УДК 514.74:531.3

В. В. КРАВЕЦ (УГХТУ, Днепропетровск), Т. В. КРАВЕЦ, А. В. ХАРЧЕНКО (ДИИТ)

МОНОМИАЛЬНЫЕ (1, 0, –1)-МАТРИЦЫ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА, ИЗОМОРФНЫЕ ГРУППЕ КВАТЕРНИОНОВ

Розглядається множина прямих і протилежних елементів, які співставляються чотиривимірному ортонормованому базису. На цій кінцевій множині формується сукупність парних підстановок четвертої степені у вигляді добутку двох транспозицій. Кінцева множина підстановок представляється мономіальними (1, 0, –1)-матрицями четвертого порядку. Встановлюється ізоморфність групи кватерніонів і двох некомутативних підгруп 8-го порядку. Досліджуються властивості чотирьох сукупностей базисних матриць, які відповідають кватерніонним матрицям.

Рассматривается множество прямых и противоположных элементов, сопоставляемых четырехмерному ортонормированному базису. На этом конечном множестве формируется совокупность четных подстановок 4-й степени в виде произведения двух транспозиций. Конечное множество подстановок представляется мономиальными (1, 0, –1)-матрицами четвертого порядка. Устанавливается изоморфность группы кватернионов и двух некоммутативных подгрупп 8-го порядка. Исследуются свойства четырех совокупностей базисных матриц, соответствующих кватернионным матрицам.

A set of direct and inverse elements are examined and compared with a four-dimensional orthonormal basis. The aggregate of even substitutions of fourth power as a product of two transpositions are formed on this finite set. The finite set of substitutions is represented by monomial (1, 0, –1)-matrices of fourth order. An isomorphism of quaternion group and two noncommutative subgroups of eighth order is determined. Properties of four aggregates of basic matrices, corresponding to quaternion matrices, are examined.

Введение

В вычислительном эксперименте [1, 9] к форме представления алгоритмов предъявляются специфические требования, удовлетворить которые оказывается возможным удачным выбором переменных, новой организацией вычислительных процессов, обусловленной спецификой этих переменных, применением матричного исчисления, в частности исчисления кватернионных матриц [7, 10, 11]. Элементы исчисления кватернионных матриц получили признание и применение не только в аналитической механике при построении математических моделей, по существу заменяя векторное исчисление, но и оказались хорошо адаптированным к современной технологии проведения вычислительного эксперимента по исследованию нелинейной динамики сложных механических систем в пространственном движении. При этом математические модели и соответствующие им алгоритмы обретают симметрию, компактность, универсальность, что ускоряет программирование, отладку вычислительного процесса, обеспечивают удобства в работе, т.е. повышает производительность интеллектуального труда [2, 3, 8].

Постановка задачи

На множестве мономиальных (1, 0, –1)-матриц [12] четвертого порядка, представляющих тождественные и четные подстановки четвертой степени на множестве элементов четырехмерного ортонормированного базиса и противоположных элементов, найти некоммутативные подгруппы, изоморфные группе кватернионов и составляющие базис совокупности четырех кватернионных матриц. Исследовать свойства базисных матриц.

Решение задачи

Известно, что кватернион определяется как гиперкомплексное число:

$$e_0a_0 + e_1a_1 + e_2a_2 + e_3a_3$$

(используется также запись: $1a_0 + ia_1 + ja_2 + ka_3$), где e_0a_0 ($1a_0$) – скалярная, $e_1a_1 + e_2a_2 + e_3a_3$ ($ia_1 + ja_2 + ka_3$) – векторная часть кватерниона, a_0, a_1, a_2, a_3 – действительные числа, e_0, e_1, e_2, e_3 $(1, i, j, k)$ – элементы базиса. Здесь e_0 (1) – вещественная единица, e_1, e_2, e_3 (i, j, k) могут трактоваться как специальные кватернионы (гиперкомплексные единицы), либо как базисные векторы трехмерного пространства

[5, 10]. Для элементов базиса пространства кватернионов приняты специальные правила умножения [6]:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{e}_1^2=\mathrm{e}_2^2=\mathrm{e}_3^2=-\mathrm{e}_0; \\
&e_1e_2=-e_2e_1=e_3; \\
&e_2e_3=-e_3e_2=e_1; \\
&e_3e_1=-e_1e_3=e_2;
\end{aligned}
\quad
\left(
\begin{aligned}
&i^2=l^2=k^2=-1; \\
&ij=-ij=k; \\
&jk=-kj=i; \\
&ki=-ik=j.
\end{aligned}
\right)
$$

Множество, состоящее из восьми элементов

$$e_0, e_1, e_2, e_3, \quad -e_0, -e_1, -e_2, -e_3 \ ,$$

$$(1,\ i,\ j,\ k), \quad (-1,\ -i, -j,\ -k)$$

(здесь знак минус служит различительным значком), составляет группу кватернионов с известной таблицей умножения [4].

Рассматривается множество мономиальных (1, 0, –1)-матриц, содержащих в каждой строке и столбце в точности одну единицу или минус единицу. Находятся семь подгрупп восьмого порядка, из которых пять подгрупп являются Абелевыми, а две некоммутативными (табл. 1).

Элементам базиса пространства кватернионов сопоставляются элементы найденных некоммутативных подгрупп восьмого порядка. Приводятся варианты сопоставления элементов базиса пространства кватернионов и элементов полученных некоммутативных подгрупп (табл. 2).

Таблица 1

Таблицы умножения некоммутативных подгрупп порядка 8

*	A_0	T_1	R_2	S_3	$\bar{A}_0$	$\bar{T}_1$	$\bar{R}_2$	$\bar{S}_3$
A_0	A_0	T_1	R_2	S_3	$\bar{A}_0$	$\bar{T}_1$	$\bar{R}_2$	$\bar{S}_3$
T_1	T_1	$\bar{A}_0$	$\bar{S}_3$	R_2	$\bar{T}_1$	A_0	S_3	$\bar{R}_2$
R_2	R_2	S_3	$\bar{A}_0$	$\bar{T}_1$	$\bar{R}_2$	$\bar{S}_3$	A_0	T_1
S_3	S_3	$\bar{R}_2$	T_1	$\bar{A}_0$	$\bar{S}_3$	R_2	$\bar{T}_1$	A_0
$\bar{A}_0$	$\bar{A}_0$	$\bar{T}_1$	$\bar{R}_2$	$\bar{S}_3$	A_0	T_1	R_2	S_3
$\bar{T}_1$	$\bar{T}_1$	A_0	S_3	$\bar{R}_2$	T_1	$\bar{A}_0$	$\bar{S}_3$	R_2
$\bar{R}_2$	$\bar{R}_2$	$\bar{S}_3$	A_0	T_1	R_2	S_3	$\bar{A}_0$	$\bar{T}_1$
$\bar{S}_3$	$\bar{S}_3$	R_2	$\bar{T}_1$	A_0	S_3	$\bar{R}_2$	T_1	$\bar{A}_0$

	A_0	S_1	T_2	R_3	$\bar{A}_0$	$\bar{S}_1$	$\bar{T}_2$	$\bar{R}_3$
A_0	A_0	S_1	T_2	R_3	$\bar{A}_0$	$\bar{S}_1$	$\bar{T}_2$	$\bar{R}_3$
S_1	S_1	$\bar{A}_0$	R_3	$\bar{T}_2$	$\bar{S}_1$	A_0	$\bar{R}_3$	T_2
T_2	T_2	$\bar{R}_3$	$\bar{A}_0$	S_1	T_2	$\bar{R}_3$	$\bar{A}_0$	S_1
R_3	R_3	T_2	$\bar{S}_1$	$\bar{A}_0$	$\bar{R}_3$	$\bar{T}_2$	S_1	A_0
$\bar{A}_0$	$\bar{A}_0$	$\bar{S}_1$	$\bar{T}_2$	$\bar{R}_3$	A_0	S_1	T_2	R_3
$\bar{S}_1$	$\bar{S}_1$	A_0	$\bar{R}_3$	T_2	S_1	$\bar{A}_0$	R_3	$\bar{T}_2$
$\bar{T}_2$	$\bar{T}_2$	R_3	A_0	$\bar{S}_1$	$\bar{T}_2$	R_3	A_0	$\bar{S}_1$
$\bar{R}_3$	$\bar{R}_3$	$\bar{T}_2$	S_1	A_0	R_3	T_2	$\bar{S}_1$	$\bar{A}_0$

Таблица 2

Варианты сопоставления элементов базиса пространства кватернионов с элементами некоммутативных подгрупп порядка 8

Элементы базиса	Элементы подгрупп																							
1	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0
i	S_1	T_2	R_3	S_1	T_2	$\bar{R}_3$	S_1	$\bar{T}_2$	R_3	$\bar{S}_1$	T_2	R_3	S_1	$\bar{T}_2$	$\bar{R}_3$	$\bar{S}_1$	T_2	$\bar{R}_3$	$\bar{S}_1$	$\bar{T}_2$	R_3	$\bar{S}_1$	$\bar{T}_2$	$\bar{R}_3$
j	T_2	R_3	S_1	$\bar{R}_3$	S_1	T_2	R_3	S_1	$\bar{T}_2$	R_3	$\bar{S}_1$	T_2	$\bar{T}_2$	$\bar{R}_3$	S_1	T_2	$\bar{R}_3$	$\bar{S}_1$	$\bar{T}_2$	R_3	$\bar{S}_1$	$\bar{R}_3$	$\bar{S}_1$	$\bar{T}_2$
k	R_3	S_1	T_2	T_2	$\bar{R}_3$	S_1	$\bar{T}_2$	R_3	S_1	T_2	R_3	$\bar{S}_1$	$\bar{R}_3$	S_1	$\bar{T}_2$	$\bar{R}_3$	$\bar{S}_1$	T_2	R_3	$\bar{S}_1$	$\bar{T}_2$	$\bar{T}_2$	$\bar{R}_3$	$\bar{S}_1$
№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16*	17	18	19	20	21	22	23	24
1	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0
i	T_1	S_3	R_2	T_1	R_2	$\bar{S}_3$	T_1	$\bar{R}_2$	S_3	$\bar{T}_1$	R_2	S_3	T_1	$\bar{S}_3$	$\bar{R}_2$	$\bar{T}_1$	$\bar{S}_3$	R_2	$\bar{T}_1$	S_3	$\bar{R}_2$	$\bar{T}_1$	$\bar{R}_2$	$\bar{S}_3$
j	S_3	R_2	T_1	R_2	$\bar{S}_3$	T_1	$\bar{R}_2$	S_3	T_1	R_2	S_3	$\bar{T}_1$	$\bar{S}_3$	$\bar{R}_2$	T_1	$\bar{S}_3$	R_2	$\bar{T}_1$	S_3	$\bar{R}_2$	$\bar{T}_1$	$\bar{R}_2$	$\bar{S}_3$	$\bar{T}_1$
k	R_2	T_1	S_3	$\bar{S}_3$	T_1	R_2	S_3	T_1	$\bar{R}_2$	S_3	$\bar{T}_1$	R_2	$\bar{R}_2$	T_1	$\bar{S}_3$	R_2	$\bar{T}_1$	S_3	$\bar{R}_2$	$\bar{T}_1$	S_3	$\bar{S}_3$	$\bar{T}_1$	$\bar{R}_2$
№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10*	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

Для каждой из двух некоммутативных подгрупп выбирается вариант сопоставления, удовлетворяющий критерию симметрии.

Вводятся целесообразные обозначения на основе операции транспонирования (табл. 3).

Таблица 3

Мономиальные матрицы, эквивалентные элементам пространства кватернионов

Элементы кватерниона	Базисные матрицы	Обозначения
1	$A_0 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$	$A_0 = E_0$
i	$\overline{T}_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$ $\overline{S}_1 = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$	$\overline{T}_1 = E_1,\ \overline{S}_1 = {}^tE_1$
j	$R_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$ $T_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$	$R_2 = E_2,\ T_2 = {}^tE_2$
k	$S_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$ $\overline{R}_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$	$S_3 = E_3,\ \overline{R}_3 = {}^tE_3$
-1	$\overline{A}_0 = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$	$\overline{A}_0 = I$
-*i*	$T_1 = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$ $S_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$	$T_1 = {}^tE_1^t,\ S_1 = E_1^t$
-*j*	$\overline{R}_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$ $\overline{T}_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$	$\overline{R}_2 = {}^tE_2^t,\ \overline{T}_2 = E_2^t$
-*k*	$\overline{S}_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$ $R_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$	$\overline{S}_3 = {}^tE_3^t,\ R_3 = E_3^t$

Эти обозначения отражают возможность преобразования базисных матриц применением вводимых операций транспонирования: полного (перестановка всех строк и столбцов), внешнего (перестановка первой строки и столбца) и внутреннего (перестановка элементов, исключая первую строку и столбец). Из сравнения таблицы умножения группы кватернионов и таблиц умножения некоммутативных подгрупп восьмого порядка устанавливается их изоморфность (табл. 4).

Кватерниону и сопряженному кватерниону сопоставляются четыре матрицы упорядоченной структуры:

$$\begin{Vmatrix} A \\ {}^tA^t \\ {}^tA \\ A^t \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} E_0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ E_0 & {}^tE_1^t & {}^tE_2^t & {}^tE_3^t \\ E_0 & {}^tE_1 & {}^tE_2 & {}^tE_3 \\ E_0 & E_1^t & E_2^t & E_3^t \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Vmatrix}$$

Составленные четыре вида упорядоченных матриц, эквивалентных кватернионам, преобразуются одна в другую применением предложенных операций полного, внешнего и внутреннего транспонирования. С помощью составленных таблиц умножения исследуются свойства четырех совокупностей базисных матриц: находятся аддитивно обратные, мультипликативно обратные, ортогональные, кососимметричные матрицы, устанавливаются коммутативные произведения, правила полного, внешнего и внутреннего транспонирования произведений.

Выводы

Найдены две некоммутативные подгруппы на множестве мономиальных (1, 0, –1)-матриц четвертого порядка, изоморфные группе кватернионов и составляющие базис введенной совокупности четырех кватернионных матриц. Введенные кватернионные матрицы удовлетворяют критерию упорядоченности, симметрии, что позволяет применить к ним операции внешнего, внутреннего и полного транспонирования. На основе составленных таблиц умножения базисных матриц определены аддитивно-обратные, мультипликативно-обратные, ортогональные, кососимметричные матрицы, а также установлены коммутативные произведения и правила внешнего, внутреннего и полного транспонирования рассмотренных произведений.

Таблица 4

Таблица умножения базисных матриц, соответствующих кватерниону и сопряженному кватерниону

*	E_0	E_1	E_2	E_3	I	${}^tE_1^t$	${}^tE_2^t$	${}^tE_3^t$
E_0	E_0	E_1	E_2	E_3	I	${}^tE_1^t$	${}^tE_2^t$	${}^tE_3^t$
E_1	E_1	I	E_3	${}^tE_2^t$	${}^tE_1^t$	E_0	${}^tE_3^t$	E_2
E_2	E_2	${}^tE_3^t$	I	E_1	${}^tE_2^t$	E_3	E_0	${}^tE_1^t$
E_3	E_3	E_2	${}^tE_1^t$	I	${}^tE_3^t$	${}^tE_2^t$	E_1	E_0
I	I	${}^tE_1^t$	${}^tE_2^t$	${}^tE_3^t$	E_0	E_1	E_2	E_3
${}^tE_1^t$	${}^tE_1^t$	E_0	${}^tE_3^t$	E_2	E_1	I	E_3	${}^tE_2^t$
${}^tE_2^t$	${}^tE_2^t$	E_3	E_0	${}^tE_1^t$	E_2	${}^tE_3^t$	I	E_1
${}^tE_3^t$	${}^tE_3^t$	${}^tE_2^t$	E_1	E_0	E_3	E_2	${}^tE_1^t$	I

*	E_0	E_1^t	E_2^t	E_3^t	I	${}^tE_1$	${}^tE_2$	${}^tE_3$
E_0	E_0	E_1^t	E_2^t	E_3^t	I	${}^tE_1$	${}^tE_2$	${}^tE_3$
E_1	E_1^t	I	${}^tE_3$	E_2^t	${}^tE_1$	E_0	E_3^t	${}^tE_2$
E_2	E_2^t	E_3^t	I	${}^tE_1$	${}^tE_2$	${}^tE_3$	E_0	E_1^t
E_3	E_3^t	${}^tE_2$	E_1^t	I	${}^tE_3$	E_2^t	${}^tE_1$	E_0
I	I	${}^tE_1$	${}^tE_2$	${}^tE_3$	E_0	E_1^t	E_2^t	E_3^t
${}^tE_1$	${}^tE_1$	E_0	E_3^t	${}^tE_2$	E_1^t	I	${}^tE_3$	E_2^t
${}^tE_2$	${}^tE_2$	${}^tE_3$	E_0	E_1^t	E_2^t	E_3^t	I	${}^tE_1$
${}^tE_3$	${}^tE_3$	E_2^t	${}^tE_1$	E_0	E_3^t	${}^tE_2$	E_1^t	I

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Арутюнов, С. К. Пакет прикладных программ МДССО [Текст] / С. К. Арутюнов, Е. А. Дерюгин // Пакеты прикладных программ. Программное обеспечение вычислительного эксперимента. – М.: Наука, 1987. – С. 51-59.
2. Блехман, И. И. Механика и прикладная математика: Логика и особенности приложений математики [Текст] / И. И. Блехман, А. Д. Мышкис, Я. Г. Пановко. – М.: Наука. Главная ред. физ.-мат. лит., 1983. – 328 с.
3. Глушков, В. М. Фундаментальные исследования и технология программирования [Текст] / В. М. Глушков // Программирование. – 1980. – № 2. – С. 3-13.
4. Гроссман, И. Группы и их графы [Текст] : [пер. с англ.] / И. Гроссман, В. Магнус. – М.: Мир, 1971. – 248 с.
5. Ишлинский, А. Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация [Текст] / А. Ю. Ишлинский. – М.: Наука, 1976. – 670 с.
6. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров [Текст] / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1984. – 832 с.
7. Кравець, Т. В. Представлення кватерніонними матрицями послідовності скінчених поворотів твердого тіла у просторі [Текст] / Т. В. Кравець // Міжн. конф. з автоматичного управління «Автоматика-2000» : праці у 7-ми т. – Т. 2. – Львів: Держ. НДІ Інформаційної інфраструктури, 2000. – С. 140-145.

8. Кравец, В. В. Об оценке центробежных, кориолисовых и гироскопических сил при скоростном движении железнодорожного экипажа [Текст] / В. В. Кравец, Т. В. Кравец // Прикладная механика. – 2008. – Том 44. – № 1. – С. 123-132.
9. Моисеев, Н. Н. Математика ставит експеримент [Текст] / Н. Н. Моисеев. – М.: 1979. – 224 с.
10. Онищенко, С. М. Применение гиперкомплексных чисел в теории инерциальной навигации. Автономные системы [Текст] / С. М. Онищенко. – К.: Наук. думка, 1983. – 208 с.
11. Плотников, П. К. Применение кватернионных матриц в теории конечного поворота твердого тела [Текст] / П. К. Плотников, Ю. Н. Челноков // Сб. науч.-метод. статей по теор. мех. – 1981. – Вып. 11. – С. 122-129.
12. Тараканов, В. Е. Комбинаторные задачи и (0, 1)-матрицы [Текст] / В. Е. Тараканов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. – 192 с.

Поступила в редколлегию 08.07.2009.
Принята к печати 23.07.2009.