.2008.