

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПОДТОПЛЕНИЯ ТЕРРИТОРИИ

Розроблена чисельна модель розрахунку процесу підтоплення території. Модель базується на рішенні двовимірному рівняння фільтрації. Наводяться результати обчислювального експерименту.

Разработана численная модель расчета процесса подтопления территории. Модель основывается на решении двухмерных уравнений фильтрации. Приводятся результаты вычислительного эксперимента.

A numerical model to calculate the process of ground waters rise has been proposed. The model is based on the 2-D equations of filtration. The results of numerical experiment are presented.

В последнее время большое внимание привлекает проблема подтопления территорий. Существуют различные факторы, действующие, как правило, в сочетании и приводящие к подтоплению. Важнейшим вопросом является прогноз подъема уровня подземных вод с целью оценки масштаба создаваемой угрозы и разработки научно обоснованных защитных мероприятий. Необходимо отметить, что на практике для прогноза изменения уровня грунтовых вод используется в основном два подхода. Первый подход – это применения аналитического решения уравнения фильтрации [2]. Другой подход – это численное моделирование [5]. В настоящей работе рассматривается построение численной модели для решения задач прогноза динамики подземных вод. В основу предлагаемой численной модели положено уравнение нестационарной фильтрации. На базе разработанной численной модели создан пакет прикладных программ, позволяющий оперативно получить информацию об изменении уровня подземных вод.

Разработанный метод расчета адаптирован для решения прикладных задач, поэтому при применении методики используется стандартная гидрогеологическая информация, кроме этого пользователь получает прогнозную информацию в виде, удобном для оперативного анализа и принятия инженерного решения.

### Математическая модель фильтрации

В качестве базового уравнения фильтрации для моделирования процесса подъема подземных вод используется уравнение вида [4, 5]

$$\mu \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x (h - \eta) \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y (h - \eta) \frac{\partial h}{\partial y} \right) + W(t) \delta(x - x_i) \delta(y - y_i),$$

где  $h(x, y, t)$  – превышение свободной поверхности потока над плоскостью сравнения;

$\eta(x, y)$  – превышение водоупора водоносного горизонта над плоскостью сравнения;

$W$  – интенсивность инфильтрации воды в подземный водоносный горизонт;

$\delta(x - x_i)$  – дельта-функция Дирака;

$x_i - y_i$  – координаты точек, где происходит инфильтрация воды.

Разностные уравнения, аппроксимирующие исходное нелинейное уравнение, имеют вид [1, 3]:

- на первом шаге расщепления

$$\frac{h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - h_{i,j}^n}{\Delta t} = A \left( \frac{h_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} \right) + B \left( \frac{h_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}} - h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y^2} \right),$$

где уровень подземных вод на одной из граней разностной ячейки рассчитывается по формуле

$h_{i-1/2,j} = 0,5 \cdot (h_{i,j} + h_{i-1,j})$ . Здесь также использованы следующие обозначения:

$$\eta_{i-\frac{1}{2},j} = 0,5(\eta_{ij} + \eta_{i-1,j}),$$

$$A = \frac{\left( h_{i-1/2,j} - \eta_{i-1/2,j} \right)}{\frac{1}{2k_{ij}} + \frac{1}{2k_{i-1,j}}},$$

$$B = \frac{\left(h_{ij-1/2} - \eta_{ij-1/2}\right)}{\frac{1}{2k_{ij}} + \frac{1}{2k_{ij-1}}};$$

- на втором шаге расщепления разностное уравнение имеет вид

$$\frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t} = C \left( \frac{-h_{i,j}^{n+1} + h_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) + D \left( \frac{-h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right),$$

где  $C = \frac{\left(h_{i+1/2,j} - \eta_{i+1/2,j}\right)}{\frac{1}{2k_{i+1,j}} + \frac{1}{2k_{i,j}}};$

$$D = \frac{\left(h_{i,j+1/2} - \eta_{i,j+1/2}\right)}{\frac{1}{2k_{i,j+1}} + \frac{1}{2k_{i,j}}}.$$

Для реализации этой разностной схемы на каждом шаге по времени строится итерационный процесс, где по найденным значениям напора  $H_{ij}$  пересчитываются коэффициенты  $A, B, C, D$  до установления решения с заданной точностью  $\epsilon$ .

После расчета величины  $h$  определяются компоненты вектора скорости – на гранях разностных ячеек:

$$u_{ij} = k \frac{h_{i,j} - h_{i-1,j}}{\Delta x};$$

$$v_{ij} = k \frac{h_{i,j} - h_{i,j-1}}{\Delta y}.$$

Процесс подтопления может сопровождаться поступлением загрязняющих веществ в подземный поток и их миграцией в этом потоке. Для моделирования процесса переноса загрязняющих веществ используется следующая модель массопереноса [1, 3]:

$$n \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial uC}{\partial x} + \frac{\partial vC}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) - \sum WC \delta(x - x_i) \delta(y - y_i), \quad (1)$$

где  $C$  – концентрация загрязняющего вещества в подземном потоке;  $W$  – интенсивность поступления воды в подземный поток;  $u, v$  – компоненты вектора скорости;  $\delta(x - x_i), \delta(y - y_i)$  – дельта-функция Дирака;  $\mu = (\mu_x, \mu_y)$  – коэффициент дисперсии.

Постановка краевых условий для приведенных уравнений рассмотрена в работе [2].

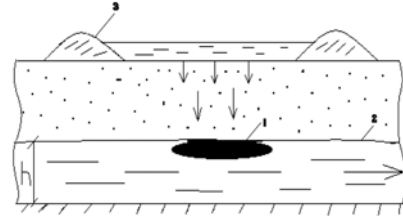


Рис. 1. Схема поступления вод с поверхности земли в подземный поток

### Метод решения уравнения массопереноса

Расчет уравнения массопереноса и фильтрации реализуется на прямоугольной разностной сетке.

Рассмотрим неявную разностную схему расщепления [1, 3], которая положена в основу разработанного алгоритма.

Произведем следующую аппроксимацию производных, входящих в уравнение массопереноса:

$$\frac{\partial C}{\partial t} \approx \frac{C_{ij}^{n+1} - C_{ij}^n}{\Delta t};$$

$$\frac{\partial uC}{\partial x} = \frac{\partial u^+ C}{\partial x} + \frac{\partial u^- C}{\partial x};$$

$$\frac{\partial vC}{\partial y} = \frac{\partial v^+ C}{\partial y} + \frac{\partial v^- C}{\partial y};$$

$$\frac{\partial u^+ C}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j}^+ C_{ij}^{n+1} - u_{ij}^+ C_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x} = L_x^+ C^{n+1};$$

$$\frac{\partial u^- C}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j}^- C_{i+1,j}^{n+1} - u_{ij}^- C_{ij}^{n+1}}{\Delta x} = L_x^- C^{n+1};$$

$$\frac{\partial v^+ C}{\partial y} \approx \frac{v_{i,j+1}^+ C_{ij}^{n+1} - v_{ij}^+ C_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y} = L_y^+ C^{n+1};$$

$$\frac{\partial v^- C}{\partial y} \approx \frac{v_{i,j+1}^- C_{i,j+1}^{n+1} - v_{ij}^- C_{ij}^{n+1}}{\Delta y} = L_y^- C^{n+1},$$

$$u^+ = \frac{u + |u|}{2}; \quad u^- = \frac{u - |u|}{2};$$

$$v^+ = \frac{v + |v|}{2}; \quad v^- = \frac{v - |v|}{2}.$$

Следуя работе [3], компоненты скорости потока  $u$  будем задавать на вертикальных гранях

разностной ячейки, а компоненты скорости  $v$  – на горизонтальных гранях. Вторые производные аппроксимируем так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) &\approx \tilde{\mu}_x \frac{C_{i+1,j}^{n+1} - C_{ij}^{n+1}}{\Delta x^2} - \\ -\tilde{\mu}_x \frac{C_{ij}^{n+1} - C_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} &= M_{xx}^- C^{n+1} + M_{xx}^+ C^{n+1}; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) &\approx \tilde{\mu}_y \frac{C_{i,j+1}^{n+1} - C_{ij}^{n+1}}{\Delta y^2} - \\ -\tilde{\mu}_y \frac{C_{ij}^{n+1} - C_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} &= M_{yy}^- C^{n+1} + M_{yy}^+ C^{n+1}. \end{aligned}$$

В используемых выражениях  $L_x^+$ ,  $L_x^-$ ,  $L_y^+$ ,  $L_y^-$ ,  $M_{xx}^+$ ,  $M_{xx}^-$ ,  $M_{yy}^+$ ,  $M_{yy}^-$  – обозначения разностных операторов.

С учетом этих обозначений разностный аналог уравнения (2) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{C_{ij}^{n+1} - C_{ij}^n}{\Delta t} + L_x^+ C^{n+1} + L_x^- C^{n+1} + \\ + L_y^+ C^{n+1} + L_y^- C^{n+1} + \sigma C_{ij}^{n+1} = \\ = \left( M_{xx}^+ C^{n+1} + M_{xx}^- C^{n+1} + M_{yy}^+ C^{n+1} + M_{yy}^- C^{n+1} \right). \end{aligned}$$

Решение данного разностного уравнения расщепляется на 4 шага при интегрировании на временном интервале  $dt$ :

- на первом шаге  $k = \frac{1}{4}$ :
$$\begin{aligned} \frac{C_{ij}^{n+k} - C_{ij}^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} (L_x^+ C^k + L_y^+ C^k) + \frac{\sigma}{4} C_{ij}^k = \\ = \frac{1}{4} (M_{xx}^+ C^k + M_{xx}^- C^n + M_{yy}^+ C^k + M_{yy}^- C^n); \end{aligned}$$
- на втором шаге  $k = n + \frac{1}{2}$ ,  $c = n + \frac{1}{4}$ :
$$\begin{aligned} \frac{C_{ij}^k - C_{ij}^c}{\Delta t} + \frac{1}{2} (L_x^- C^k + L_y^- C^k) + \frac{\sigma}{4} C_{ij}^k = \\ = \frac{1}{4} (M_{xx}^- C^k + M_{xx}^+ C^c + M_{yy}^- C^k + M_{yy}^+ C^c); \end{aligned}$$
- на третьем шаге  $k = n + \frac{3}{4}$ ,  $c = n + \frac{1}{2}$ :
$$\frac{C_{ij}^k - C_{ij}^c}{\Delta t} + \frac{1}{2} (L_x^+ C^k + L_y^+ C^k) + \frac{\sigma}{4} C_{ij}^k =$$

$$= \frac{1}{4} (M_{xx}^- C^c + M_{xx}^+ C^k + M_{yy}^- C^k + M_{yy}^+ C^c);$$

- на четвертом шаге  $k = n + 1$ ,  $c = n + \frac{3}{4}$ :
$$\begin{aligned} \frac{C_{ij}^k - C_{ij}^c}{\Delta t} + \frac{1}{2} (L_x^- C^k + L_y^- C^k) + \frac{\sigma}{4} C_{ij}^k = \\ = \frac{1}{4} (M_{xx}^- C^k + M_{xx}^+ C^c + M_{yy}^- C^c + M_{yy}^+ C^k). \end{aligned}$$

В данные разностные соотношения входит «возмущенный» коэффициент дисперсии  $\tilde{\mu}$  [3].

Преимуществом данной схемы расщепления является то, что на каждом дробном шаге неизвестное значение концентрации загрязняющего вещества определяется по методу бегущего счета. Разностная схема является абсолютно устойчивой на каждом дробном шаге и легко программируется.

### Практическая реализация

Рассмотренная численная модель является универсальной и может быть применена для решения различных задач, связанных с процессом подтопления. Рассмотрим применение этой модели для решения достаточно сложной с практической точки зрения задачи – подъем грунтовых вод при орошении. Сложность решения этой задачи состоит в том, что подача воды на грунт осуществляется неравномерно при орошении, т.е. подпитка подземного потока происходит в различное время на различных участках. На практике для расчета возможного уровня поднятия грунтовых вод на величину  $dh$  используется формула Шестакова:

$$dh = \frac{W t}{\mu}.$$

Недостатком данной формулы является то, что при прогнозе не учитывается процесс растекания бугра под участком орошения. С помощью разработанной численной модели можно задавать те участки, где имеет место подача воды на грунт и те участки, где такая подача прекратилась. Модель позволяет задавать режим подачи воды, т.е. когда началась подача, когда закончилась, интенсивность подачи в течение полива. Расчет был выполнен при следующих исходных данных: размеры расчетной области 1500 x 12600 м; размеры участка орошения 4200 x 2400 м; активная пористость 0,3; коэффициент фильтрации подземного водоносного горизонта 30 м/сут; глубина подземного

потока в начале расчетной области 16 м, а в конце – 12 м; интенсивность инфильтрации 0,001 м/сут;  $\eta = 0$ . Рассматривалось решение модельной задачи. Подача воды осуществлялась в течение 5 суток, затем перерыв 5 суток, снова подача в течение 5 суток, перерыв 10 суток, подача воды в течение 5 суток, далее перерыв – 300 суток и снова цикл повторяется. Результаты прогноза изменения глубины подземного потока под участком орошения следующие (сечение  $Y = 660$  м):

Перед началом орошения:

$$X = 2700 \text{ м} \quad h = 15,35 \text{ м}$$

$$X = 4500 \text{ м} \quad h = 14,86 \text{ м}$$

$$X = 5700 \text{ м} \quad h = 14,53 \text{ м}$$

$$X = 6900 \text{ м} \quad h = 14,19 \text{ м}$$

Через 70 суток после начала полива:

$$X = 2700 \text{ м} \quad h = 15,35 \text{ м}$$

$$X = 4500 \text{ м} \quad h = 14,92 \text{ м}$$

$$X = 5700 \text{ м} \quad h = 14,76 \text{ м}$$

$$X = 6900 \text{ м} \quad h = 14,42 \text{ м}$$

Через год:

$$X = 2700 \text{ м} \quad h = 15,41 \text{ м}$$

$$X = 4500 \text{ м} \quad h = 15,09 \text{ м}$$

$$X = 5700 \text{ м} \quad h = 14,81 \text{ м}$$

$$X = 6900 \text{ м} \quad h = 14,44 \text{ м}$$

Через 4 года:

$$X = 2700 \text{ м} \quad h = 15,47 \text{ м}$$

$$X = 4500 \text{ м} \quad h = 15,21 \text{ м}$$

$$X = 5700 \text{ м} \quad h = 14,95 \text{ м}$$

$$X = 6900 \text{ м} \quad h = 14,57 \text{ м}$$

Как видно из представленных результатов, динамика изменения глубины подземного потока под участком орошения характеризуется постоянным увеличением этой величины. Видно, что в среднем за 4 года уровень грунтовых вод под участком может подняться на величину порядка 0,3 метра. Такое незначительное по-

вышение можно объяснить в частности тем, что водоносный горизонт имеет достаточно большой коэффициент фильтрации и происходит быстрое растекание воды, поступившей в подземный поток.

### Выводы

Разработана численная модель прогноза динамики подземных вод, на основе которой можно прогнозировать процесс подтопления территории. Модель использует стандартную гидрогеологическую информацию и позволяет получить прогнозную информацию в течение 3...5 минут. Модель может быть использована для обоснования инженерных решений по защите территорий от подтопления. Дальнейшее совершенствование модели следует осуществлять в направлении ее развития для решения трехмерных задач.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Беляев, Н. Н. Компьютерное моделирование динамики движения и загрязнения подземных вод [Текст] / Н. Н. Беляев, Е. Д. Коренюк, В. К. Хрущ. – Д.: Наука и образование, 2001. – 156 с.
2. Основы гидрогеологических расчетов [Текст] / Ф. М. Бочеввер и др. – М.: Недра, 1965. – 305 с.
3. Численное моделирование распространения загрязнения в окружающей среде [Текст] / М. З. Згуровский и др. – К.: Наук. думка, 1997. – 368 с.
4. Полубаринова-Кочина, П. Я. Математические методы в вопросах орошения [Текст] / П. Я. Полубаринова-Кочина, В. Г. Пряжинская, В. Н. Эмих. – М.: Наука, 1969. – 414 с.
5. Охрана подземных вод в условиях техногенеза [Текст] / Н. С. Огняник и др. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1985. – 221 с.

Поступила в редколлегию 25.12.2008.