УДК 004:512

В. М. ІЛЬМАН, В. В. СКАЛОЗУБ (ДІІТ)

ІНТЕРВАЛЬНІ ОБ’ЄКТИ ТА ЇХ ГРАМАТИЧНІ СТРУКТУРИ

У статті побудовано структури вільних інтервальних об’єктів і формальної інтервальної граматики. Граматична структура враховує умову сумісності інтервалів у ланцюжкових конструкціях породженої мови.

В статье построены структуры свободных интервальных объектов и формальной интервальной грамматики. Грамматическая структура учитывает условие совместимости интервалов в цепочечных конструкциях порождаемого языка.

In the article the structures of free interval objects and formal interval grammar are constructed. The grammar structure takes into account the condition of interval compatibility in the chain constructions of language generated.

Вступ

Серед множини моделей представлення предметних областей граматичний підхід виділяється своєю простотою і універсальністю. Носіями граматик є алфавіти, елементи яких – деякі формалізми предметних областей, представлені термінальними і нетермінальними символами [1]. Однак, елементами алфавітів можуть бути об’єкти більш складної структури. Так, у транспортних, економічних та інших системах об’єкти предметних областей можуть мати властивості інтервальної природи (далі – інтервальні об’єкти – ІОб). Із теорії інтервального аналізу [2] відомо, що інтервали є числовими об’єктами, визначеними у відповідній системі координат, які задаються двома параметрами: межами інтервалів, серединами інтервалів та відхиленням від них або інакше. Тому, носії граматик ІОб повинні визначатися певними конструктивними структурами у складі відповідних граматичних структур. Граматична структура задає модель предметної області, яка призначена для проектування і аналізу інформаційних потоків, технологічних ланцюжків, виробничих процесів тощо. Формально граматична структура (ФГС) визначається [3] носієм, сигнатурою і конструктивною аксіоматикою. Складові ФГС є неоднорідними за змістом, правилами виконання та іншими показниками.

У роботі запропоновано конструктивну ФГС на вільних ІОб. Вільні інтервали визначаються як упорядковані або неупорядковані набори елементів пар деякого алфавіту, які можуть характеризуватися довжиною та іншими характеристиками. Елементи пар символів, котрі визначають інтервали, не пов’язані з будь-якою системою координат. Носій ФГС складається із конструктивних термінальних і нетермінальних структур інтервалів, спеціальних символів та множин характеристик, причому нетермінальні інтервали мають нульову характеристику довжини. Сигнатура містить у собі операції конкатенації, підстановки, безпосереднього виводу, а також інші операції та оператори. Аксіоматика граматичної структури дозволяє будувати вільну мову на вільних інтервалах і, отже, коректно застосовувати правила підстановок. Правила підстановок можуть мати детерміновані або недетерміновані навантаження, обумовлені предметними областями. Деякі нетермінальні інтервали є контекстним супроводом термінальних і також можуть нести певне змістовне навантаження.

Розглянута інтервальна ФГС може бути застосована для проектування технологічних процесів на залізниці при формуванні поїздів, завантаження приймально-відправлюючих колій станцій тощо. Так, наприклад, ІОб можна застосувати для побудови моделі формування залізничних поїздів, якщо кожний тип вагона у граматичній структурі представити вільним відповідно навантаженим інтервалом, причому продукції цієї структури повинні враховувати сумісність вагонів тощо.

Завдання для моделювання ІОб і ФГС

Метою досліджень є розробка граматичної моделі, призначеної для побудови формальної мови абстрактної предметної області на інтервальних об’єктах як основи створення автоматизованої системи проектування технологій виробництв із інтервальними властивостями. Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити декілька задач:

– розробити структуру породження вільних інтервалів;
– визначити операції над вільними інтервалами і задати правила їх виконання;

– побудувати конструктивну граматичну структуру на структурах вільних інтервалів, яка б породжувала формальну мову. Ланцюжки мови або можуть при виконанні операцій конкатенацій задовольняти умові сумісності за деяким змістом для суміжних інтервалів, або вони не підпорядковані будь-яким умовам.

Отже, моделювання ІОб і процесів абстрактними ланцюжками потребує інтегрованого підходу, аналогічного граматикам структурного проектування [5].

Структура вільних інтервалів

Введемо поняття вільного інтервалу – ІОб, інтервального алфавіту та його структури.

Алфавіти носіїв формальних граматик складаються з вільних (нечислових) елементів у тому розумінні, що їх можливо вставляти (переставляти) у конструкцію ланцюжка в будь-яке місце, обумовлене правилами граматики. Тому будемо вважати, що:

– будь-який алфавіт A носія формальної граматики вільний;
– конструктивний алфавіт B, елементи котрого побудовані на алфавіті A, – вільний;
– вироджені об'єкти алфавіту B ототожнюються з елементами алфавіту A, отже, $A \subset B$.

Наведемо деякі неформальні приклади конструювання вільних алфавітів.

Нехай задано вільний термінальний алфавіт $A = \{a_i\}_{i=0}^{n}$ такий, що $a_0 = \varepsilon$ – порожній символ і підмножину дійсних чисел R^+, для якої $0 \in R^+$. Із набору елементів a_{i_j} алфавіту A побудуємо конструкцію s_i:

$$s_i = (a_{i_r}, a_{i_k}) . \tag{1}$$

Конструкція (1) є вільною, її елементи не упорядковані за місцем і можуть бути однаковими. Якщо елементи конструкції упорядковані, тоді конструкція (1) задається списком [6] $\overline{s_i} = [a_{i_r}, a_{i_k}]$.

Визначення 1. Пару $(a_{i_k}, a_{i_r}) = s_i$ назвемо *вільним простим ІОб*, побудованим на алфавіті A.

Під простим інтервалом у літературі [7] розуміють інтервал без «тіла».

Множина вільних простих інтервалів $\{s_i\}$ утворює вільний алфавіт B_s, у якому є вироджені ІОб, тобто $s_i = (a_{i_j}, a_{i_j}) = a_{i_j}$, тому маємо включення $A \subset B_s$.

На алфавіті B_s також можна побудувати k-вимірні, за числом об'єктів, конструкції ІОб.

Визначення 2. k-вимірною вільною простою конструкцією ІОб назвемо набір простих інтервалів $((a_{i_1}, a_{i_2}), \cdots, (a_{i_j}, a_{i_{k+1}})) = S_i$.

Вільні k-вимірні інтервальні конструкції є аналогом паралелотопів [2]. Різноманіття інтервальних конструкцій S_i утворює конструктивний алфавіт B_{sk} такий, що $B_s \subset B_{sk}$, якщо $S_i = ((a_{i_1}, a_{i_2}), (\varepsilon, \varepsilon) \cdots, (\varepsilon, \varepsilon)) = s_i$.

З конструкціями S_i зв'яжемо набір скінченних чисел $\{r_j\}_{j=1}^{k} \subset R^+$ таких, що кожній інтервальній парі $(a_{i_j}, a_{i_{j+1}}) \mapsto r_j$.

Визначення 3. Трійку $(a_{i_j}, a_{i_{j+1}}, r_j)$ назвемо *навантаженим (постійним) вільним ІОб.*

Визначення 4. Навантаженою k-вимірною вільною інтервальною конструкцією називається вираз із набору навантажених ІОб $((a_{i_1}, a_{i_2}, r_1), (a_{i_2}, a_{i_3}, r_2), \cdots, (a_{i_{k-1}}, a_{i_{k+1}}, r_k))$.

Вочевидь, сукупність навантажених інтервальних конструкцій також утворюють конструктивні алфавіти. Якщо конструкції у визначеннях 1 – 4 упорядковані, тоді вони задають спискові вільні інтервальні конструкції.

За допомогою елементарної структури C_i дамо формальне визначення вільних інтервалів:

$$C_i = \langle M_i, \Sigma_i, \Lambda_i \rangle , \tag{2}$$

де $M_i = (A, U, V_1, V_2, \ldots, V_l, D)$; A – вільний алфавіт, визначений вище, U – обмежена підмножина множини R^+ така, що $0 \in U$; V_j – характеристичні скінченні множини, взагалі, різної природи, для яких $\varepsilon \in V_j$; $D = \{(,),,,-,s,s_i\}$ – множина необхідних спеціальних символів; $\Sigma_i = \{f_{1,2}^2, h_{1,2}^3, \xrightarrow[a]{r}{}^2\}$ – сигнатура відображень та приписування і Λ_i – конструктивна аксіоматика породження алфавітів вільних інтервалів, котра може складатися з окремих або комбінацій наступних аксіоматик:

➢ Λ_{i1} – аксіоматика вільних простих інтервалів і конструктивного алфавіту:

$$\begin{cases} \forall a_i, a_j \in A,\ f_1(a_i, a_j) = (a_i, a_j); \\ (a_i, a_j) = (a_j, a_i) = s; \end{cases}$$

s - вільний простий ІОб:

$$s = (a_j, a_j) = a_j,\ s = (\varepsilon, a_j) = a_j\ ;$$

$$\begin{cases} B_s = \{s_k\}_{k=0}^{m},\ s_0 = \varepsilon,\ m = n + \dfrac{n!}{2(n-2)!} + 1, \\ A \subset B_s; \end{cases}$$

B_s *– конструктивний алфавіт вільних простих інтервалів*;

- Λ_{i2} – аксіоматика вільних орієнтованих інтервалів і конструктивного алфавіту:

$$\begin{cases} \forall a_i, a_j \in A,\ f_2(a_i, a_j) = \overline{(a_i, a_j)} = \overline{s}; \\ \overline{(a_i, a_j)} \neq \overline{(a_j, a_i)}; \end{cases}$$

$\overline{s}$ *– вільний простий орієнтований інтервал*:

$$\overline{s} = \overline{(a_j, a_j)} = a_j,\ \overline{s} = \overline{(\varepsilon, a_j)} = a_j\ ;$$

$$\begin{cases} \overline{B}_s = \{\overline{s}_k\}_{k=0}^{m_1},\ \overline{s}_0 = \varepsilon,\ m_1 = n + \dfrac{n!}{(n-2)!} + 1, \\ A \subset \overline{B}_s; \end{cases}$$

$\overline{B}_s$ *– конструктивний алфавіт вільних простих орієнтованих інтервалів*;

- Λ_{i3} – аксіоматика вільних навантажених інтервалів і конструктивного алфавіту:

$$\begin{cases} r_p \in U\ \&\ v_{qg} \in V_q, w = [r_p, v_{1g_1}, v_{2g_2}, \dots, v_{lg_l}]; \\ w - \textit{характеристичний список}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall a_i, a_j \in A\ \&\ r_p \in U\ \&\ v_{qg} \in V_q, \\ h_1(a_i, a_j, w) = (a_i, a_j, w); \\ (a_i, a_j, w) = (a_j, a_i, w) = s(w); \end{cases}$$

$s(w)$ *– вільний навантажений інтервал*;

$\{s_k(w)\}_{k=0}^{m} = B_s(w)$ *– конструктивний алфавіт вільних навантажених інтервалів*;

- Λ_{i4} – аксіоматика вільних навантажених орієнтованих інтервалів і конструктивного алфавіту:

$$\begin{cases} \forall a_i, a_j \in A\ \&\ r_p \in U\ \&\ v_{qg} \in V_q, \\ h_2(a_i, a_j, w) = (\overline{s}, w) = \overline{s}(w); \end{cases}$$

$\overline{s}(w)$ *– вільний навантажений орієнтований інтервал*;

$\{\overline{s}_k(w)\}_{k=0}^{m_1} = \overline{B}_s(w)$ *– конструктивний алфавіт вільних навантажених інтервалів*.

Крім того, аксіоматики Λ_{i3} і Λ_{i4} повинні бути доповнені аксіомами:

$$\begin{cases} \forall a_i, a_j \in A\ \&\ r_p \in U \Rightarrow \\ s(w) \mid \overline{s}(w) \xrightarrow[a_i = a_j]{r_p = 0} a_j(w); \\ w = (0, \varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon) \Rightarrow a_j(w) = a_j; \end{cases}$$

$$A \subset B_s,\ B_s \subset B_s(w)\ \&\ \overline{B}_s \subset \overline{B}_s(w);$$

$$\begin{cases} \exists v_{kj_i} \in w - \textit{ймовірнісний елемент}, \\ v_{kj_i} = p_{ij} \Rightarrow \sum_{j=1}^{k_i} p_{ij} = 1. \end{cases}.$$

Структура (2) узагальнює структури класичних алфавітів з елементарними символами і дозволяє розповсюдити її на алфавіти з іншою структурою. Зокрема, якщо алфавіт носія M числовий, тоді отримаємо звичайну структуру інтервалів у певній системі координат. Якщо ж алфавіт носія нетермінальний, визначаючий деякий контекст або зміст, тоді конструктивні елементи у структурі (2) можна визначити як вільні інтервали нульової довжини зі змістовними детермінованими характеристиками списку w.

Виходячи з різноманіття алфавітів носія структури (2), можливо створити різні структури інтервалів. Нехай на алфавітах B_k носіїв M_k визначені інтервальні структури типу (2) $C_i(B_k) = \langle M_k, \Sigma_k, \Lambda_k \rangle$, тоді на словнику $B = \bigcup_{k=1}^{m} B_k$, $\bigcap_{k=1}^{m} B_k = \varnothing$ маємо можливість побудувати конструктивну інтервальну структуру $C_i(B) = \langle M, \Sigma, \Lambda \rangle$, для якої $M = \bigcup_{k=1}^{m} M_k$, $\Sigma = \bigcup_{k=1}^{m} \Sigma_k$ та $\Lambda = \bigcup_{k=1}^{m} \Lambda_k$.

Введена інтервальна структура $C_i(B)$ за допомогою доповнених операцій дає можливість будувати інтервальні конструкції типів, заданих визначеннями 3, 4 та ін. Позначимо конструктивний алфавіт, породжений структурою $C_i(B)$, як $\widehat{B}$ і відповідно його елементи – $\widehat{s}_j$. Навантажені елементи алфавіту $\widehat{B}$ роблять його нескінченим. Позбутися нескінченості конструктивного алфавіту можна також за допомогою відповідної операції. Тому розглянемо деякі операції над вільними інтервалами.

Операції над вільними ІОб

Представимо аксіоматично формалізм правил виконання операцій над вільними інтервалами. Нехай $\otimes$ – лінійна операція конкатенації, тоді аксіоматику $\Lambda(\otimes)$ визначимо наступним чином:

$$\begin{cases}\forall \hat{s}_1, \hat{s}_2, \hat{s}_3 \in \hat{B}_k,\ \hat{s}_1 \otimes \hat{s}_2 = \hat{s}_1\hat{s}_2 = \hat{l},\\ \hat{s}_1 \otimes \hat{s}_2 \neq \hat{s}_2 \otimes \hat{s}_1,\ \hat{s}_1 \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes \hat{s}_1 = \hat{s}_1 = \hat{l};\end{cases}$$

$$\begin{cases}\hat{s}_1 \otimes \hat{s}_2 \otimes \hat{s}_3 = (\hat{s}_1 \otimes \hat{s}_2) \otimes \hat{s}_3 =\\ \hat{s}_1 \otimes (\hat{s}_2 \otimes \hat{s}_3) = \hat{s}_1\hat{s}_2\hat{s}_3 = \hat{l};\end{cases}$$

$$\begin{cases}\forall \hat{s}_1, \hat{s}_2 \in \hat{B}_k = B_{ks} \Rightarrow \hat{l} = l = s_1 s_2;\\ \hat{B}_k = \overline{B}_{ks} \Rightarrow \hat{l} = \overline{l} = \overline{s}_1\overline{s}_2;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\hat{s}_1 = \hat{s}_1(w_1) \,\&\, \hat{s}_2 = \hat{s}_2(w_2) \Rightarrow\\ \hat{s}_1 \otimes \hat{s}_2 = \hat{l} = \hat{l}(w_1, w_2).\end{cases}$$

Операція лінійної конкатенації двох інтервалів $\hat{s}_1, \hat{s}_2$ може бути модифікована обертанням на деякий кут γ інтервалу $\hat{s}_2$ відносно інтервалу $\hat{s}_1$ [8]. Отримаємо інші модифікації конкатенації: лівої $\otimes_l$, правої $\otimes_p$ та обох меж інтервалів $\otimes_g$:

$$\begin{cases}\hat{s}_1 = (\hat{b}_{11}, \hat{b}_{12}) \,\&\, \hat{s}_2 = (\hat{b}_{21}, \hat{b}_{22});\\ \hat{b}_{11}, \hat{b}_{12}, \hat{b}_{21}, \hat{b}_{22} \in \hat{B} \Rightarrow\\ \hat{s}_1 \otimes_l \hat{s}_2 = \hat{l} = (\hat{b}, \hat{b}_{12}) \vee (\hat{b}, \hat{b}_{22}),\ \hat{b} = \hat{b}_{11} \mid \hat{b}_{21};\end{cases}$$

$$\hat{s}_1 \otimes_p \hat{s}_2 = \hat{l} = (\hat{b}_{11}, \hat{b}) \wedge (\hat{b}_{21}, \hat{b}),\ \hat{b} = \hat{b}_{12} \mid \hat{b}_{22};$$

$$\hat{s}_1 \otimes_g \hat{s}_2 = \hat{l} = ((\hat{b}_{11} = \hat{b}_{21}), (\hat{b}_{12} = \hat{b}_{22})),\ w_1 \neq w_2.$$

Якщо операція $\otimes$ виконується над навантаженими інтервалами, тоді її аксіоматику необхідно доповнити списковим відображенням η, тобто отримаємо складну операцію $\otimes_\eta$, для якої:

$$\begin{cases}\hat{s}_1 = \hat{s}_1(w_1) \,\&\, \hat{s}_2 = \hat{s}_2(w_2) \Rightarrow\\ \hat{s}_1 \otimes_1 \hat{s}_2 = \hat{l}(w),\ w = \eta(w_1, w_2).\end{cases}$$

Введення правила застосування операції η потребує деяких обмежень на характеристичний список w.

Нехай $|w|$ – довжина характеристичного списку деякого вільного інтервалу $\hat{s}(w)$, тоді припустимо, що:

1) $\forall \hat{s}_1, \hat{s}_2 \in \hat{B}_k,\ |w_1| = |w_2|,$

ця умова завжди досягається, якщо доповнити характеристичний список до потрібної довжини порожніми символами ε;

2) $\begin{cases}\forall \hat{s}_1, \hat{s}_2 \in \hat{B}_k,\ w_1 = [r_{1p}, v_{1g_1}, v_{1g_2}, \ldots, v_{1g_l}],\\ w_2 = [r_{2p}, v_{2g_1}, v_{2g_2}, \ldots, v_{2g_l}],\\ \Rightarrow v_{1g_j}, v_{2g_j} \in V_j;\end{cases}$

3) $U \times V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_l$ – упорядковано;

4) $\begin{cases}U_1, U_2 \subset U \,\&\, V_{i1}, V_{i2} \subset V_i \Rightarrow\\ \eta : (U_1 \times_{i=1}^{l} V_{i1}, U_2 \times_{i=1}^{l} V_{i2}) \to\\ \eta_0(U_1 \times U_2) \times_{i=1}^{l} \eta_i(V_{i1} \times V_{i2}),\end{cases}$

де компоненти η_i відображення η є операції, оператори, алгоритми або структури залежно від природи множин V_i, причому для деяких компонент відображення на множинах V_i існує одиниця θ_i; зокрема, для компоненти $\eta_0 \equiv +$, $\theta_0 \equiv 0$.

Різновидом операції $\otimes_\eta$ є операція з поглинанням меж інтервалів. Аксіоматикою цієї операції є:

$$\begin{cases}\hat{s}_1 = (\hat{b}_{11}, \hat{b}_{12}) = \hat{s}_1(w_1) \,\&\, \hat{s}_2 = (\hat{b}_{21}, \hat{b}_{22}) = \hat{s}_2(w_2);\\ \hat{b}_{11}, \hat{b}_{12}, \hat{b}_{21}, \hat{b}_{22} \in B \Rightarrow \hat{s}_1 \otimes_2 \hat{s}_2 = (\hat{b}_{11}, \hat{b}_{22}) = \hat{s}_3(w),\\ w = \eta(w_1, w_2).\end{cases}$$

Операція конкатенації з поглинанням меж інтервалів допускає модифікацію поглинання однойменних меж інтервалів $\hat{s}_1(w_1)$ і $\hat{s}_2(w_2)$, тобто коли $\hat{b}_{12} = \hat{b}_{21}$. Множину різновидів конкатенації позначимо символом Ω.

Визначення 5. Два вільних інтервали $\hat{s}_1(w_1)$ і $\hat{s}_2(w_2)$ назвемо *однотиповими*, якщо їх характеристичні списки w_1 та w_2 можуть відрізнятися тільки першими елементами r_{1p} і r_{2p}.

Визначення 6. Характеристичний список $w_0 = [r, \varepsilon, \varepsilon, \ldots, \varepsilon]$ множини $W = U \times_{i=1}^{l} V_i$ називається *скалярним*.

Операція множення ($\circ$) скалярного списку на вільній інтервал $\hat{s}(w)$, $w = [r_1, v_1, v_2, \ldots, v_l]$ визначається правилом:

$$\begin{cases}w_0 \circ \hat{s}(w) = \hat{s}(w) \circ w_0 = \hat{s}(w_1);\\ w_1 = [r * r_1, \varepsilon \otimes v_1, \varepsilon \otimes v_2, \ldots, \varepsilon \otimes v_l],\end{cases}$$

де символом * позначено операцію множення дійсних чисел.

За визначенням 5, до класу однотипових вільних інтервалів належить інтервал $\widehat{s}_g([1, v_{1g_1}, v_{2g_2}, \ldots, v_{lg_l}])$, котрий є утворюючим цього класу по операції множення на скалярний характеристичний список.

Визначення 7. Алфавіт $\widehat{A}$ з елементами $\widehat{s}_g$ назвемо *нормальним* конструктивним алфавітом вільних навантажених інтервалів.

ФГС на вільних ІОб

За звичаєм формальні граматики будуються як безумовні, тобто породжені правильні ланцюжки виділяються з вільної мови за певними правилами без всяких умов. Але, виходячи з потреб багатьох предметних областей, відбір ланцюжків із вільної мови необхідно виконувати за умови сумісності характеристик суміжних ІОб.

Умови для відбору ланцюжків вільної мови зручно задавати в граматичній структурі. Деякі підходи до реалізації умов відбору ланцюжків за граматичними правилами наведені в роботі [9].

Нехай раніше визначений термінальний алфавіт A та $N = H \bigcup T$ – нетермінальний алфавіт, який складається з основного $H = \{\alpha_i\}_{i=1}^{p}$ і характеристичного $T = T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_m$ алфавітів, причому $T_i = \{\tau_{ij}\}_{j=0}^{t_i}, \tau_{i0} = \varepsilon$. Припустимо, що на алфавітах A і N визначені конструктивні структури ІОб типу (2). Вважаємо, що нетермінальні ІОб навантажені, тоді їх представлення за структурою (2) задамо як: $(\alpha_i, \alpha_i) = \alpha_i(t)$, де вага $t \in T$ ІОб визначається характеристичним списком довжини m. Якщо характеристичний список $t = [\varepsilon, \varepsilon, \ldots, \varepsilon]$, тоді $\alpha_i(t) = \alpha_i$.

За представлення інтервальної граматичної структури виберемо класичну ФГС [4]:

$$C_I = \langle M_I, \Sigma_I, \Lambda_I \rangle. \qquad (3)$$

Носій граматичної структури (3) визначимо на конструктивних структурах інтервалів і нетермінальному алфавіті, тобто маємо $M_I = \langle C_s(A), C_s(H), N \rangle$. Вважаємо, що навантажений конструктивний алфавіт, породжений структурою $C_s(A)$, – нормальний і навантажений нетермінальний конструктивний алфавіт – має нульову характеристику довжини (у списку t цей елемент вилучено). Сигнатуру та аксіоматику граматичної структури задамо як:

$$\Sigma_I = \Omega \bigcup \{\circ^2, \eta^k, *^2, \rightarrow^2, \overset{p_i}{\Rightarrow}{}^2, f^2, \chi^1\},$$
$$\Lambda_G = (\Lambda_F, \Lambda_K, \Lambda_Y, \Lambda_P, \Lambda_V, \Lambda_C, \Lambda_H, \Lambda_L).$$

Операції конкатенації множини Ω і $(\circ, \eta, *)$, визначені в попередньому пункті, зміст та правила застосування інших операцій сигнатури будуть наведені в аксіоматиці. Складові аксіоматики Λ_I задамо конструктивними аксіомами.

- Λ_F – *аксіоматика вільної мови*:

$$\begin{cases} \forall \widehat{s}_1, \widehat{s}_2, \widehat{s}_3 \in \widehat{B}_s \bigcup \widehat{H}_s \ \& \ \forall \bullet \in \Omega \Rightarrow \\ \widehat{s}_1 \bullet \widehat{s}_2 = \widehat{s}_1 \widehat{s}_2 = \widehat{l}; \\ \forall \alpha, \beta \in N \Rightarrow \alpha \otimes \beta = \alpha\beta = l; \end{cases}$$

спискове відображення η застосовується тільки на інтервальному алфавіті $\widehat{B}_s$:

$$\begin{cases} \forall \widehat{s}_i, \widehat{s}_j \in \widehat{B}_s \mid \widehat{H}_s \mid \widehat{B}_s \bigcup \widehat{H}_s \ \& \ \widehat{l} = \widehat{s}_i \mid \widehat{s}_j \Rightarrow \\ \widehat{l} \bullet \widehat{l} = \widehat{l}; \\ \forall \alpha, \beta \in N \ \& \ l = \alpha \mid \beta \Rightarrow l \otimes l = l; \\ \{\widehat{l}\} = F(\widehat{B}_s) \mid F(\widehat{H}_s) \mid F(\widehat{B}_s \bigcup \widehat{H}_s), \\ \{l\} = F(N); \\ F(\cdot) - \textit{вільна мова}. \end{cases}$$

- Λ_K – *аксіоматика контекстного супроводу*:

$$\begin{cases} \forall \widehat{s}_i \in \widehat{B}_s \ \& \ \forall \widehat{s}_j(t) \in \widehat{H}_s, \ t \neq [\varepsilon, \varepsilon, \ldots, \varepsilon] \Rightarrow \\ \widehat{s}_i \otimes \widehat{s}_j = \widehat{s}_i \widehat{s}_j = \widehat{s}_i \alpha_j(t) = \widehat{l}^{\,s}, \\ \widehat{l}^{\,s} - \textit{ланцюжок із контекстом}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \{\widehat{l}^{\,s}\} = F^s \subset F(\widehat{B}_s \bigcup \widehat{H}_s), \ F^s - \textit{вільна мова} \\ \textit{з контекстним супроводом}. \end{cases}$$

- Λ_Y – *аксіоматика продукцій підстановок та відношення безпосереднього виводу*:

$$\begin{cases} \widehat{p}_i : \widehat{l}_j \rightarrow \widehat{l}_k, \ \widehat{l}_j, \widehat{l}_k \in F(\widehat{H}_s) \mid F(\widehat{B}_s \bigcup \widehat{H}_s), \\ 0 < \left|\widehat{l}_j\right| < k_1, \ 0 \leq \left|\widehat{l}_k\right| < k_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall \widehat{p}_i : \widehat{l}_j \rightarrow \widehat{l}_k \ \& \ \forall \widehat{p}_r : \widehat{l}_i \rightarrow \widehat{l}_m \ \& \ i \neq r \Rightarrow \\ \widehat{l}_j \neq \widehat{l}_i \mid \widehat{l}_j = \widehat{l}_i; \end{cases}$$

$\{\widehat{p}_i\}_{i=1}^{r} = \widehat{P}$ – *продукційна схема*;

$$\begin{cases} \left(\widehat{l}=\widehat{l}_1\widehat{l}_j\widehat{l}_2\right)\in(\widehat{A}_s\cup\widehat{H}_s)\ \&\ \exists\left(\widehat{p}_i:\widehat{l}_j\to\widehat{l}_k\right)\in\widehat{P} \\ \Rightarrow \widehat{l}_1\widehat{l}_j\widehat{l}_2\overset{p_i}{\Rightarrow}\widehat{l}_1\widehat{l}_k\widehat{l}_2, \end{cases}$$

$\widehat{p}_i$ – *допустима продукція до ланцюжка* $\widehat{l}$.

➢ Λ_P – *аксіоматика програмних продукцій, відношення вибору і безпосереднього виводу*:

$\forall\widehat{p}_i\in\widehat{P},\ \exists q_i:\left(\widehat{p}_i,K_i,W_i\right)$ – *програмна продукція*;

$q_i\neq q_j,\ i\neq j,\ \{q_i\}_{i=1}^n=Q$ – *множина позначок продукцій*;

$K_i\subseteq Q$ – *множина вдач* і $W_i\subseteq Q$ – *множина невдач продукцій* $\widehat{p}_i$

$$\begin{cases} q_i\in Q,\ q_i:\left(\widehat{p}_i,K_i,W_i\right)\ \& \\ \widehat{p}_i\ \textit{допустима до}\ \widehat{l},\ \widehat{l}\overset{\widehat{p}_i}{\Rightarrow}\widehat{l}_j;\Rightarrow \\ \exists q_j\in K_i,\ \widehat{p}_j\ \textit{допустима до}\ \widehat{l},\ \widehat{l}\overset{\widehat{p}_i,\widehat{p}_j}{\Rightarrow}\widehat{l}_j; \end{cases}$$

q_i – *допустима продукція* до ланцюжка $\widehat{l}$ на множині вдач K_i ;

$$\begin{cases} q_i\in Q,\ q_i:\left(\widehat{p}_i,K_i,W_i\right)\ \& \\ \widehat{p}_i\ \textit{недопустима до}\ \widehat{l}; \\ \Rightarrow\ \exists q_j\in W_i,\ \widehat{p}_j\ \textit{допустима до}\ \widehat{l};\ \widehat{l}\overset{\widehat{p}_j}{\Rightarrow}\widehat{l}_j; \end{cases}$$

q_i – *допустима продукція* до ланцюжка $\widehat{l}$ на множині невдач W_j .

➢ Λ_V – *аксіома оператора вибору продукцій для безпосереднього виводу*:

$$\begin{cases} \forall q_i\in Q,\ q_i:\left(\widehat{p}_i,K_i,W_i\right)\ \&\ \widehat{l}\in F(\widehat{B}_s\cup\widehat{H}_s); \\ f(\widehat{l},q_i)-\textit{оператор вибору продукцій}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \widehat{l}_r\overset{\widehat{p}_i}{\Rightarrow}\widehat{l}_i\ \&\ \widehat{l}_r\in\widehat{l}\Rightarrow \\ f(\widehat{l},q_i)=q_j\in K_i\ |\ \widehat{l}\overset{q_i,f(\widehat{l},q_i)=q_j}{\Rightarrow}\widehat{l}_n; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \widehat{l}_r\overset{\widehat{p}_i}{\Rightarrow}\widehat{l}_i\ \&\ \widehat{l}_r\not\in\widehat{l}\Rightarrow \\ f(\widehat{l},q_i)=q_j\in W_i\ |\ \widehat{l}\overset{f(\widehat{l},q_i)=q_j}{\Rightarrow}\widehat{l}_n. \end{cases}$$

➢ Λ_C – *аксіоматика сумісності контекстних характеристик ланцюжків*:

$$\begin{cases} \forall\widehat{l}_i^s,\widehat{l}_j^s\in F^s,\ \widehat{l}_{i,j}^s=\widehat{s}_{i,j}\alpha_{i,j}(t_{i,j}), \\ t_{i,j}=[\tau_{i_1,j_1},\tau_{i_2,j_2},\ldots,\tau_{i_r,j_r},\ldots,\tau_{i_k,j_k}]\ \& \\ \tau_{i_r}=\tau_{j_r}\Rightarrow\widehat{l}_i^s,\widehat{l}_j^s-\textit{сумісні за індексом}\ r; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall r,\ \widehat{l}_i^s,\widehat{l}_j^s-\textit{сумісні за індексом}\ r\Rightarrow \\ \widehat{l}_i^s,\ \widehat{l}_j^s-\textit{сумісні}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall\widehat{l}=\widehat{l}_1\widehat{l}_i^s\widehat{l}_j^s\widehat{l}_2,\ \widehat{l}_1,\widehat{l}_2\in F(\widehat{A}_s\cup\widehat{H}_s); \\ \textit{за аксіоматиками}\ \Lambda_K,\ \Lambda_Y\Rightarrow \\ \widehat{l}_{i,j}^s\overset{\widehat{p}_k}{\Rightarrow}\widehat{s}_{\boldsymbol{i,j}}[\tau_{i_1,j_1},\tau_{i_2,j_2},\ldots,\alpha_{i,j}\tau_{i_r,j_r},\ldots,\tau_{i_k,j_k}]; \end{cases}$$

для фіксованих значень індексів i_r та j_r перевіряється збіг характеристик τ_{i_r} та τ_{j_r} за цими індексами по схемі (аксіоматики Λ_P,Λ_V):

$$q_k:(\alpha_i\tau_{i_r}\to\tau_{i_r}\alpha_i,\{q_{k+1}\},\{\varnothing\});$$

$$q_{k+1}:(\alpha_j\tau_{j_r}\to\alpha_j\tau_{i_r},\{q_{k+2}\},\{\varnothing\});$$

$$q_{k+2}:(\alpha_i\to\varepsilon,\{q_{k+3}\},\{\varnothing\});$$

$$q_{k+3}:(\alpha_j\to\varepsilon,\{q_{k+4}\},\{\varnothing\});$$

$$q_{k+2}:\cdots.$$

➢ Λ_H – *аксіоматика інструктивних правил*:

$U\subseteq\widehat{H}_s$ – множина початкових інтервальних конструкцій;

$\widehat{l}_0\in U\ \&\ \exists q_i:\left(\widehat{p}_i:\widehat{l}_0\to\widehat{l}_k,Y_i,W_i\right)\in Q\Rightarrow q_i$ – аксіома початку;

$$\begin{cases} \widehat{l}_k\in F(\widehat{B}_s)\,|\,F^s\ \&\ \exists q_i:\left(\widehat{p}_i:\widehat{l}_j\to\widehat{l}_k,K_i,W_i\right)\in Q, \\ W_i=\varnothing\ |\ \left(K_i=\varnothing\ \&\ W_i=\varnothing\right)\Rightarrow q_i^*; \end{cases}$$

q_i^* – *заключна аксіома*;

➢ Λ_L – *аксіоматика виводу правильних ланцюжків і формальної мови*:

$$\begin{cases} \left(\exists\left((q_1,q_2,\cdots q_m)\subseteq Q;\ q_j=q_k\,|\,q_j\neq q_k\right)\&\right. \\ \widehat{l}_0\in U\ \&\ \widehat{l}_m\in F(\widehat{A}_s)\,|\,F^s; \\ \left(\widehat{l}_0\overset{q_{j_1}}{\Rightarrow}\widehat{l}_1\overset{q_{j_2}}{\Rightarrow}\cdots\overset{q_{j_m}^*}{\Rightarrow}\widehat{l}_m\right)\Rightarrow \\ \widehat{l}_m-\textit{правильний ланцюжок}; \end{cases}$$

$Z(\widehat{l}_m) = (\widehat{l}_0 \overset{q_1}{\Rightarrow} \widehat{l}_1 \overset{q_2}{\Rightarrow} \cdots \overset{q_m^*}{\Rightarrow} \widehat{l}_m)$ – *вивід ланцюжка* $\widehat{l}_m$;

$\{\widehat{l}_m\} = L(C_G)$ – *формальна мова, породжена інтервальною граматичною структурою*.

Отже, побудована конструктивна ФГС на вільних ІОб, за якою породжується певна семантично узгоджена мова.

Висновки

У роботі розглянуто вільні інтервальні конструкції, введено поняття вільного інтервального об'єкту та розроблено формальну конструктивну структуру, яка породжує ці конструкції. Запропоновано операції на вільних інтервальних об'єктах і встановлено їх властивості. На вільних інтервалах розроблено формальну граматичну структуру, яка може враховувати умову сумісності інтервальних об'єктів у ланцюжковій конструкції.

Побудована інтервальна граматична структура узагальнює звичайні структури граматик [1, 3, 4] і при накладанні певних обмежень на правила підстановок, їх навантаження та ін. дозволяє отримати граматичні класи Хомського й інших типів.

Запропоновані розробки інтервальних структур дають можливість моделювати технологічні процеси на транспорті.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Гладкий, А. В. Формальные грамматики и языки [Текст] / А. В. Гладкий. – М.: Наука, 1973. – 368 с.
2. Жолен, Л. Прикладной интервальный анализ [Текст] / Л. Жолен. – М.-Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2007. – 468 с.
3. Ільман, В. М. Структурний підхід до проблеми відтворення граматик [Текст] / В. М. Ільман, В. І. Шинкаренко // Проблеми програмування. – 2007. – № 1. – С. 5-16.
4. Шинкаренко, В. И. Структурные модели алгоритмов в задачах прикладного программирования. I. Формальные алгоритмические структуры [Текст] / В. И. Шинкаренко, В. М. Ильман, В. В. Скалозуб // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 3. – С. 3-14.
5. Алгебро-алгоритмические модели и методы параллельного программирования [Текст] / Ф. И. Андон и др. – К.: Академпериодика, 2007. – 634 с.
6. Босов, А. А. Функции множества и их применение [Текст] / А. А. Босов. – Днепродзержинск: Изд. дом «Андрій», 2007. – 182 с.
7. Математическая энциклопедия [Текст]. – Т. 4. – М.: СЭ, 1984. – 1216 с.
8. Роджерс, Д. Математические основы машинной графики [Текст] / Д. Роджерс, Дж. Адамс. – М.: Мир, 2001. – 604 с.
9. Братчиков, И. Л. Синтаксис языков программирования [Текст] / И. Л. Братчиков. – М.: Наука, 1975. – 232 с.

Надійшла до редколегії 28.08.2009.
Прийнята до друку 09.09.2009.