

А. С. РАСПОПОВ (ДИИТ)

РАСЧЕТ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ДЕКОМПОЗИЦИИ

Для декомпозиції дво- та тримірних стержневих систем розроблено ефективний алгоритм розділення системи на блоки та відповідна методика кодування станів кожної з підсистем. Показано, що структурний склад багатомірних моделей можна задавати за допомогою просторових матриць на основі дослідження топологічних властивостей графа системи.

Для декомпозиции двух- и трехмерных стержневых систем разработан эффективный алгоритм разделения системы на блоки и соответствующая методика кодирования состояний каждой из подсистем. Показано, что структурный состав многомерных моделей можно задавать с помощью пространственных матриц на основе исследования топологических свойств графа системы.

For decomposition of two- and three-dimensional rod systems the effective algorithm of dividing a system into blocks and the appropriate technique of coding for states of each from subsystems are developed. It is shown that the structure of multi-dimensional models can be set by means of space matrices based on the research of topological properties of the system graph.

Для решения задачи кодирования сложной стержневой системы необходимо выполнить ее декомпозицию на более простые конструктивные части. Каждая конструктивная часть может быть разделена на еще более мелкие подсистемы, размеры которых определяются возможностями кодирования или наличием уже готовых для них решений. В результате получаем несколько уровней q -мерных подсистем, образующих q -мерные цепи [1], для декомпозиции и кодирования состояний которых удобно использовать каскадные алгоритмы [2].

Как правило, каркас сложной системы формируется из набора одно-, двух- и трехмерных элементов. Конструктивные особенности самой системы также могут определять размеры составляющих ее подсистем и структуру их расположения внутри большой системы. В любом случае для уменьшения работы, затрачиваемой на кодирование, число подсистем выбирается минимальным. Если для выделенных подсистем уже определены их характеристики, то каждую из них можно представить в виде «черного ящика» с известными кодами внешних входов и произвольной внутренней структурой.

Например, разделяя трехмерную стержневую систему [5] плоскими сечениями, параллельными плоскости xu , получим p подсистем. Совокупность сечений вдоль плоскости xz выделяет еще mp подсистем. Последующие плоские сечения, ортогональные двум первым, приводят к mtp более мелким подсистемам. Таким образом приходим к разделению задачи

кодирования заданной системы на несколько задач кодирования составляющих ее подсистем, с помощью которых реализуется система в целом. Следуя каскадному алгоритму, процедуры кодирования k -й подсистемы строятся по принципу поэтапного использования входных последовательностей, передаваемых от сопрягаемых подсистем, принадлежащих различным уровням. При этом символами кода последующего уровня (ступени) являются символы кода предыдущей ступени. Очевидно, для подсистем одного уровня возможно использование параллельных процедур кодирования. В результате, переходя от совокупности подсистем первого каскада к последнему, получим набор последовательных кодов, характеризующих состояния всей системы. Применение такого алгоритма позволяет также использовать для трехмерного моделирования существующие двух- и одномерные модели. Соединение кодированных подсистем и получение топологического уравнения системы производим в обратном порядке на основе принципа ортогональности.

Предположим, что имеется $p-1$ система пересекающихся ортогональных балок, соединенных между собой через узловые сечения $(n-1)(m-1)$ упругими стержнями (стойками), параллельными между собой и оси z . В результате декомпозиции такой метасистемы [1] взаимно ортогональными плоскими сечениями, проходящими через центры внутренних пролетов балок каждого из направлений, получим в самом простом случае подсистему из шести стержней [4].

Рассмотрим возможные состояния типовой k -й ($k=1, 2, \dots, p-1$) подсистемы (рис. 1) при последовательном изменении кодов НП, КП стержней 31, 32.

В отличие от плоского случая, изгибные колебания продольных и поперечных балок будут связаны с крутильными или продольными колебаниями ортогональных для них балок.

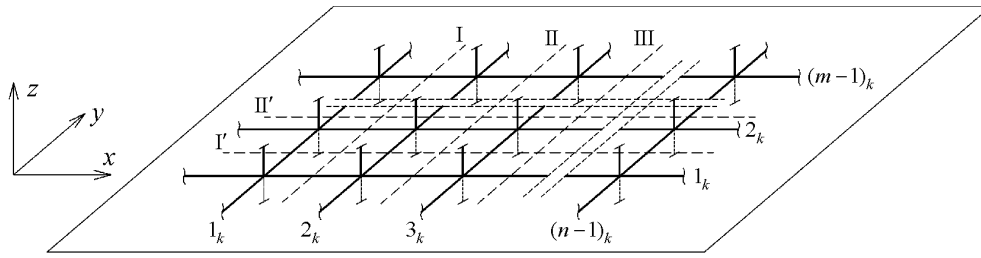


Рис. 1. k -я подсистема трехмерной стержневой конструкции

Как обычно, выделим из k -й системы (рис. 1) j_k -ю подсистему, аналогичную [5], и представим ее графом GR_{yj} , цепочки связанных подграфов $GR_{y1}, GR_{y2}, \dots, GR_{yn-1}$, разделяемых на компоненты ${}^1G_{y1}, {}^2G_{y1}, {}^3G_{\varphi 1}, \dots, {}^1G_{yn-1}, {}^2G_{yn-1}, {}^3G_{\varphi n-1}$ (рис. 2).

Тогда, для любого из промежуточных бло-

ков II, III, ..., $n-2$ можно составить таблицу переходов ART_1 [4], характеризующих состояния стержней 11, 12; 21, 22 и 31, 32 при совместных изгибно-крутильных колебаниях. Возможные состояния подграфов приведены на рис. 9 [5], а соответствующая двумерная матрица $\Omega_{\varphi yz}$ при фиксированных граничных условиях стержней 21, 22 и 31, 32 представлена выражениями [4].

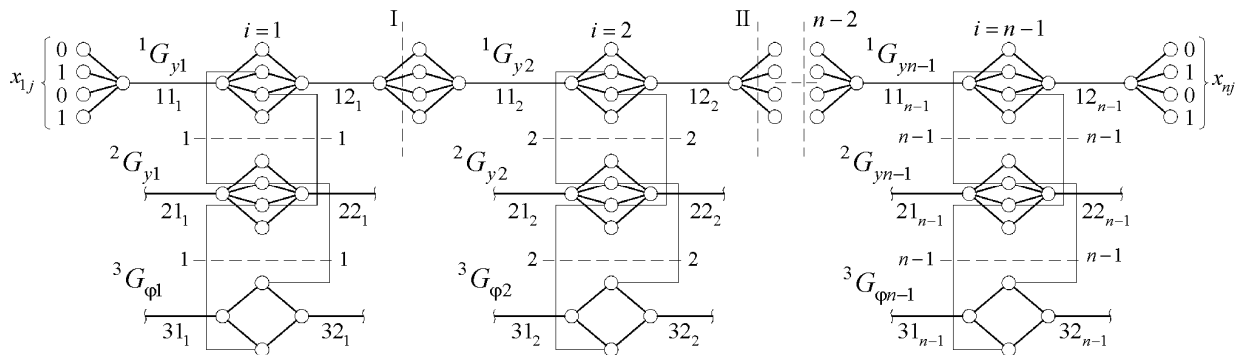


Рис. 2. Граф системы GR_{yj}

Как уже отмечалось [4], элементы матрицы $\Omega_{\varphi yz}$ в соответствии с кодами таблицы переходов соответствуют элементам матрицы Ω_y для изгибных колебаний пересекающихся стержней 11, 12 и 21, 22 в плоскости xu с последовательным их умножением на матрицы w_{31}, w_{32} и w'_{31}, w'_{32} , характеризующие крутильные колебания стержней 31, 32. Поэтому алгоритмы построения пространственных матриц $\Omega_{i_1 i_2 i_3}^{\varphi yz}$ и $\Omega_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{\varphi yz}$ при варьировании кодов НП стержня 21 и КП стержня 22 будет точно таким же, как и для пространственных матриц $\Omega_{i_1 i_2 i_3}^y, \Omega_{i_1 i_2 i_3 i_4}^y$ с

учетом дополнительных множителей w_{31}, w_{32} и w'_{31}, w'_{32} в выражениях для двумерных матриц, образованных соответствующими сечениями ориентации.

Рассмотрим возможные состояния системы [4] при последовательном изменении кодов КП ($k_2 l_2$) стержня 32 – 01 и 10. В этом случае систему, представленную автоматом ART_2 , можно описать пятимерной матрицей [3]

$$\Omega_{i_1 i_2 \dots i_5}^{\varphi yz} = \left\| a_{i_1 i_2 \dots i_5} \right\|, \quad (i_1, \dots, i_4 = 1, 2, \dots, 6; i_5 = 1, 2). \quad (1)$$

Тогда для двумерных матриц, образованных трехкратным сечением ориентации ($i_1 i_2 i_3$) при

фиксированных значениях индексов $i_1 i_2 i_5$ можно записать, например,

- при $i_1 i_2 i_5 = 1$

$$\Omega_{11i_3i_41}^{\text{фyz}} = \left\| M_{y11} M_{y12} \quad M'_{y11} M'_{y12} \right\| \times \left\| \begin{array}{cc} V_{21}^{1100} \tilde{V}_{22}^{0011} & 0 \\ 0 & V_{21}'^{1100} \tilde{V}_{22}'^{0011} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} w_{31} \tilde{w}_{32}^{01} \\ w'_{31} \tilde{w}'_{32}{}^{01} \end{array} \right\|; \quad (2)$$

- при $i_1 = 2, i_2 = 1, i_5 = 2$

$$\Omega_{21i_3i_42}^{\text{фyz}} = \left\| M_{y11} M_{y12} \quad M'_{y11} M'_{y12} \right\| \times \left\| \begin{array}{cc} V_{21}^{1010} \tilde{V}_{22}^{0011} & 0 \\ 0 & V_{21}'^{1010} \tilde{V}_{22}'^{0011} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} w_{31} \tilde{w}_{32}^{10} \\ w'_{31} \tilde{w}'_{32}{}^{10} \end{array} \right\|; \quad (3)$$

или в сокращенной форме

$$\Omega_{i_1 i_2 \dots i_5}^{\text{фyz}} = v_1 v_2 w_3. \quad (4)$$

В выражениях (2), (3) матрицы w_{32} , w'_{32} в соответствии с кодами табл. 2 [4] имеют вид

$$\tilde{w}_{32}^{01} = \left\| \begin{array}{c} \cos \lambda_{\varphi_3} \\ \frac{1}{\beta_3 \lambda_{\varphi_3}} \sin \lambda_{\varphi_3} \end{array} \right\|; \quad \tilde{w}_{32}^{10} = \left\| \begin{array}{c} -\beta_3 \lambda_{\varphi_3} \sin \lambda_{\varphi_3} \\ \cos \lambda_{\varphi_3} \end{array} \right\|; \\ \tilde{w}'_{32}{}^{01} = \frac{\sin \lambda_{\varphi_3}}{\beta_3 \lambda_{\varphi_3}}; \quad \tilde{w}'_{32}{}^{10} = \cos \lambda_{\varphi_3} \quad (5)$$

Можно заметить, что матрицы v_1 , v_2 (4) полностью совпадают с двумерными матрицами, образованными из пространственной матрицы $\Omega_{i_1 i_2 i_3 i_4}^y$ сечением ориентации $(i_1 i_2)$. Поэтому, с учетом (5) несложно также получить остальные выражения для двумерных матриц при различных сочетаниях $i_1 i_2 i_5$ ($i_1, i_2 = 1, 2, \dots, 6; i_5 = 1, 2$).

Аналогично [4] выразим пространственную матрицу $\Omega_{i_1 i_2 \dots i_5}^{\text{фyz}}$ в виде таблицы, в которой четырехмерные сечения отделяются вертикальной линией

$$\Omega_{i_1 i_2 \dots i_5}^{\text{фyz}} = \left\| a_{i_1 i_2 i_3 i_4 1} \mid a_{i_1 i_2 i_3 i_4 2} \right\| \left\| \begin{array}{c} \xrightarrow{(i_5)} \\ \xrightarrow{(i_4)} \\ \xrightarrow{(i_3)} \\ \xrightarrow{(i_2)} \\ \xrightarrow{(i_1)} \end{array} \right\|; \quad (6)$$

В свою очередь, двумерные сечения пространственных матриц $a_{i_1 i_2 i_3 i_4 1}$ и $a_{i_1 i_2 i_3 i_4 2}$ при фиксированных значениях индексов $i_1 i_2$ представляются в уже известной форме [4].

Варьирование кодов НП ($k_1 l_1$) стержня 31 позволяет определить еще одну координату i_6 r -мерного пространства ($r=6$) и составить r -мерную матрицу $\Omega_{i_1 i_2 \dots i_6}^{\text{фyz}}$

$$\Omega_{i_1 i_2 \dots i_6}^{\text{фyz}} = \left\| a_{i_1 i_2 \dots i_6} \right\|,$$

$$(i_1, \dots, i_4 = 1, 2, \dots, 6; i_5, i_6 = 1, 2). \quad (7)$$

Для совокупности элементов двумерной матрицы $\Omega_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6}^{\text{фyz}}$, образованной m -кратным ($m=4$) сечением ориентации $(i_1 i_2 i_5 i_6)$ при фиксированных значениях индексов $i_1 i_2$ и $i_5 i_6$ можно записать, например,

- при $i_1 i_2 i_5 i_6 = 1$

$$\Omega_{11i_3 i_4 11}^{\text{фyz}} = \left\| M_{y11} M_{y12} \quad M'_{y11} M'_{y12} \right\| \times \left\| \begin{array}{cc} V_{21}^{1100} \tilde{V}_{22}^{0011} & 0 \\ 0 & V_{21}'^{1100} \tilde{V}_{22}'^{0011} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} w_{31}^{10} \tilde{w}_{32}^{01} \\ w'_{31}{}^{10} \tilde{w}'_{32}{}^{01} \end{array} \right\|; \quad (8)$$

- при $i_1 i_2 = 6, i_5 i_6 = 2$

$$\Omega_{66i_3 i_4 22}^{\text{фyz}} = \left\| M_{y11} M_{y12} \quad M'_{y11} M'_{y12} \right\| \times \left\| \begin{array}{cc} V_{21}^{0011} \tilde{V}_{22}^{1100} & 0 \\ 0 & V_{21}'^{0011} \tilde{V}_{22}'^{1100} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} w_{31}^{01} \tilde{w}_{32}^{10} \\ w'_{31}{}^{01} \tilde{w}'_{32}{}^{10} \end{array} \right\|. \quad (9)$$

Матрицы w_{31} , w'_{31} в соответствии с кодами табл. 2 [4] преобразуются к виду

$$w_{31}^{10} = \left\| \cos \lambda_{\varphi_3} \quad -\beta_3 \lambda_{\varphi_3} \sin \lambda_{\varphi_3} \right\|;$$

$$w'_{31}{}^{10} = \left\| \frac{1}{\beta_3 \lambda_{\varphi_3}} \sin \lambda_{\varphi_3} \quad \cos \lambda_{\varphi_3} \right\|;$$

$$w_{31}^{10} = \cos \lambda_{\varphi_3}; \quad w'_{31}{}^{01} = \frac{1}{\beta_3 \lambda_{\varphi_3}} \sin \lambda_{\varphi_3}. \quad (10)$$

Используя выражения (10) с приведенными выше (5), а также матрицами, полученными из $\Omega_{i_1 i_2 i_3 i_4}^y$ с помощью сечений ориентации $(i_1 i_2)$ можно составить двумерные матрицы при различных сочетаниях $i_1 i_2 i_5 i_6$ ($i_1, i_2 = 1, 2, \dots, 6; i_5, i_6 = 1, 2$).

По аналогии (6), представим четырехмерные сечения пространственной матрицы $\Omega_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6}^{\text{фyz}}$ в виде

$$\Omega_{i_2 i_3 i_4 i_5 i_6}^{xyz} = \left\| \begin{array}{cc} a_{i_2 i_3 i_4 11} & a_{i_2 i_3 i_4 12} \\ a_{i_2 i_3 i_4 21} & a_{i_2 i_3 i_4 22} \end{array} \right\| \begin{array}{c} \xrightarrow{(i_2)} \\ \xrightarrow{(i_3)} \\ \xrightarrow{(i_4)} \\ \xrightarrow{(i_5)} \\ \xrightarrow{(i_6)} \end{array} \quad (11)$$

Двумерные сечения пространственных матриц, входящих в выражение (11) при фиксированных значениях индексов $i_1 i_2$ представляются в форме [4].

Пространственные матрицы $\Omega_{i_1 \dots i_5}^{xyz}$ и $\Omega_{i_1 \dots i_6}^{xyz}$ для изгибно-продольных колебаний системы пересекающихся балок также представляются в форме (1), (7) с последующим выделением m -мерных сечений (6), (11).

Далее, процедура построения ассоциированных матриц для k -й подсистемы ($k=1, 2, \dots, p-1$) трехмерной стержневой конструкции будет аналогична процедуре составления частотного уравнения для системы пересекающихся балок, расположенных в одной плоскости.

Так, первая подсистема при $k=1$ представляется одномерной матрицей-строкой $V(GRT_1)$, которую можно выразить в виде произведения ассоциированных матриц участков $j=1, 2, \dots, m-1$. В свою очередь, каждая подсистема j описывается произведением ассоциированных матриц участков $i=1, 2, \dots, n-1$

$$V(GRT_1) = V_1(G_{\phi 1}) \prod_{j=2}^{m-2} \Phi_{1\phi j} \tilde{V}_1(G_{\phi m-1}), \quad (12)$$

где $V_1(G_{\phi 1})$, $\tilde{V}_1(G_{\phi m-1})$ – двумерные матрицы для первого ($j=1$) и последнего ($j=m-1$) участков k -й подсистемы ($k=1$), $\Phi_{1\phi j}$ – кубическая матрица промежуточных участков при $j=2, 3, \dots, m-2$:

$$V_1(G_{\phi 1}) = \Omega_{i_2 i_3 i_5}^{\phi 1} \prod_{i=2}^{n-2} \Omega_{i_2 i_3 i_5}^{\phi i} \Omega_{i_3 i_5}^{\phi n-1}; \quad (13)$$

$$\Phi_{1\phi j} = \Omega_{i_2 i_3 i_4 i_5}^{\phi 1} \prod_{i=2}^{n-2} \Omega_{i_1 \dots i_5}^{\phi i} \Omega_{i_3 i_4 i_5}^{\phi n-1}; \quad (14)$$

$$\tilde{V}_1(G_{\phi m-1}) = \Omega_{i_2 i_4 i_5}^{\phi 1} \prod_{i=2}^{n-2} \Omega_{i_2 i_4 i_5}^{\phi i} \Omega_{i_4 i_5}^{\phi n-1}. \quad (15)$$

Для любой из промежуточных подсистем ($k=2, 3, \dots, p-2$) можно составить двумерную матрицу шестого порядка в следующем виде:

$$F_{\phi k} = V_k(G_{\phi 1}) \prod_{j=2}^{m-2} \Phi_{k\phi j} \tilde{V}_k(G_{\phi m-1}), \quad (16)$$

где $V_k(G_{\phi 1})$, $\tilde{V}_k(G_{\phi m-1})$ – кубические матрицы крайних участков ($j=1, j=m-1$) k -й подсистемы, $\Phi_{k\phi j}$ – четырехмерная матрица промежуточных участков ($j=2, 3, \dots, m-2$):

$$V_k(G_{\phi 1}) = \Omega_{i_2 i_3 i_5 i_6}^{\phi 1} \prod_{i=2}^{n-2} \Omega_{i_2 i_3 i_5 i_6}^{\phi i} \Omega_{i_3 i_5 i_6}^{\phi n-1}; \quad (17)$$

$$\Phi_{k\phi j} = \Omega_{i_2 \dots i_6}^{\phi 1} \prod_{i=2}^{n-2} \Omega_{i_1 \dots i_6}^{\phi i} \Omega_{i_3 \dots i_6}^{\phi n-1}; \quad (18)$$

$$\tilde{V}_k(G_{\phi m-1}) = \Omega_{i_2 i_4 i_5 i_6}^{\phi 1} \prod_{i=2}^{n-2} \Omega_{i_2 i_4 i_5 i_6}^{\phi i} \Omega_{i_4 i_5 i_6}^{\phi n-1}. \quad (19)$$

Наконец, для $p-1$ подсистемы одномерная матрица-столбец может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \tilde{V}(GRT_{p-1}) &= \\ &= V_{p-1}(G_{\phi 1}) \prod_{j=2}^{m-2} \Phi_{(p-1)\phi j} \tilde{V}_{p-1}(G_{\phi m-1}), \end{aligned} \quad (20)$$

где $V_{p-1}(G_{\phi 1})$, $\tilde{V}_{p-1}(G_{\phi m-1})$ – двумерные матрицы для первого ($j=1$) и последнего ($j=m-1$) участков ($p-1$)-й подсистемы ($k=p-1$), $\Phi_{(p-1)\phi j}$ – кубическая матрица при значениях $j=2, 3, \dots, m-2$:

$$V_{p-1}(G_{\phi 1}) = \Omega_{i_2 i_3 i_6}^{\phi 1} \prod_{i=2}^{n-2} \Omega_{i_2 i_3 i_6}^{\phi i} \Omega_{i_3 i_6}^{\phi n-1}; \quad (21)$$

$$\Phi_{(p-1)\phi j} = \Omega_{i_2 i_3 i_4 i_6}^{\phi 1} \prod_{i=2}^{n-2} \Omega_{i_2 i_3 i_4 i_6}^{\phi i} \Omega_{i_3 i_4 i_6}^{\phi n-1}; \quad (22)$$

$$\tilde{V}_{p-1}(G_{\phi m-1}) = \Omega_{i_2 i_4 i_6}^{\phi 1} \prod_{i=2}^{n-2} \Omega_{i_2 i_4 i_6}^{\phi i} \Omega_{i_4 i_6}^{\phi n-1}. \quad (23)$$

Анализируя структуру полученных r -мерных матриц, можно отметить некоторые закономерности их образования. Так, ввод в систему дополнительной зависимой переменной или группы зависимых переменных, соответствующих одному из входов автомата, описывающего колебания сложной стержневой системы, добавляет еще одно измерение в евклидово пространство и в структуру матрицы Ω . Отмеченное обстоятельство позволяет

предложить пирамидальный принцип [1] построения пространственных ассоциированных матриц, которые, в отличие от простых конструкций, относятся не к отдельным стержням, а к отдельным блокам или подблокам системы.

В общем случае, подавтомат A , характеризующий состояния промежуточной (внутренней) подсистемы, имеющей r входов, описывается r -мерной пространственной матрицей, порядок которой зависит от числа возможных перестановок кодов соответствующих входных переменных. Уменьшение числа «входов», например для крайних (граничных) подсистем, уменьшает соответственно количество координат r -мерного пространства. При этом r -мерная матрица для всей системы получается в результате последовательного произведения $(r+1)$ - и $(r+2)$ -мерных матриц для образующих ее подсистем. В итоге, на верхнем уровне «пирамиды» стоит скалярная величина, соответствующая некоторой точке евклидова пространства, определяемая произведением векторов, описывающих состояние обособленной замкнутой подсистемы.

В окончательной форме уравнение частот для изгибно-крутильных колебаний трехмерной стержневой системы [5] приводится к виду

$$V(GRT_1) \prod_{k=2}^{p-2} F_{\phi k} \tilde{V}(GRT_{p-1}) = 0. \quad (24)$$

Соответственно представляется частотное уравнение для изгибно-продольных колебаний пространственной стержневой системы

$$V(GRL_1) \prod_{k=2}^{p-2} F_{xk} \tilde{V}(GRL_{p-1}) = 0. \quad (25)$$

Таким образом частотное (топологическое) уравнение пространственной стержневой конструкции можно рассматривать как последовательность одно-, двух-, трех- и т. д. r -мерных матриц, соединенных в одну систему. Следуя отмеченным выше аналогиям, можно отметить пирамидальный принцип построения таких уравнений. На самом верхнем уровне, результирующее уравнение состоит из произведения одно- и двумерных матриц системы.

В качестве примера на рис. 3 приведен график-номограмма изменения частотного параметра λ_{z1} для изгибных колебаний шарнирно-опертых балок, лежащих в плоскости xu , и продольных колебаний ортогональных им балок с заделанными концами, расположенных

вдоль оси z . При прочих равных геометрических, инерционных и жесткостных характеристиках системы, различной принималась лишь относительная жесткость c' на растяжение-сжатие балок, параллельных оси z .

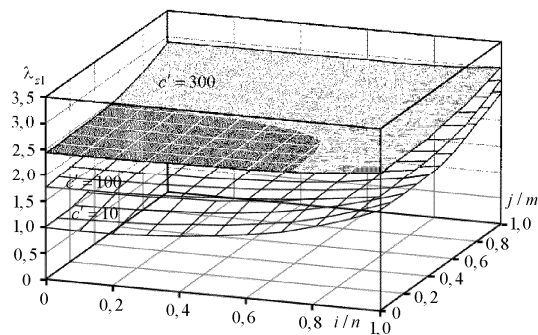


Рис. 3. Значения λ_{z1} для регулярной системы пересекающихся балок

Как видим, частотные поверхности для трехмерных систем во многом аналогичны графикам, полученным для плоских систем пересекающихся балок. Однако количество возможных сочетаний параметров для балок каждого из направлений будет существенно большим.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Крон, Г. Исследование сложных систем по частям (диакоптика) [Текст] / Г. Крон. – М.: Наука, 1972. – 544 с.
2. Кунцманн, Й. Булева алгебра и конечные автоматы [Текст] / Й. Кунцманн, П. Наслин. – М.: Мир, 1969. – 294 с.
3. Соколов, Н. П. Пространственные матрицы и их приложения [Текст] / Н. П. Соколов. – М.: Физматгиз, 1960. – 300 с.
4. Распопов, А. С. Структура пространственных матриц для комбинированных колебаний многомерных стержневых систем [Текст] / А. С. Распопов // Вісн. Дніпропетр. нац. ун-ту заліз. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – 2008. – Вип. 24. – Д.: Вид-во ДНУЗТ, 2008. – С. 139-145.
5. Распопов, А. С. Применение топологических методов к расчету пространственных колебаний двух- и трехмерных стержневых систем [Текст] / А. С. Распопов // Вісн. Дніпропетр. нац. ун-ту заліз. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – 2008. – Вип. 22. – Д.: Вид-во ДНУЗТ, 2008. – С. 117-124.

Поступила в редколлегию 24.12.2008.