УДК 624.044

И. К. БАДАЛАХА (ДИИТ)

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ОТ ПОГОННОЙ ЛИНЕЙНОЙ НАГРУЗКИ, ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА ОГРАНИЧЕННОМ И НЕОГРАНИЧЕННОМ ПРОТЯЖЕНИИ ЕГО ПОВЕРХНОСТИ

У статті наведено результат рішення задачі напружено-деформованого стану пружного півпростору від дії навантаження, рівномірно розподіленого по лінії, з використанням нетрадиційної лінійної залежності деформацій від напруженого стану, відмінної від узагальненого закону Гука.

В статье приведен результат решения задачи о напряженно-деформированном состоянии упругого полупространства от действия нагрузки, равномерно распределенной по линии, с использованием нетрадиционной линейной зависимости деформаций от напряженного состояния, отличной от обобщенного закона Гука.

The article shows the result of solving the problem of stress-strain state of an elastic half-space because of the load action that uniformly distributed over the line, with the use of untraditional linear dependence of deformations on stressed state that is different from the generalized Hooke's law.

В работах [1, 2] изложены основные предпосылки к решению задач о напряженно-деформированном состоянии в упругой среде, базирующиеся на раздельном определении деформированного состояния от сдвиговых деформаций, вызванных разностью давлений в различных точках, и от объемных деформаций, вызванных величиной давления в среде. При этом в качестве давления служит одна треть функции суммы нормальных напряжений по трем ортогональным площадкам (первый инвариант напряженного состояния):

$$\sigma = \frac{1}{3}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right). \quad (1)$$

В результате раздельно определяются перемещения, соответствующие тензору сдвиговых деформаций и тензору объемных деформаций:

$$U^{\text{c}};\ V^{\text{c}};\ W^{\text{c}}; \quad (2)$$

$$\text{и}\ \ U^0;\ V^0;\ W^0. \quad (3)$$

Компоненты полных перемещений являются алгебраической суммой сдвиговых и объемных перемещений:

$$U = U^{\text{c}} + U^0; \quad V = V^{\text{c}} + V^0; \quad W = W^{\text{c}} + W^0. \quad (4)$$

Там же приведены результаты решения задачи о напряженно-деформированном состоянии упругого полупространства, загруженного направленной под любым углом к его поверхности сосредоточенной силой. Для случая действия силы P, направленной по нормали к его поверхности, компоненты напряжений будут:

$$\sigma_x = \frac{3P}{2\pi}\cdot\frac{x^2 z}{R^5}; \quad (5)$$

$$\sigma_y = \frac{3P}{2\pi}\cdot\frac{y^2 z}{R^5}; \quad (6)$$

$$\sigma_z = \frac{3P}{2\pi}\cdot\frac{z3}{R^5}; \quad (7)$$

$$\tau_{xy} = \frac{3P}{2\pi}\cdot\frac{x\cdot y\cdot z}{R^5}; \quad (8)$$

$$\tau_{yz} = \frac{3P}{2\pi}\cdot\frac{y\cdot z^2}{R^5}; \quad (9)$$

$$\tau_{zx} = \frac{3P}{2\pi}\cdot\frac{x\cdot z^2}{R^5}. \quad (10)$$

Функция давления имеет вид:

$$\sigma = \frac{1}{3}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right) = \frac{P}{2\pi}\frac{z}{R^3}. \quad (11)$$

Компоненты сдвиговых перемещений в любой задаче определяются из зависимостей:

$$U^{\text{c}} = \kappa^{\text{c}}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial x}; \quad (12)$$

$$V^{c}=\kappa^{c}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial y};\tag{13}$$

$$W^{c}=\kappa^{c}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial z},\tag{14}$$

в которых κ^{c} (м^4/н) – модуль сдвигового смещения среды (физическая константа).

Перемещения от изменения плотности параллельны направлению действия внешней силы. В случае, когда сила действует по нормали к поверхности, соответствующие относительные деформации будут:

$$\varepsilon_x^0=0;\ \varepsilon_y^0=0;\ \varepsilon_z^0=\kappa^0\,\sigma,\tag{15}$$

а перемещения точек среды соответственно координатным осям x, y, z:

$$U^0=0;\ V^0=0;\ W^0=\int\kappa^0\cdot\sigma dz.\tag{16}$$

В формулах (15), (16) κ^0 (м^2/н) – модуль объемной деформации (физическая константа среды).

Рассматриваемая задача состоит в том, что по нормали к поверхности полупространства, вдоль линии длиной $2b$ действует погонная нагрузка интенсивностью P (н/м) соответственно рис. 1.

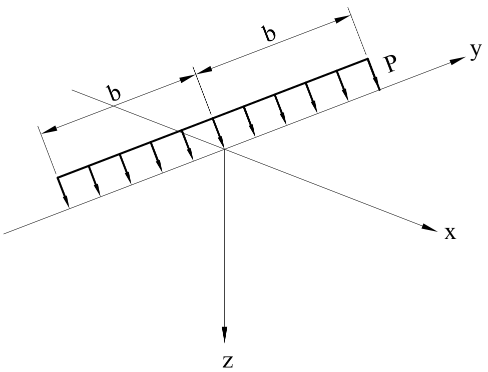

Рис. 1. Схема нагружения полупространства погонной линейной нагрузкой

Задача по определению напряженного состояния решается путем перехода от задачи с сосредоточенной нагрузкой с помощью соответствующего интегрирования.

Определение функции давления:

$$\sigma=\frac{P\cdot z}{2\pi}\int_{-b}^{b}\frac{d\varepsilon}{\left[x^2+(y+\varepsilon)^2+z^2\right]^{3/2}}=$$

$$=\frac{P\cdot z}{2\pi}\frac{1}{\left(x^2+z^2\right)}\frac{(y+\varepsilon)}{\left[x^2+(y+\varepsilon)^2+z^2\right]^{1/2}}\Bigg|_{-b}^{b}.$$

$$\sigma=\frac{P}{2\pi}\frac{z}{\left(x^2+z^2\right)}\left[\frac{(y+b)}{\left[x^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}}-\frac{(y-b)}{\left[x^2+(y-b)^2+z^2\right]^{1/2}}\right].\tag{17}$$

Определение компоненты σ_x:

$$\sigma_x=\frac{3Px^2\cdot z}{2\pi}\int_{-b}^{b}\frac{d\varepsilon}{\left[x^2+(y+\varepsilon)^2+z^2\right]^{5/2}}=$$

$$=\frac{3Px^2\cdot z}{2\pi\left(x^2+z^2\right)^2}\cdot\left[\frac{(y+b)}{\left[x^2+(y+\varepsilon)^2+z^2\right]^{1/2}}-\frac{1}{3}\frac{(y+b)^3}{\left[x^2+(y+\varepsilon)^2+z^2\right]^{3/2}}\right]\Bigg|_{-b}^{b}.$$

$$\sigma_x=\frac{3P}{2\pi}\cdot\frac{x^2\cdot z}{\left(x^2+z^2\right)^2}\left[\frac{(y+b)}{\left[x^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}}-\frac{(y+b)^3}{3\left[x^2+(y+b)^2+z^2\right]^{3/2}}-\frac{(y-b)}{\left[x^2+(y-b)^2+z^2\right]^{1/2}}+\frac{(y-b)^3}{3\left[x^2+(y-b)^2+z^2\right]^{3/2}}\right].\tag{18}$$

Определение компоненты σ_y:

$$\sigma_y=\frac{3P}{2\pi}\cdot z\int_{-b}^{b}\frac{(y+\varepsilon)^2\,d\varepsilon}{\left[x^2+(y+\varepsilon)^2+z^2\right]^{5/2}}=$$

$$=\frac{3P}{2\pi}\frac{z}{\left(x^2+z^2\right)^2}\cdot\left[\frac{(y+\varepsilon)^3}{\left[x^2+(y+\varepsilon)^2+z^2\right]^{3/2}}\right.\Bigg|_{-b}^{b}.$$

$$\sigma_y = \frac{P}{2\pi}\cdot\frac{z}{3\left(x^2+z^2\right)^2}\left[\frac{\left(y+b\right)^3}{\left[x^2+\left(y+b\right)^2+z^2\right]^{3/2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\left(y-b\right)^3}{\left[x^2+\left(y-b\right)^2+z^2\right]^{3/2}}\right]. \qquad (19)$$

Определение компоненты σ_z:

$$\sigma_z = \frac{3P\cdot z^3}{2\pi}\int_{-b}^{b}\frac{d\varepsilon}{\left[x^2+\left(y+\varepsilon\right)^2+z^2\right]^{5/2}} =$$

$$= \frac{3P}{2\pi}\frac{z^3}{\left(x^2+z^2\right)^2}\cdot\left[\frac{\left(y+\varepsilon\right)}{\left[x^2+\left(y+\varepsilon\right)^2+z^2\right]}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{3}\frac{\left(y+\varepsilon\right)^3}{\left[x^2+\left(y+\varepsilon\right)^2+z^2\right]^{3/2}}\right]\Bigg|_{-b}^{b}.$$

$$\sigma_z = \frac{3P}{2\pi}\cdot\frac{z^3}{\left(x^2+z^2\right)^2}\left[\frac{\left(y+b\right)}{\left[x^2+\left(y+b\right)^2+z^2\right]^{1/2}}-\right.$$

$$-\frac{1}{3}\frac{\left(y+b\right)^3}{\left[x^2+\left(y+b\right)^2+z^2\right]^{3/2}}-$$

$$-\frac{\left(y-b\right)}{\left[x^2+\left(y-b\right)^2+z^2\right]^{1/2}}+$$

$$\left.+\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(y-b\right)^3}{\left[x^2+\left(y-b\right)^2+z^2\right]^{3/2}}\right]. \qquad (20)$$

Определение компоненты τ_{xy}:

$$\tau_{xy} = \frac{3P}{2\pi}x\cdot z\int_{-b}^{b}\frac{\left(y+\varepsilon\right)d\varepsilon}{\left[x^2+\left(y+\varepsilon\right)^2+z^2\right]^{5/2}} =$$

$$= -\frac{3P}{2\pi}x\cdot z\cdot\frac{1}{3}\frac{1}{\left[x^2+\left(y+\varepsilon\right)^2+z^2\right]^{3/2}}\Bigg|_{-b}^{b}.$$

$$\tau_{xy} = -\frac{P}{2\pi}x\cdot z\left[\frac{1}{\left[x^2+\left(y+b\right)^2+z^2\right]^{3/2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\left[x^2+\left(y-b\right)^2+z^2\right]^{3/2}}\right]. \qquad (21)$$

Определение компоненты τ_{yz}:

$$\tau_{yz} = \frac{3P}{2\pi}z^2\int_{-b}^{b}\frac{\left(y+\varepsilon\right)d\varepsilon}{\left[x^2+\left(y+\varepsilon\right)^2+z^2\right]^{5/2}} =$$

$$= -\frac{3P}{2\pi}\frac{z^2}{3}\frac{1}{\left[x^2+\left(y+\varepsilon\right)^2+z^2\right]^{3/2}}\Bigg|_{-b}^{b}.$$

$$\tau_{yz} = -\frac{P}{2\pi}\cdot z^2\left[\frac{1}{\left[x^2+\left(y+b\right)^2+z^2\right]^{3/2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\left[x^2+\left(y-b\right)^2+z^2\right]^{3/2}}\right]. \qquad (22)$$

Определение компоненты τ_{zx}:

$$\tau_{zx} = \frac{3P}{2\pi}z^2x\int_{-b}^{b}\frac{d\varepsilon}{\left[x^2+\left(y+\varepsilon\right)^2+z^2\right]^{5/2}} =$$

$$= \frac{3P}{2\pi}\frac{z^2x}{\left(x^2+z^2\right)^2}\left[\frac{\left(y+\varepsilon\right)}{\left[x^2+\left(y+\varepsilon\right)^2+z^2\right]^{1/2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{3}\frac{\left(y+\varepsilon\right)^3}{\left[x^2+\left(y+\varepsilon\right)^2+z^2\right]^{3/2}}\right]\Bigg|_{-b}^{b}.$$

$$\tau_{zx} = \frac{3P}{2\pi}\frac{z^2x}{\left(x^2+z^2\right)^2}\left[\frac{\left(y+b\right)}{\left[x^2+\left(y+b\right)^2+z^2\right]^{1/2}}-\right.$$

$$-\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(y+b\right)^3}{\left[x^2+\left(y+b\right)^2+z^2\right]^{3/2}}-\frac{\left(y-b\right)}{\left[x^2+\left(y-b\right)^2+z^2\right]^{1/2}}+$$

$$+\frac{(y-b)^3}{\left[x^2+(y-b)^2+z^2\right]^3}\Bigg]. \tag{23}$$

Для определения перемещений, вызванных сдвиговыми деформациями, определяются частные производные функции давления, а сами перемещения записываются с использованием формул (12, 13, 14). В результате будем иметь:

$$U^{c}=\kappa^{c}\cdot\frac{P}{2\pi}\cdot\frac{x\cdot z}{\left(x^2+z^2\right)}\left\{-\frac{2}{\left(x^2+z^2\right)}\times\right.$$

$$\times\left[\frac{(y+b)}{\left[x^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}}-\frac{(y-b)}{\left[x^2+(y-b)^2+z^2\right]^{3/2}}\right]+$$

$$+\left[-\frac{(y+b)}{\left[x^2+(y+b)^2+z^2\right]^{3/2}}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(y-b)}{\left[x^2+(y-b)^2+z^2\right]^{3/2}}\right]\right\}. \tag{24}$$

$$V^{c}=\kappa^{c}\cdot\frac{P}{2\pi}\cdot z\left[\frac{1}{\left[x^2+(y+b)^2+z^2\right]^{3/2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\left[x^2+(y-b)^2+z^2\right]^{3/2}}\right]. \tag{25}$$

$$W^{c}=\kappa^{c}\cdot\frac{P}{2\pi}\cdot\frac{1}{\left(x^2+z^2\right)}\left\{\frac{\left(x^2-z^2\right)}{\left(x^2+z^2\right)}\times\right.$$

$$\times\left[\frac{(y+b)}{\left[x^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}}-\frac{(y-b)}{\left[x^2+(y-b)^2+z^2\right]^{1/2}}\right]+$$

$$+z^2\left[\frac{(y+b)}{\left[x^2+(y+b)^2+z^2\right]^{3/2}}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{(y-b)}{\left[x^2+(y-b)^2+z^2\right]^{3/2}}\right]\right\}. \tag{26}$$

Определение вертикальных перемещений от изменения плотности среды выполняется интегрированием (17) с условием (16):

$$W^{0}=\kappa^{0}\,\frac{2P}{\pi}\int\limits_{\infty}^{z}\left[\frac{z}{\left(x^2+z^2\right)}\frac{(y+b)}{\left[x^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{z}{\left(x^2+z^2\right)}\frac{(y-b)}{\left[x^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}}\right]dz. \tag{27}$$

С целью сокращения записей интегрируем выражение

$$\int\frac{zdz}{\left(x^2+z^2\right)\left[x^2+y^2+z^2\right]^{1/2}}, \tag{28}$$

в котором выполняем подстановку:

$$t^2=x^2+y^2+z^2;$$

откуда $z^2=t^2-x^2-y^2$; $tdt=zdz$.

Интегрирование выполняется по новой переменной t:

$$\int\frac{tdt}{\left(x^2+t^2-x^2-y^2\right)t}=-\int\frac{tdt}{\left(y^2-t^2\right)t}=$$

$$=-\frac{1}{2y}\ln\left|\frac{y+t}{y-t}\right|.$$

Выполнив обратную замену, имеем:

$$\int\limits_{\infty}^{z}\frac{zdz}{\left(x^2+z^2\right)\left[x^2+y^2+z^2\right]^{1/2}}=$$

$$=-\frac{1}{2y}\ln\left|\frac{y+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}{y-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}\right|\Bigg|_{\infty}^{z}=$$

$$=-\frac{1}{2y}\ln\left|\frac{y+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}{y-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}\right|. \tag{29}$$

Окончательно, после соответствующей подстановки в (32) имеем:

$$W^0=\frac{P}{4\pi}\left[-\ln\left|-\frac{(y+b)+\left[x^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}}{(y+b)-\left[x^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}}\right|+\right.$$

$$\left.+\ln\left|-\frac{(y-b)+\left[x^2+(y-b)^2+z^2\right]^{1/2}}{(y-b)-\left[x^2+(y-b)^2+z^2\right]^{1/2}}\right|\right]. \quad (30)$$

Следует здесь отметить, что предельный переход в формулах (17 – 23) путем -∞ ≤ b ≤ ∞ дает напряженное состояние полупространства при его плоском деформировании, когда нагрузка равномерно распределена на поверхности вдоль бесконечной линии:

$$\sigma=\frac{P}{\pi}\frac{z}{\left(x^2+z^2\right)}\ ; \quad (31)$$

$$\sigma_x=\frac{2P}{\pi}\frac{x^2z}{\left(x^2+z^2\right)^2}\ ; \quad (32)$$

$$\sigma_y=\frac{P}{\pi}\frac{z}{\left(x^2+z^2\right)}\ ; \quad (33)$$

$$\sigma_z=\frac{2P}{\pi}\frac{z^3}{\left(x^2+z^2\right)^2}\ ; \quad (34)$$

$$\tau_{xy}=\tau_{yz}=0\,;\ \tau_{zy}=\frac{2P}{\pi}\frac{z^2x}{\left(x^2+z^2\right)^2}. \quad (35)$$

Перемещения, вызванные сдвиговыми деформациями, в соответствии с (12, 13, 14) будут:

$$U^{\text{c}}=\kappa^{\text{c}}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial x}=-\frac{P}{\pi}\frac{2x\cdot z}{\left(x^2+z^2\right)^2}; \quad (36)$$

$$W^{\text{c}}=\kappa^{\text{c}}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial z}=\frac{P}{\pi}\frac{\left(x^2-z^2\right)}{\left(x^2+z^2\right)^2}. \quad (37)$$

Перемещения, вызванные изменением плотности среды, направлены параллельно линии действия внешней нагрузки и определяются интегрированием:

$$W^0=\int_{z_2}^{z_1}\varepsilon_z\cdot dz=\kappa^0\frac{P}{\pi}\int_{z_2}^{z_1}\sigma dz=\kappa^0\frac{P}{\pi}\int_{z_2}^{z_1}\frac{zdz}{\left(x^2+z^2\right)};$$

$$W^0=\kappa^0\frac{P}{2\pi}\ln\left(x^2+z^2\right)\Big|_{z_2}^{z_1}. \quad (38)$$

Поскольку в (38) при неограниченном возрастании z W^0 также растет неограниченно, то с ее помощью можно определять только величину сжатия конкретного слоя упругой среды конечной толщины.

Таким образом, представлено полное решение задачи о напряженно-деформированном состоянии упругого полупространства при его нагружении равномерно распределенной нагрузкой по линии конечной и бесконечной длины. В полученном решении напряженное состояние любого элемента среды удовлетворяет системе дифференциальных уравнений равновесия, а компоненты относительных деформаций и перемещений – условиям сплошности, поэтому оно является строгим и единственным. Важная особенность решений задач теории упругости с разделением деформаций на сдвиговые и объемные состоит в том, что для их нахождения не требуется определение тензора напряженного состояния, достаточно определить по заданным граничным условиям потенциальную функцию давления – и условия равновесия выполняются автоматически. Такой подход упрощает решение любой задачи и, тем самым, расширяет круг решаемых задач.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бадалаха, И. К. Постановка и решение задач теории упругости с использованием потенциала [Текст] / И. К. Бадалаха // Дніпропетр. держ. техн. ун-т залізн. трансп. : зб. наук. пр. «Будівництво». – 1999. – Вип. 6. – С. 173-184.
2. Бадалаха, И. К. Определение напряженно-дефор-мированного состояния упругих массивов путем выделения объемных и сдвиговых деформаций [Текст] / И. К. Бадалаха // Ин-т геотехн. мех-ки НАН Украины, межвед. сб. науч. тр. – Вып. 18. – Д.: Поліграфіст, 2000. – С. 119-127.

Поступила в редколлегию 24.02.2009.