

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С РАЗДЕЛЬНЫМ ОПРЕДЕЛЕНИЕМ ЧИСТЫХ И ОБЪЕМНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

У статті запропоновано розділити загальну деформацію пружного середовища на дві незалежні складові – чисту і об'ємну, які підкоряються різним фізичним залежностям і визначаються окремо. Дається порівняльний аналіз отриманих результатів.

В статье предложено разделить общую деформацию упругой среды на две независимые составляющие – чистую и объемную, которые подчиняются различным физическим зависимостям и определяются отдельно. Дается сравнительный анализ полученных результатов.

In the article it is proposed to divide the overall deformation of elastic medium on two independent components – pure and voluminous ones, which are subjected to different physical relationships and determined separately. A comparative analysis of the results obtained is given.

Исходные положения

Работа относится к области исследований напряженно-деформированного состояния упругих массивов значительных размеров, т.е. к так называемой классической теории упругости.

При деформировании упругой среды наблюдаются два явления:

1) явление чистого изменения формы (или чистой деформации), не сопровождаемое изменением объема;

2) явление объемного деформирования, вызванное изменением объема из-за изменения плотности среды.

В соответствии с этим полный тензор деформаций делится на два независимых тензора, определяемые самостоятельно: тензор чистого формоизменения и тензор объемного деформирования. Соответствующие компоненты перемещений также будем определять отдельно с последующим их алгебраическим суммированием [1, 2].

Начнем с рассмотрения чистого формоизменения.

Можно показать, что вектор смещений от чистого формоизменения должен удовлетворять условию:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{F}^c &= \frac{\partial U^c}{\partial x} + \frac{\partial V^c}{\partial y} + \frac{\partial W^c}{\partial z} = \\ &= \varepsilon_x^c + \varepsilon_y^c + \varepsilon_z^c = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где: U^c ; V^c ; W^c и ε_x^c ; ε_y^c ; ε_z^c – соответственно компоненты перемещений и относительные линейные деформации.

Теория деформаций выделяет, кроме линейных и угловых, еще три компоненты деформа-

ции, определяющие углы поворотов диагоналей сторон элементарного «кубика»:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \frac{\partial V^c}{\partial z} - \frac{\partial W^c}{\partial y} = 0; \\ \omega_y &= \frac{\partial W^c}{\partial x} - \frac{\partial U^c}{\partial z} = 0; \\ \omega_z &= \frac{\partial U^c}{\partial y} - \frac{\partial V^c}{\partial x} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Эти деформации, как отмечается в [3], самостоятельного значения не имеют и на напряженно-деформированное состояние не влияют.

В связи с этим, логично предположить, что чистое формоизменение не сопровождается поворотом диагоналей сторон элемента, т.е.:

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0. \quad (3)$$

Следствием такого предположения оказывается полная зависимость смещений чистого формоизменения от некоторого потенциала f :

$$\left. \begin{aligned} U^c &= -k^c \frac{\partial f}{\partial x}; \\ V^c &= -k^c \frac{\partial f}{\partial y}; \\ W^c &= -k^c \frac{\partial f}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

т.к. только в этом случае возможно выполнение условия (3). В формулах (4) k^c – коэффициент пропорциональности.

Анализируя имеющиеся решения теории упругости, можно убедиться, что в них первый инвариант напряженного состояния упругой среды,

полностью характеризующий ее напряженное состояние, представляет гармоническую функцию, обладающую, как известно, свойством потенциала. Поэтому очевидным является принятие в качестве потенциала чистого формоизменения функции:

$$f = \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}J_1, \quad (5)$$

представляющей среднее давление в любой точке массива. В дальнейшем будем называть ее функцией давления или просто давлением.

Исходя из вышесказанного, полный вектор смещения любой точки среды от чистого формоизменения будет:

$$\bar{F}^c = -k^c \text{grad } \sigma, \quad (6)$$

где коэффициент k^c ($\text{м}^4/\text{Н}$) принимает вполне определенное значение: это коэффициент чистого формоизменения, физико-механическая константа среды, ее смысл – смещение точек среды от единичного градиента давления.

Выражение (6) представляет физическую зависимость для чистого формоизменения, по которой смещение любой точки упругого массива линейно зависит от градиента давлений.

Таким образом, компоненты смещения точек от чистого формоизменения и соответствующий тензор деформаций являются следствием действия градиентов давления, они не сопровождаются изменением плотности среды и интегрально зависят от напряженного состояния всего массива.

Рассмотрим теперь деформирование от изменения плотности среды (объемное ее деформирование).

Исходя из обобщенного закона Гука, объемную относительную деформацию в любой точке среды можно записать в виде:

$$\Theta = \varepsilon_x^0 + \varepsilon_y^0 + \varepsilon_z^0 = \frac{J_1}{E}(1 - 2\nu) = \frac{J_1}{E^0}, \quad (7)$$

где J_1 – значение первого инварианта напряженного состояния в конкретной точке.

Учитывая, что давление в любой точке массива мы приняли ранее равным трети первого инварианта напряженного состояния, объемная относительная деформация будет равна:

$$\Theta = \varepsilon_x^0 + \varepsilon_y^0 + \varepsilon_z^0 = \frac{J_1}{E^0} = \frac{3\sigma}{E^0} = k^0 \sigma, \quad (8)$$

где k^0 ($\text{м}^2/\text{Н}$) – коэффициент объемного деформирования, физико-механическая константа

среды, ее смысл: объемная относительная деформация от единичного давления в точке.

Выражение (8) представляет физическую зависимость для объемной деформации.

Переход от объемной относительной деформации к компонентам линейных относительных деформаций осуществляется по принципу: линейная относительная деформация от изменения объема, совпадающая с направлением внешней нагрузки, равна по величине объемной относительной деформации, а две другие линейные деформации при этом равны нулю:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_i^0 &= \Theta = k^0 \sigma; \\ \varepsilon_j^0 &= \varepsilon_k^0 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Перемещения точек среды от объемного деформирования также совпадают с направлением внешней нагрузки и определяются соответствующим интегрированием:

$$\bar{F}^0 = k^0 \int \sigma di + c. \quad (10)$$

Очевидно, что углы поворота диагоналей сторон элементарного «кубика» от объемного деформирования не будут равными нулю, как при чистом формоизменении, а по величине они будут совпадать с соответствующими угловыми деформациями:

$$\left. \begin{aligned} \omega_i &= \gamma_{j,k} = 0; \\ \omega_j &= \gamma_{ki} = \frac{\partial F^0}{\partial k}; \\ \omega_k &= \gamma_{ij} = \frac{\partial F^0}{\partial j}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Таким образом, порядок решения конкретной задачи по определению напряженно-деформированного состояния упругого массива сводится к выполнению следующих операций.

1. Задаются граничные условия для функции давления, по которым она определяется сама.

2. Определяются перемещения чистого формоизменения и (при необходимости) тензор относительных деформаций.

3. Определяются относительные объемные деформации в массиве, а по ним – соответствующие линейные относительные деформации.

4. Определяются перемещения в среде от объемного ее деформирования, а по ним (при необходимости) – соответствующие повороты диагоналей сторон элементов и угловые де-

формации.

5. Полные компоненты перемещений точек упругой среды определяются суммированием перемещений от чистого и объемного деформирования:

$$\left. \begin{aligned} U &= U^c + U^0; \\ V &= V^c + V^0; \\ W &= W^c + W^0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

При этом очевидно, что компоненты напряженного состояния в массиве в отдельности не оказывают влияния на его деформированное состояние, поэтому их определение не является обязательным.

Задачи, решенные предлагаемым методом

I. Упругое полупространство

a) пространственное деформирование

Задача 1. На поверхности полупространства действует направленная под любым углом к нему сосредоточенная сила P (рис. 1).

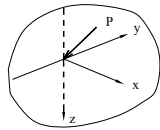


Рис. 1

Задача 2. На поверхности действует направленная по нормали к нему нагрузка P , равномерно распределенная по линии конечной длины (рис. 2).

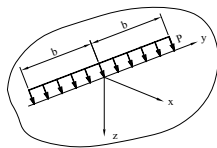


Рис. 2

Задача 3. На поверхности действует направленная по нормали к нему нагрузка p , равномерно распределенная по площади прямоугольника (рис. 3).

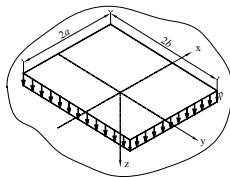


Рис. 3

b) плоское деформирование

Задача 4. Нагрузка P равномерной интенсивности распределена вдоль бесконечной линии на поверхности (рис. 4).

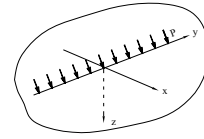


Рис. 4

Задача 5. Нагрузка p равномерной интенсивности распределена по полосе конечной ширины и бесконечной длины.

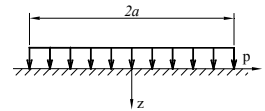


Рис. 5

Решения задач 1 – 5 получены соответствующим интегрированием частного случая задачи 1, когда нагрузка действует по нормали к поверхности полупространства.

II. Упругий массив прямоугольного поперечного сечения бесконечной длины

Плоское деформирование

Задача 6. Нагрузка P равномерной интенсивности распределена вдоль бесконечной линии на поверхности (рис. 6).

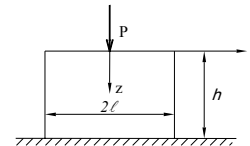


Рис. 6

Задача 7. Нагрузка p равномерной интенсивности распределена по полосе конечной ширины и бесконечной длины. (рис. 7).

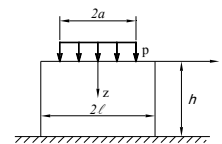


Рис. 7

Задачи 6 и 7 решены для трех случаев на контакте:

- 1) контакт допускает только вертикальные перемещения;
- 2) контакт допускает только горизонтальные перемещения;
- 3) контакт допускает частично горизон-

тальные и вертикальные перемещения.

III. Упругий бесконечно простирающийся массив ограниченной толщины

Плоское деформирование

Задача 8. Нагрузка P равномерной интенсивности распределена вдоль бесконечной линии на поверхности (рис. 8).

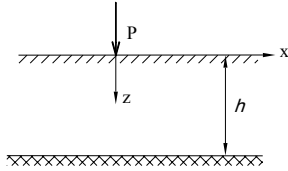


Рис. 8

Задача 9. Нагрузка p равномерной интенсивности распределена по полосе постоянной ширины и бесконечной длины. (рис. 9).

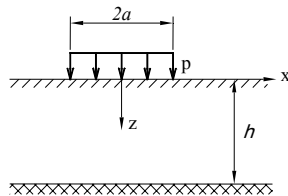


Рис. 9

Решения задач 8 и 9 получены предельным переходом из задач 6 и 7 соответственно путем расширения l от $-\infty$ до $+\infty$.

IV. Упругое бесконечное пространство

Задача 10. Нагрузка P сосредоточена внутри бесконечного пространства. (рис. 10).

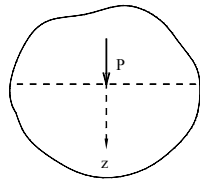


Рис. 10

Решение этой задачи получаем из задачи 1 путем элементарного сложения двух полупространств и продления координаты z до $-\infty$. Для упрощения записей следует воспользоваться частным случаем, когда сила P направлена по нормали к поверхности.

Сравнительный анализ решений

Для сравнения и анализа получаемых результатов возьмем два решения одной и той же задачи, когда на поверхности полупространства действует по нормали к нему сосредоточенная

сила P : известное решение Буссинеска (13) и полученное решение (14).

Решение Буссинеска

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{3P}{2\pi} \left\{ \frac{x^2 z}{R^5} - \frac{1-2\nu}{3} \times \right. \\
 &\times \left[\frac{R^2 - R \cdot z - z^2}{R^3 (R+z)} - \frac{x^2 (2R+z)}{R^3 (R+z)^2} \right] \left. \right\}; \\
 \sigma_y &= \frac{3P}{2\pi} \left\{ \frac{y^2 z}{R^5} - \frac{1-2\nu}{3} \times \right. \\
 &\times \left[\frac{R^2 - R \cdot z - z^2}{R^3 (R+z)} - \frac{y^2 (2R+z)}{R^3 (R+z)^2} \right] \left. \right\}; \\
 \sigma_z &= \frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{R^5}; \quad \tau_{xz} = \frac{3P}{2\pi} \frac{x \cdot z^2}{R^5}; \\
 \tau_{yz} &= \frac{3P}{2\pi} \frac{y \cdot z^2}{R^5}; \\
 U &= \frac{P}{4\pi G} \left[\frac{x \cdot z}{R^3} - (1-2\nu) \frac{x}{R(R+z)} \right]; \\
 V &= \frac{P}{4\pi G} \left[\frac{y \cdot z}{R^3} - (1-2\nu) \frac{y}{R(R+z)} \right]; \\
 W &= \frac{P}{4\pi G} \left[\frac{z}{R^3} - (1-\nu) \frac{2}{R} \right]; \\
 \sigma &= \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \\
 &= \frac{P}{2\pi R^3} - \frac{1-2\nu}{3} \frac{P}{2\pi R^3} = \frac{1+\nu}{3} \frac{P}{\pi R^3}; \\
 R &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}.
 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Полученное решение (см. выражения (14))

В результате их детального анализа приходим к следующим выводам.

1. В решении Буссинеска, как и во всех задачах теории упругости, напряженное состояние в изотропной среде зависит от деформативной характеристики ν (коэффициента Пуассона), т.е. для любой среды с отличным ν – свое решение. В предлагаемых решениях в изотропной среде напряженное состояние не зависит от деформативных характеристик.

2. В решении Буссинеска не выполняется третий закон механики. Чтобы в этом убедиться, мысленно вырежем часть полупространства

вместе с силой P любой замкнутой поверхностью, а действие отброшенной части заменим множеством сил q_i , сосредоточенных на малых площадках (рис. 11). Реактивная сила R , уравновешивающая внешнюю силу P , должна быть равнодействующей сил q_i . Но равнодействующую имеет только та система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке.

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{P}{2\pi} \frac{z}{R^3}; \\ U^c &= -k^c \frac{\partial \sigma}{\partial x} = k^c \frac{9P}{2\pi} \frac{x \cdot z}{R^5}; \\ V^c &= -k^c \frac{\partial \sigma}{\partial y} = k^c \frac{9P}{2\pi} \frac{y \cdot z}{R^5}; \\ W^c &= -k^c \frac{\partial \sigma}{\partial z} = k^c \frac{9P}{2\pi} \left[\frac{3z^2 - R^2}{R^5} \right]; \\ W^0 &= k^0 \frac{P}{2\pi} \frac{1}{R}; \\ \sigma_x &= \frac{3P}{2\pi} \frac{x^2 z}{R^5}; \quad \sigma_y = \frac{3P}{2\pi} \frac{y^2 z}{R^5}; \\ \sigma_z &= \frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{R^5}; \quad \tau_{xy} = \frac{3P}{2\pi} \frac{x \cdot y \cdot z}{R^5}; \\ \tau_{yz} &= \frac{3P}{2\pi} \frac{y \cdot z^2}{R^5}; \quad \tau_{zx} = \frac{3P}{2\pi} \frac{x \cdot z^2}{R^5}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

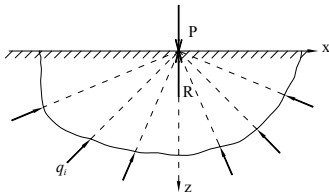


Рис. 11

В решении Буссинеска силы q_i не пересекаются в одной точке, поэтому они не имеют равнодействующей.

В предлагаемом решении силы q_i пересекаются в точке приложения силы P .

3. В решении Буссинеска имеется разрыв сплошности: горизонтальные перемещения поверхности UR (рис. 12) направлены к точке приложения сжимающей силы и от нее – при растягивающей силе.

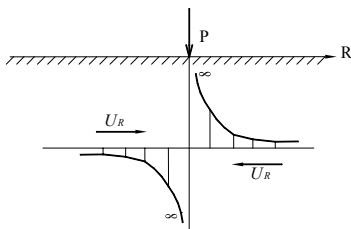


Рис. 12

Если распространить решение Буссинеска на действие любой распределенной нагрузки (например, равномерное распределение по площади круга [4]), то разрыв в центре сохранится (рис. 13).

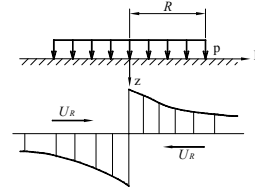


Рис. 13

В предлагаемом решении горизонтальные перемещения поверхности вообще отсутствуют.

4. Если к напряженному состоянию подойти с позиции потенциала, то функцией давления в решении Буссинеска будет:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{P}{2\pi} \frac{z}{R^3} - \frac{1-2\nu}{3} \frac{P}{2\pi} \frac{z}{R^3} = \\ &= \frac{2(1+\nu)}{3} \frac{P}{2\pi} \frac{z}{R^3}. \end{aligned} \quad (15)$$

Первый член в (15) представляет потенциал поля от сосредоточенной силы P , а второй – от силы

$$-\frac{1-\nu}{3} P, \quad (16)$$

приложенной в той же точке, но в противоположном направлении, поэтому источником потенциала в действительности является гораздо меньшая сила.

В предлагаемом решении это исключается.

5. В известных решениях теории упругости, для которых логичной является взаимная связь, т.е. возможен предельный переход от одного к другому, такая взаимосвязь не всегда существует.

Пример. Напряженное состояние полупространства, вся поверхность которого нагружена равномерно распределенной нагрузкой p , элементарно определяется с использованием существующих физических зависимостей:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= p; \quad \sigma_x = \sigma_y = \frac{\nu}{1-\nu} p; \\ \sigma &= \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1(1+\nu)}{3(1-\nu)} p. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Если функцию давления определить путем двойного предельного интегрирования решения

Буссинеска, то получим:

$$\sigma = \frac{2}{3}(1+\nu)p \quad \sigma_z = p; \quad \sigma_x = \sigma_y = \frac{1+2\nu}{2}p, \quad (18)$$

т.е. приходим к различному результату.

В предлагаемом решении этот вопрос отпадает, там предельное интегрирование всех компонентов напряжений в отдельности и функции давления дает:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p; \quad \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = p;$$
$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0. \quad (19)$$

Выводы

Исходя из вышеизложенного, становится очевидным, что источником перечисленных выше недостатков решений задач современной теории упругости является неточное отражение деформирования упругой среды в принятых физических зависимостях. Наблюдаемые при деформировании два явления подчиняются различным физическим зависимостям, которые невозможно отразить одной обобщенной феноменологической зависимостью, поэтому их раздельное определение становится реальностью. При этом следует особо отметить, что предлагаемые физические зависимости (6) и (9) являются линейными, что ни в коем случае не противоречит закону Гука в его начальном толковании.

Применение предлагаемого подхода к решению задач теории упругости дает следующие

преимущества перед существующим:

1. В получаемых решениях устраняется ряд принципиальных недостатков, имеющихся в существующих решениях и связанных с нарушением законов механики.

2. Процесс решения задач и получаемые результаты более просты.

3. Значительно расширяется круг задач, решаемых аналитически. В частности, для ортотропных по физико-механическим характеристикам сред задачи решаются так же просто, как и для изотропных.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бадалаха, И. К. Постановка и решение задач теории упругости с использованием потенциала [Текст] / И. К. Бадалаха // Дніпропетр. держ. техн. ун-т заліз. трансп. Зб. наук. пр. Будівництво. – 1999. – Вип. 6. – С. 173-184.
2. Бадалаха, И. К. Определение напряженно-деформированного состояния упругих массивов путем выделения объемных и сдвиговых деформаций [Текст] / И. К. Бадалаха // Ин-т геотехнической механики НАН Украины, межвед. сб. науч. тр. – 2000. – Вып. 18. – Д.: Поліграфіст, 2000. – С. 119-127.
3. Безухов, Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести [Текст] / Н. И. Безухов. – М.: Гос. изд-во «Высш. шк.», 1961. – 537 с.
4. Тимошенко, С. П. Теория упругости [Текст] / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер.; пер. с англ. – М.: Главн. ред. физ.-мат. литературы изд-ва «Наука», 1975. – 576 с.

Поступила в редколлегию 24.03.2009.