

## КОЛЕБАНИЯ МНОГОЯРУСНЫХ И МНОГОПРОЛЕТНЫХ РЕГУЛЯРНЫХ РАМ

Наведено точні аналітичні рішення для вільних згинальних коливань багатоярусних і багатопрогонових регулярних рам з урахуванням інерції обертання, зсувів, статичних подовжніх сил. Аналогічні результати отримано для сумісних коливань багатопропонових пересічних балок, що моделюють просторові рамні каркаси з довільною кількістю прогонів у кожному з напрямів.

Приведены точные аналитические решения для свободных изгибных колебаний многоярусных и многопролетных регулярных рам с учетом инерции вращения, сдвигов, статических продольных сил. Аналогичные результаты получены для совместных колебаний многослойных пересекающихся балок, моделирующих пространственные рамные каркасы с произвольным числом пролетов в каждом из направлений.

Exact analytical decisions are presented for free flexing vibrations of multiple-deck and multiple-bay regular frames taking into account inertia of rotation, shifts, and static longitudinal forces. Analogical results are obtained for the joint vibrations of multilayer intersecting beams modeling spatial frame carcasses with arbitrary quantity of spans in every direction.

Применение автоматных и топологических методов позволяет получить решение для совместных колебаний нерегулярных многоярусных плоских рам и пространственных рамных каркасов [1]. При этом каждый пролет и ярус рамы учитываются со своими геометрическими, жесткостными и массовыми характеристиками, что усложняет составление и решение уравнений. Некоторые упрощения можно получить для регулярных конструкций, совершающих один из видов колебаний с использованием метода деформаций и конечных тригонометрических рядов [2, 3].

Исследуем изгибные колебания многоэтажной рамы, имеющей одинаковые размеры пролетов (ригелей) 1, 2, ...,  $p$  и высоты колонн (стоек) 1, 2, ...,  $n$  (рис. 1).

Для одноярусной регулярной рамной системы запишем уравнение частот с учетом инерции вращения, сдвигов, статических продольных сил в ригеле и стойках рамы, приведенные в работе [4]:

$$\frac{2EJ_{y1}}{l_1} f_1(a_{1i}, d_{1i}) \left[ \frac{f_{1i}}{A(d_{1i})} - \frac{k_{1i}}{B(a_{1i})} \right] + \frac{EJ_{y2}}{h} \times \\ \times f_2(a_{2i}, d_{2i}) (f_{2i} \operatorname{cth} d_{2i} - k_{2i} \operatorname{ctg} a_{2i}) = 0, \quad (1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A(d_{1i}) &= \operatorname{sh} d_{1i} / (\operatorname{ch} d_{1i} - \cos \frac{\pi}{p} i); \\ B(a_{1i}) &= \sin a_{1i} / (\cos a_{1i} - \cos \frac{\pi}{p} i); \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$f_1(a_{1i}, d_{1i}) = (k_{1i} a_{1i} + f_{1i} d_{1i}) \operatorname{sh} d_{1i} \sin a_{1i} / \\ (2k_{1i} f_{1i} (\operatorname{ch} d_{1i} \cos a_{1i} - 1) + (k_{1i}^2 - f_{1i}^2) \operatorname{sh} d_{1i} \sin a_{1i}). \quad (3)$$

Значение функции  $f_2(a_{2i}, d_{2i})$  определяется аналогично (3). Остальные обозначения приведены в работе [5].

Из уравнения (1) при  $\mu_2 \rightarrow 0$  несложно получить выражение для неразрезной регулярной балки с опорами, упругими относительно угловых перемещений жесткостью  $q_{y1} = EJ_{y2}/h$ :

$$\frac{f_{1i}}{A(d_{1i})} - \frac{k_{1i}}{B(a_{1i})} - \frac{q_{y1} l_1}{2EJ_{y1} f_1(a_{1i}, d_{1i})} = 0. \quad (4)$$

Т.к. стойки по каждой линии их пересечения являются равноупругими опорами для ригелей и соответственно ригели – для стоек, то можно записать  $(p-1)$  и  $(n-1)$  частотных уравнений (4) для каждого из направлений  $x, z$ .

Для составления частотного уравнения достаточно приравнять амплитуды углов поворота ригелей и стоек рамы в местах их пересечения. Условие равенства угловых перемещений в узлах рамы через соответствующие жесткости упругих связей запишется как

$$(p-1) \sum_{r=1}^{n-1} q_{y1}^{(r)} = (n-1) \sum_{s=1}^{p-1} q_{y2}^{(s)}. \quad (5)$$

Входящие в (5) суммы жесткостей упругих связей определим из уравнения (4):

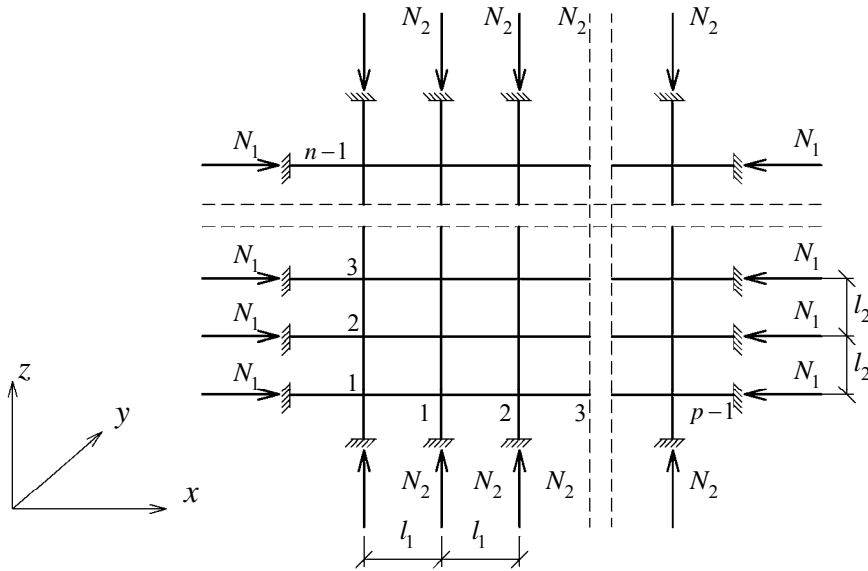


Рис. 1. Регулярная многоярусная и многопролетная рама

$$\sum_{r=1}^{n-1} q_{y1}^{(r)} = \frac{2EJ_{y1}}{l_1} (n-1) f_1(a_{1i}, d_{1i}) \times \left[ \frac{f_{1i}}{A(d_{1i})} - \frac{k_{1i}}{B(a_{1i})} \right]. \quad (6)$$

Если происходит изгиб ригелей, то угловые перемещения стоек в узловых сечениях будут возникать под действием узловых реакций, действующих в обратном направлении:

$$\sum_{s=1}^{p-1} q_{y2}^{(s)} = -\frac{2EJ_{y2}}{l_2} (p-1) f_2(a_{2j}, d_{2j}) \times \left[ \frac{f_{2j}}{A(d_{2j})} - \frac{k_{2j}}{B(a_{2j})} \right], \quad (7)$$

где

$$A(d_{2j}) = \text{sh}d_{2j} / (\text{ch}d_{2j} - \cos \frac{\pi}{n} j);$$

$$B(a_{2j}) = \sin a_{2j} / (\cos a_{2j} - \cos \frac{\pi}{n} j); \quad (8)$$

$i, j$  – порядковые номера формы колебаний.

После подстановки в выражение (5) значений (6), (7) с учетом обозначений (2), (3), (8) частотное уравнение по формам колебаний примет вид:

$$\frac{2EJ_{y1}}{l_1} f_1(a_{1i}, d_{1i}) \left[ \frac{f_{1i}}{A(d_{1i})} - \frac{k_{1i}}{B(a_{1i})} \right] + \frac{EJ_{y2}}{l_2} f_2(a_{2j}, d_{2j}) \left[ \frac{f_{2j}}{A(d_{2j})} - \frac{k_{2j}}{B(a_{2j})} \right] = 0. \quad (9)$$

Если не учитывать перечисленные выше факторы, при  $a_{1i} = d_{1i} = k_{1i} = f_{1i} = \lambda_{1i}$ ,

$a_{2j} = d_{2j} = k_{2j} = f_{2j} = \lambda_{2j}$  и подстановки

$$f_1(\lambda_{1i}) = \text{sh}\lambda_{1i} \sin \lambda_{1i} / (\text{ch}\lambda_{1i} \cos \lambda_{1i} - 1);$$

$$f_2(\lambda_{2j}) = \text{sh}\lambda_{2j} \sin \lambda_{2j} / (\text{ch}\lambda_{2j} \cos \lambda_{2j} - 1)$$

уравнение (9) упрощается:

$$\frac{EJ_{y1} \lambda_{1i}}{l_1 G_{1i}} (A_{1i} + V_{1i} \cos \beta_{1i}) + \frac{EJ_{y2} \lambda_{2j}}{l_2 G_{2j}} (A_{2j} + V_{2j} \cos \beta_{2j}) = 0. \quad (10)$$

где функции  $V, A, G$  соответствуют выражениям [6] с индексами, относящимися к ригелям

или стойкам рамы,  $\beta_{1i} = \frac{\pi}{n} i, \beta_{2j} = \frac{\pi}{n} j$ .

Т.к. в трансцендентном уравнении (10) количество пролетов представлено как отдельный параметр, то трудоемкость по отысканию его корней при любом количестве ригелей и стоек,

а также сочетании форм колебаний остается одинаковой.

Например, для многоярусной рамы с числом пролетов  $p$  при  $l_1 = l_2$ ,  $\mu_1 = \mu_2$ ,  $i = j = 1$  на рис. 2 приведены графики изменения частотного параметра  $\lambda_1$  в зависимости от величины отношения изгибных жесткостей ригеля и стоек рамы. Для таких систем возможно также построение частотных поверхностей с различными значениями  $i/p$  и  $j/n$ .

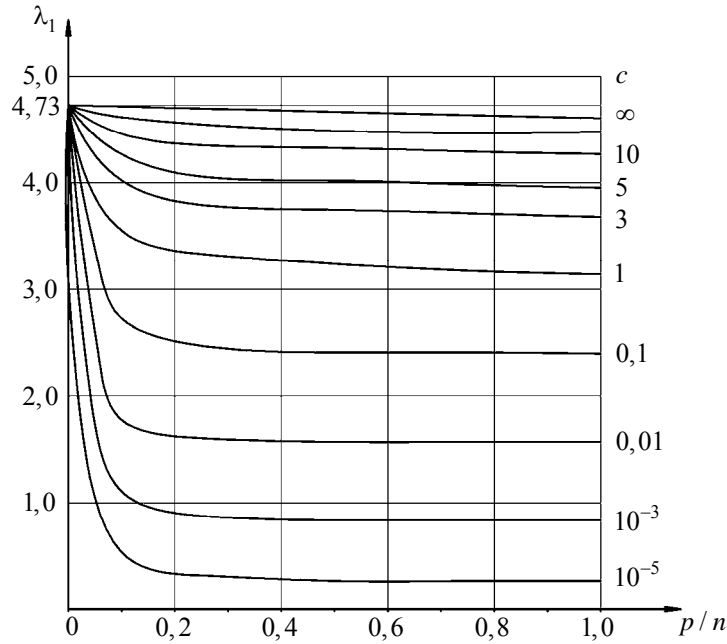


Рис. 2. Значения  $\lambda_1$  для рамы с произвольным числом пролетов  $p$ ,  $n$

После подстановки (6), (7) в равенство (11) приходим к выражению:

$$\frac{2f_1(a_{1i}, d_{1i})}{q'_{y1}} \left[ \frac{f_{1i}}{A(d_{1i})} - \frac{k_{1i}}{B(a_{1i})} \right] + \frac{2f_2(a_{2j}, d_{2j})}{q'_{y2}} \left[ \frac{f_{2j}}{A(d_{2j})} - \frac{k_{2j}}{B(a_{2j})} \right] + 1 = 0, \quad (12)$$

где  $q'_{y1} = \frac{q_{12} l_1}{EJ_{y1}}$ ;  $q'_{y2} = \frac{q_{12} l_2}{EJ_{y2}}$  – относительные

жесткости упругих связей.

Без учета инерции вращения, сдвигов и продольных сил в стержнях рамы уравнение (12) преобразуется к виду

$$\frac{\lambda_{1i}}{q'_{y1} G_{1i}} (A_{1i} + V_{1i} \cos \beta_{1i}) + \frac{\lambda_{2j}}{q'_{y2} G_{2j}} (A_{2j} + V_{2j} \cos \beta_{2j}) + 1 = 0. \quad (13)$$

В предположении, что в каждом узле пересекающихся стержней поставлены дополнительно упругие связи жесткостью  $q_{12}$ , условие (5) преобразуется к виду

$$(p-1) \sum_{r=1}^{n-1} q_{y1}^{(r)} = (n-1) \times \sum_{s=1}^{p-1} q_{y2}^{(s)} - (p-1)(n-1)q_{12}. \quad (11)$$

Для учета дополнительных сосредоточенных масс  $m$  в узловых точках необходимо вместо  $q_{12}$  подставить значение  $(q_{12} - J_{ym} \omega_{ij}^2)$ , где  $J_{ym}$  – момент инерции сосредоточенной массы относительно оси  $y$ .

Переходя к пределу (13) при  $\mu_1, \mu_2 \rightarrow 0$  ( $\lambda_{1i}, \lambda_{2j} \rightarrow 0$ ),  $q_{12} = 0$ , получим решение для дискретной рамной системы с массами, сосредоточенными в узлах

$$\frac{2EJ_{y1}(2 + \cos \beta_{1i})}{l_1 J_{ym} \omega_{ij}^2} + \frac{2EJ_{y2}(2 + \cos \beta_{2j})}{l_2 J_{ym} \omega_{ij}^2} = 1, \quad (14)$$

из которого получаем выражение для круговой частоты в явной форме

$$\omega_{ij} = \sqrt{\frac{2EJ_{y1}(2 + \cos \beta_{1i})}{l_1 J_{ym}} + \frac{2EJ_{y2}(2 + \cos \beta_{2j})}{l_2 J_{ym}}}. \quad (15)$$

Аналогичный расчет может быть проведен с учетом сдвигов и продольных сил.

Уравнение устойчивости для многоярусной и многопролетной регулярной рамы получим из выражения (9), полагая, что при  $\omega_{ij} \rightarrow 0$ ,  $\lambda_{1i}, \lambda_{2j} \rightarrow 0$  согласно [5]  $f_{1i} = d_{1i} = 0$ ;  $f_{2j} = d_{2j} = 0$ ,  $k_{1i} = a_{1i} = \sqrt{2s_1}$ ;  $k_{2j} = a_{2j} = \sqrt{2s_2}$

$$\frac{EJ_{y1}}{l_1} \left( 1 - \cos \beta_i - \frac{a_{1i}}{\sin a_{1i}} (\cos a_{1i} - \cos \beta_i) \right) + \frac{EJ_{y2}}{l_2} \times$$

$$\times \left( 1 - \cos \beta_j - \frac{a_{2j}}{\sin a_{2j}} (\cos a_{2j} - \cos \beta_j) \right) = 0. \quad (16)$$

Уравнения (9), (12), (16) позволяют непосредственно перейти к решению различного рода частных задач, вытекающих из основной расчетной схемы [7], оценить влияние на частоты свободных колебаний количества ярусов и пролетов рамы, инерции вращения, сдвигов, продольных сил, а также определить границы критического соотношения жесткостей ригелей и стоек под действием сжимающих сил и при потере устойчивости.

Значительные упрощения можно также получить для регулярных конструкций, представленных в виде пространственных рамных каркасов. Так, для изгибно-крутильных колебаний используем уравнение (13), описывающее изгибные колебания многоярусных и многопролетных регулярных рам в плоскости  $xu$  в предположении, что в каждом узле пересекающихся стержней поставлены дополнительные упругие связи жесткостью  $q_k$ . Уравнение (13) позволяет перейти к системе многослойных пересекающихся балок с одинаковыми граничными условиями, связанными между собой в узловых точках линейно-упругими безинерционными связями, моделирующими стержни-стойки, с эквивалентной крутильной жесткостью  $q_k$ .

Используя подобие форм изгиба всех  $k$  слоев ( $k = 1, 2, \dots, p-1$ ) пересекающихся балок системы, можно определить нормальные формы колебаний аналогично решению [8, 9] для одномерных многослойных балок. Тогда уравнения колебаний для любого уровня балок системы приводятся к виду:

$$\frac{\lambda_{1k}}{q'_{1k} G_{1k}} (A_{1k} + V_{1k} \cos \beta_{1i}) + \frac{\lambda_{2k}}{q'_{2k} G_{2k}} \times$$

$$\times (A_{2k} + V_{2k} \cos \beta_{2j}) + 1 = 0; \quad (17)$$

$$q'_{sk} = \frac{l_{sk}}{EJ_{sk}} \left[ q_{k-1,k} \left( 1 - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} \right) + \right.$$

$$\left. + q_{k,k+1} \left( 1 - \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} \right) \right], \quad (18)$$

где  $\alpha_k$  – коэффициент распределения амплитуд,  $q_{k,k+1}$  – жесткость соответствующей упругой связи, расположенной между  $k$ -тым и  $(k+1)$ -м уровнями балок.

В результате для системы, состоящей из  $(p-1)$  уровней пересекающихся балок, получим систему из  $(p-1)$  трансцендентных частотных уравнений (17), позволяющих найти все  $(p-2)$  неизвестных соотношений амплитуд  $\alpha_k$  ( $\alpha_1$  принимается равным единице) и круговую частоту  $\omega_{ij}$  для каждой формы колебаний.

Таким же образом поступаем и для изгибно-продольных колебаний. В этом случае для любого уровня балок системы преобразуем уравнение [10], полученное для изгибных колебаний регулярной системы пересекающихся балок из плоскости  $xu$

$$\frac{2\lambda_{1k}^3}{c'_{1k} (A(\lambda_{1k}) - B(\lambda_{1k}))} +$$

$$+ \frac{2\lambda_{2k}^3}{c'_{2k} (A(\lambda_{2k}) - B(\lambda_{2k}))} - 1 = 0, \quad (19)$$

где

$$c'_{sk} = \frac{l_{sk}^3}{2EJ_{sk}} \left[ c_{k-1,k} \left( 1 - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} \right) + \right.$$

$$\left. + c_{k,k+1} \left( 1 - \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} \right) \right]. \quad (20)$$

В уравнениях (17), (19) индексы  $x, y, z, i, j$  опущены.

Для примера на рис. 3 приведены частотные поверхности изменения параметра  $\lambda_{1k}$  первой зоны сгущения для многослойных пересекающихся балок с одинаковыми геометрическими, инерционными и жесткостными характеристиками, относительной жесткостью промежуточных упругих связей  $c'_k = 7,25$ , произвольным числом пролетов в обоих направлениях, различными значениями порядковых номеров

форм колебаний  $i$ ,  $j$  и количеством слоев  $k = 1; 3; 50$ .

Можно отметить относительно высокую плотность полученного спектра частот, особенно при количестве слоев пересекающихся балок большем трех.

Распределенные массы стоек учитываются в виде сосредоточенных масс  $m_k$ , расположенных в узловых точках пересекающихся балок.

При этом вместо значений жесткостей  $q_k$  и  $c_k$  необходимо подставить значения  $(q_k - J_{zm_k} \omega_{ij}^2)$  и  $(c_k - m_k \omega_{ij}^2)$ .

Для учета в балках каждого из направлений инерции вращения, деформации сдвига, статических продольных сил вместо уравнения (17) необходимо использовать уравнение (12).

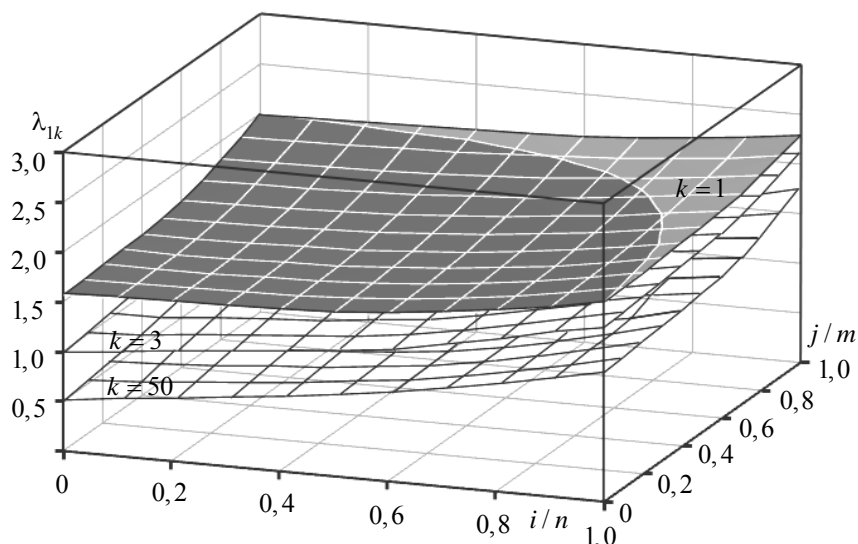


Рис. 3. Значения  $\lambda_{1k}$  для многослойных пересекающихся балок

Полученные зависимости с использованием соотношений [11] позволяют перейти к расчету квазирегулярных и нерегулярных стержневых систем. В последующих исследованиях предполагается также учесть силы неупругого сопротивления.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Распопов, А. С. Применение топологических методов к расчету пространственных колебаний двух- и трехмерных стержневых систем [Текст] / А. С. Распопов // Вісн. Дніпропетр. нац. ун-ту заліз. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – 2008. – Вип. 22. – Д.: Вид-во ДНУЗТ, 2008. – С. 117-124.
2. Новацкий, В. Динамика сооружений [Текст] / В. Новацкий. – М.: Гостройиздат, 1963. – 376 с.
3. Kolousek, V. Dynamics in engineering structures [Текст] / V. Kolousek. – Prague: Czech. Acad. Sci., 1973. – 580 p.
4. Распопов, А. С. К расчету собственных колебаний рамно-неразрезных путепроводов [Текст] / А. С. Распопов // Ресурсозберігаючі технології у трансп. і гідротех. будівництві. Зб. наук. пр. Дніпропетр. держ. техн. ун-ту заліз. трансп. – 1999. – Вип. 5. – Д.: Вид-во ДДТУЗТ, 1999 – С. 104-108.

5. Распопов, О. С. Асоційовані матриці у розрахунках згинальних коливань континуальних балок [Текст] / О. С. Распопов // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій: зб. наук. пр. фіз.-мех. ін-ту ім. Г. В. Карпенка НАН України. – 2007. – Вип. 7. – С. 96-104.
6. Распопов, А. С. Конечно-автоматное моделирование пространственных колебаний стержневых и балочных конструкций [Текст] / А. С. Распопов // Вісн. Дніпропетр. нац. ун-ту заліз. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – 2007. – Вип. 19. – Д.: Вид-во ДНУЗТ. – С. 125-133.
7. Распопов, А. С. Критическая жесткость пересекающихся балок при потере устойчивости [Текст] / А. С. Распопов // Ресурсозберігаючі технології у трансп. і гідротех. будівництві. Зб. наук. пр. Дніпропетр. держ. техн. ун-ту заліз. тр-ту. – 1999. – Вип. 5. – Д.: Вид-во ДДТУЗТ, 1999. – С. 94-97.
8. Солдатов, К. И. Колебания и устойчивость многослойных регулярных балок на упругих опорах при действии продольных сил [Текст] / К. И. Солдатов, Б. П. Черевацкий // Вопросы теор. колебаний и динамики мостов. Тр. Днепропетр. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1975. – Вып. 165/19. – С. 25-32.
9. Черевацкий, Б. П. О собственных колебаниях слоистых систем с распределенными параметрами

- рами [Текст] / Б. П. Червацкий // Вопросы теор. колебаний и динамики мостов. Тр. Днепропетр. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1973. – Вып. 150. – С. 75-86.
10. Распопов, А. С. Применение логических моделей к расчету колебаний неразрезных мостовых конструкций [Текст] / А. С. Распопов // Proc. Of the 6th Int. Conf. «Modern Bulding Materials, Structures and Techniques» (Vilnius, Lithuania, 19-21 May 1999). – Vilnius Gediminas Technical University, 1999. – Vol. III. – P. 223-228.
11. Распопов, А. С. Колебания континуальных балок с промежуточными опорами [Текст] / А. С. Распопов // Вісн. Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – 2005. – Вип. 9. – Д.: Вид-во ДНУЗТ, 2005. – С. 199-202.

Поступила в редколлегию 17.03.2009.