УДК 004.925.84

П. В. БЕЗДІТКО, А. В. КРАСНЮК, А. Д. МАЛИЙ, Н. П. БОЧАРОВА (ДІІТ)

ПРОСТОРОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТВЕРДОТІЛЬНИХ ПРАВИЛЬНИХ МНОГОГРАННИКІВ (ТІЛ ПЛАТОНА) В СИСТЕМІ AutoCAD

В статті викладено технологію моделювання правильних многогранників методами комп'ютерної графіки. Показано, що для створення твердотільних моделей правильних многогранників найдоцільніше користуватися методом екструзії (видавлювання).

В статье изложена технология моделирования правильных многогранников методами компьютерной графики. Показано, что для создания твердотельных моделей правильных многогранников наиболее целесообразно пользоваться методом экструзии (выдавливания).

This article describes the technology of modeling regular polyhedra by graphic methods. The authors came to the conclusion that in order to create solid models of regular polyhedra the method of extrusion is best to use.

Вступ

Многогранники, як найпростіші просторові форми в живій та неживій природі, а також в технічній творчості, супроводжують людину протягом всього життя. Ми спостерігаємо багато прикладів неповторного поєднання многогранних форм, які викликають художні враження. Тому, мабуть, так широко використовуються вони в архітектурі. Але креслення многогранних форм, виконані методами інженерної графіки, не завжди і не всіма легко сприймаються, тому архітектори дуже часто виготовляють просторові моделі цих форм з паперу або інших матеріалів [1, 2]. Та якщо ці форми більш-менш складні, то виготовлення навіть однієї моделі займає досить багато часу. За свідченням М. Венінджера [1], виготовлення такої моделі вимагає до 3…4 годин, на досить складну модель треба витратити 20…30 годин, а деякі моделі вимагають більше сотні годин на кожну.

Мета цієї роботи – описати для архітекторів та проектувальників найпростіші технології побудови многогранних форм методами комп'ютерної графіки. Почнемо це з правильних многогранників, які в геометрії називають тілами Платона.

Відомо, що правильним називають многогранник, у якого всі многогранні кути при вершинах рівні, а отже, рівні всі плоскі кути кожної грані та всі двогранні кути при кожному ребрі. В тривимірному просторі таких многогранників п'ять:

- правильний чотиригранник (тетраедр), всі чотири грані якого – рівносторонні трикутники;
- правильний шестигранник (гексаедр або куб), всі грані якого – квадрати;
- правильний восьмигранник (октаедр), у якого всі грані – рівносторонні трикутники;
- правильний дванадцятигранник (додекаедр), всі його грані – правильні п'ятикутники;
- правильний двадцятигранник – (ікосаедр), у нього всі грані – рівносторонні трикутники.

В такій послідовності і розглянемо технології побудови їх просторових моделей в системі AutoCAD.

Тетраедр

Для побудови його просторової моделі, наприклад з паперу, достатньо побудувати розгортку поверхні многогранника. А для цього треба задати або довжину ребра грані, або радіус кола, в яке треба вписати правильний трикутник.

Тоді для визначення довжини ребра можна скористатися формулою (1) [3]:

$$a = cR, \quad (1)$$

де a – ребро грані;

c – коефіцієнт співвідношення довжини ребра та радіуса описаного кола для відповідного центрального кута;

R – радіус описаного кола.

Для рівностороннього трикутника $c = 1{,}7321$, а $R = 0{,}5773a$.

Для побудови твердотільної моделі на комп'ютері треба ще визначити висоту тетраедра і так званий кут звуження, тобто кут нахилу грані до напрямку висоти

$$\beta = 90^\circ - \alpha, \quad (2)$$

де β – кут звуження;

α – кут нахилу бічної грані до основи.

Нескладні розрахунки показують, що висота тетраедра

$$h_т = 0{,}8173a, \quad (3)$$

а кут звуження β = 19º30', або 19,5º.

Послідовність операцій побудови моделі така. Оскільки будь-яку просторову модель краще розглядати як на фотографії, то побудуємо її відразу в ізометрії. Переходимо в 3М простір і спочатку проведемо в площині *XY* дві взаємно перпендикулярні прямі, як центрові лінії описаного навколо основи многогранника кола. Центр Системи Координат Користувача розташовуємо в точці перетину цих прямих. Потім за допомогою команди «Многокутник» (Polygon) з випадного або екранного меню будуємо рівносторонній вписаний трикутник, як основу тетраедра. Радіус кола визначаємо за формулою (1).

Після цього за допомогою команди «Видавити» (Extrude) з панелі інструментів «Тіла» (Solids) будуємо власне тетраедр за такою послідовністю:

- вибираємо курсором об'єкт, який треба видавити, тобто тільки-но побудований трикутник;
- на запит програми задаємо висоту видавлювання, обчислену за формулою (3);
- на запит програми вводимо значення кута звуження. Оскільки всі бічні грані тетраедра нахилені до напрямку його висоти, то значення кута звуження вводимо як число додатне.

В результаті маємо каркасну модель тетраедра (рис. 1*а*). Для більшої наочності можна розфарбувати її за Гуро (рис. 1*б*).

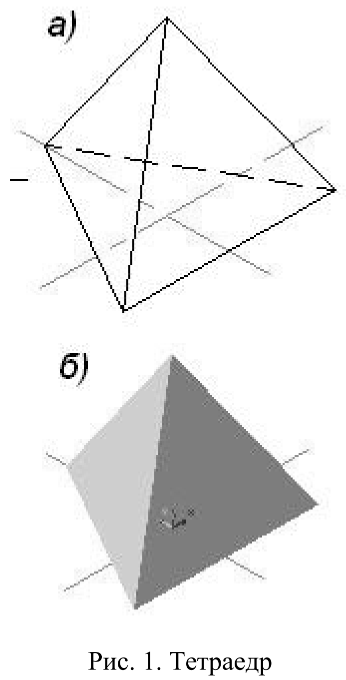

Рис. 1. Тетраедр

Гексаедр (куб)

Про побудову просторової моделі гексаедра багато говорити немає потреби, адже в панелі інструментів AutoCAD «Тіла» є примітив «Ящик» (Box). Достатньо на запит програми ввести координати однієї точки нижньої основи та діагонально протилежної точки на верхній основі, і ми одержимо бажану модель (рис. 2).

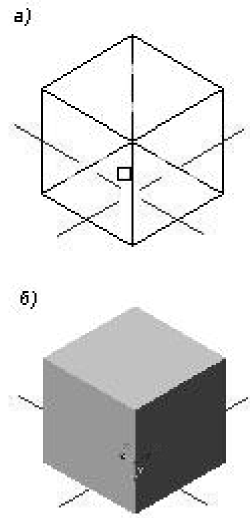

Рис. 2. Гексаедр

Той же результат будемо мати, якщо на запит програми введемо з клавіатури: «Куб» (К) та довжину ребра куба *а*. Крім того, гексаедр можна побудувати так, як ми будували тетраедр. Тобто можна в площині *XY* побудувати квадрат і видавити його на висоту *а.*

Октаедр

Просторову модель октаедра можна побудувати, скориставшись технологією побудови тетраедра, беручи до уваги те, що цей многогранник є комбінацією двох правильних чотиригранних пірамід, дзеркально розташованих по відношенню до основи. Отже, основою такої піраміди буде квадрат. У відповідності з формулою (1) радіус кола, описаного навколо квадрата [3]

$$R = a/c = 0{,}7071a. \quad (4)$$

До речі, радіус описаного навколо квадрата кола дорівнює половині його діагоналі та одночасно є і радіусом сфери, описаної навколо октаедра, а отже, і висотою піраміди, або, в нашому випадку, висотою видавлювання:

$$h_о = 0{,}7071a. \quad (4)$$

Виходячи з цього, визначаємо і кут звуження: β = 35,28º.

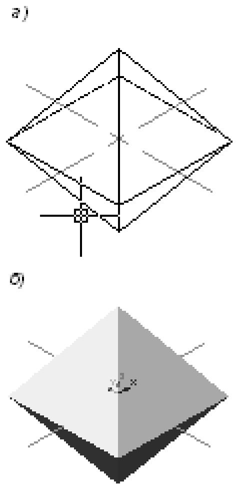

Рис. 3. Октаедр

Далі будуємо піраміду так само, як будували тетраедр. Після цього, скориставшись командою «3М дзеркало» з випадного меню «Редагування», будуємо дзеркальне відображення піраміди відносно її основи. Потім за допомогою команди «Об'єднання» (Union) з панелі інструментів «Редагування тіл» об'єднуємо піраміди і одержуємо каркас октаедра (рис. 3*а*) та тоноване зображення моделі (рис. 3*б*).

Додекаедр

Серед тіл Платона мабуть найпривабливішим є додекаедр. З ним конкурує хіба що ікосаедр. Тож, мабуть, завдяки своїй декоративності він дуже часто використовується в архітектурі.

Технологія його побудови дещо складніша від технології побудови октаедра, але в чомусь і подібна. Протилежні грані додекаедра паралельні між собою. Отже, якщо одну з них вважати нижньою його основою, то інша буде верхньою. Тоді технологія побудови моделі буде дещо подібною до технології побудови октаедра.

Оскільки гранями додекаедра є правильні п'ятикутники, то [3] c = 1,1756 і у відповідності з формулою (1) визначаємо, що радіус описаного кола

$$R = 0{,}8506a.$$

Висота додекаедра дорівнює діаметру вписаної в нього сфери. Отже, якщо радіус такої сфери [2] дорівнює 1,114a, то відповідно $h_д$ = = 2,228a.

Бічні грані додекаедра відхиляються від осі назовні, тож кут звужування при видавлюванні буде від'ємним: β = -26,43°.

Отже, за аналогією з попереднім, будуємо в площині XY правильний п'ятикутник. Це нижня основа. На відстані $Z = h_д$ від неї будуємо такий самий, але повертаємо його навколо осі Z на 36° або на 180°, оскільки вершини додекаедра діагонально протилежні.

Після цього по черзі «видавлюємо» ці п'ятикутники, але при видавлюванні верхньої основи траєкторію задаємо з від'ємним знаком. Висота видавлювання основ може бути довільною, але не менш як 0,7h. В результаті одержуємо моделі двох співвісних п'ятигранних зрізаних пірамід, відображених каркасами.

Тепер скористаємося кнопкою «Переріз» (Intersect) на панелі інструментів «Редагування тіл». Виберемо тільки-но одержані об'єкти і, натиснувши «Enter» або праву клавішу «миші», одержимо бажану модель в каркасному або тонованому вигляді (рис. 4).

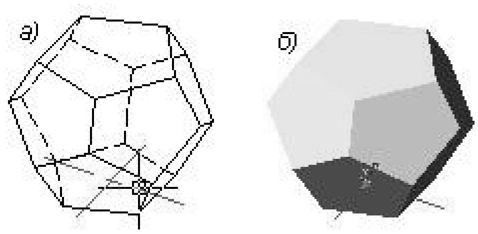

Рис. 4. Додекаедр

Ікосаедр

Ікосаедр завершує ряд правильних многогранників (тіл Платона). Стародавня рукотворна модель його – гральна кісточка епохи Птоломеїв – була знайдена в Єгипті. А новіша – сплав алюмінію та марганцю, яка має квазікристалічну структуру з віссю п'ятого порядку, одержана в другій половині XIX століття. Ф. Клейн [4] обґрунтував математичне значення ікосаедра як об'єкта, з якого розходяться гілки математичних теорій: геометрія, теорія груп, теорія інваріантів, диференціальні рівняння та теорія Галуа. Ікосаедр досить широко використовується в техніці та архітектурі.

Технологія побудови його твердотільної моделі на комп'ютері поєднує в собі технології побудови октаедра та додекаедра.

Ікосаедр можна умовно розділити на три частини [5]: середню – десятигранний призматоїд, основами якого є правильні пентагони, повернуті один відносно другого на 36°, та дві правильні п'ятигранні піраміди, основами яких є відповідні основи призматоїда.

Оскільки основами є правильні п'ятикутники, то співвідношення ребра та радіуса описаного кола залишається таким же, як і при побудові додекаедра, тобто R = 0,8506a.

Бічними гранями призматоїда є правильні трикутники. Тож нескладні розрахунки показують, що висота призматоїда

$$h_{\text{пр}} = 0{,}8523a.$$

Тепер за аналогією з додекаедром побудуємо основи призматоїда, а потім видавимо їх назустріч один одному, тобто напрям траєкторії для нижньої основи буде додатним, а для верхньої – від'ємним. Висота видавлювання має бути більшою за висоту призматоїда.

Після цього, як і для додекаедра, скористаємося командою «Переріз» і одержимо модель призматоїда (рис. 5).

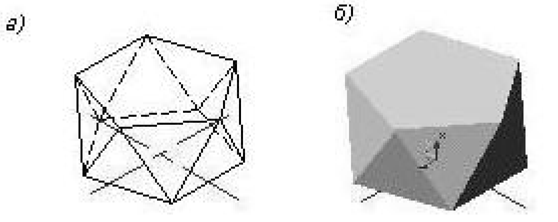

Рис. 5. Призматоїд

Далі побудуємо вершинні піраміди. Оскільки їхні основи співпадають з основами призматоїда, то для зручності і більшої наочності процесу подальших побудов, шар, на якому ми побудували призматоїд, краще вимкнути, а піраміди побудувати в іншому шарі.

Спочатку побудуємо піраміду на верхній основі призматоїда. Для цього на рівні верхньої основи побудуємо той же п'ятикутник. Він буде розташований так, як і п'ятикутник нижньої основи призматоїда. Поки що ми не звертаємо на це уваги і будуємо піраміду. Задавши команду «Видавити» на запит програми вводимо висоту видавлювання, рівну висоті піраміди

$$h_{\text{пір}} = 0{,}3864a,$$

а кут звужування $\beta = 63{,}5^{\circ}$.

Після цього за допомогою команди «3М операції, 3М дзеркало» випадної панелі «Редагування» будуємо дзеркальне відображення піраміди відносно площини XY, розташованої на рівні середини висоти призматоїда, тобто $Z = 0{,}1932a$. Основа одержаної піраміди буде точно співпадати з нижньою основою призматоїда. Тепер за допомогою команди «Повернути» панелі «Редагування» обертаємо верхню піраміду відносно осі Z на 36°, і її основа точно співпадає з верхньою основою призматоїда. В цьому ми впевнимось, ввімкнувши шар призматоїда.

За допомогою команди «Об'єднання» панелі «Редагування тіл» об'єднуємо всі три об'єкти. В результаті маємо модель ікосаедра в каркасному та тонованому вигляді (рис. 6).

Висновки

В результаті виконаної роботи можна зробити такі висновки:

- запропонована в статті технологія побудови твердотільних моделей правильних многогранників методами комп'ютерної графіки авторам у відповідній літературі поки що не зустрічалась;
- для побудови твердотільних моделей правильних многогранників найдоцільніше використовувати метод видавлювання (за винятком хіба що куба);
- завдяки можливостям AutoCAD моделі, в залежності від потреби, можна розмножувати закономірними масивами в необмеженій кількості;
- використовуючи команди редагування тіл (об'єднання, віднімання, переріз) можна створювати модифікації многогранників, що важливо в архітектурі;
- час, необхідний для побудови моделі ікосаедра, найскладнішого з правильних многогранників, не перевищує 10 хвилин.

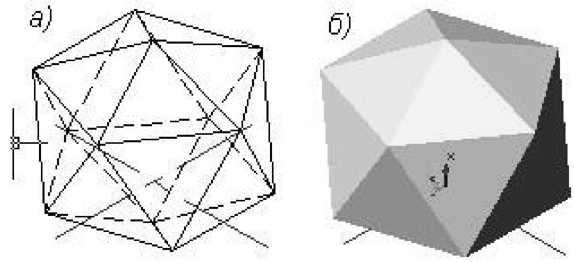

Рис. 6. Ікосаедр

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Венинджер, М. Модели многогранников [Текст] / М. Венинджер. – М.: Мир, 1974. – С. 7-29.
2. Быстрякова, М. З. Методические указания к выполнению работы «Модели поверхностей многогранников» [Текст] / М. З. Быстрякова. – Д.: Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры, 2000. – С. 3-14.
3. Потишко, Ф. В. Справочник по инженерной графике [Текст] / Ф. В. Потишко, Д. П. Крушевская. – К.: Будівельник, 1983. – С. 250-251.
4. Клейн, Ф. Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени [Текст] / Ф. Клейн; пер. с нем. под ред. А. Н. Тюрина. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – С. 3-5.
5. Польшау, А. Н. Начала Начертательной Геометрии, краткая теория кривых и способы их черчения [Текст] / А. Н. Польшау. – Сумы: Типолитогр. К. М. Пашкова, 1907. – С. 93-95.

Надійшла до редколегії 25.03.2009.