УДК 539.3

Й. Й. ЛУЧКО, Є. Г. ІВАНИК (Львівська філія ДІІТу)

МЕТОДИКА ВИЗНАЧЕННЯ РОЗКРИТТЯ ТРІЩИНИ В ЗАЛІЗОБЕТОННІЙ АРМОВАНІЙ БАЛЦІ ТАВРОВОГО ПРОФІЛЮ

У статті викладено методику визначення ширини розкриття тріщини у залізобетонній балці таврового профілю залежно від геометричних розмірів полиці і стінки, зовнішнього навантаження і проценту армування.

В статье изложено методику определения ширины раскрытия трещины в железобетонной балке таврового профиля в зависимости от геометрических размеров полки и стенки, внешней нагрузки и процента армирования.

In the paper the method for determination of the width of crack opening of the ferro-concrete beam of the tee-form profile in dependence on the shelf and wall geometrical sizes, external load and reinforcement percent is described.

Постановка проблеми

Розрахунок залізобетонних конструктивних елементів за існуючими офіційними нормативами свідчить про пряму залежність між прийнятою методикою і раціональністю та економічністю проектованої конструкції, причому для однакового конструктивного елемента дістають різну кількісну оцінку за тріщиностійкістю, деформативністю та несучою здатністю. Дослідження утворення та розрахунок розкриття тріщини та деформативності залізобетонних конструкцій складає певні труднощі, оскільки процеси, що мають місце при цьому як при навантаженнях, так і під час експлуатації важко піддаються вивченню та прогнозуванню. Також слід брати до уваги, що для фахівців ці питання мали другорядне значення, ніж розрахунки на міцність, оскільки нормативи обмеженості допустимих напружень в бетоні та арматурі приводили до жорстких конструктивних елементів, а виникаючі при цьому тріщини були нехтувано малими за розкриттям.

Прогресивні технології в будівельній справі привели до підвищення міцності бетону та арматури, що дало змогу зменшити розміри перерізів конструктивних елементів, знизити їх вагу. Але при цьому зменшення геометричних параметрів залізобетонних балок при одночасному зростанні робочих напружень і прогонів приводить до зниження жорсткості і збільшує ймовірність надмірного розкриття тріщини. Отже, в цих умовах вже не міцність, а утворення і розкриття тріщини (деформативність) стає визначальним чинником у здійсненні проектних розрахунків об’єктів будівництва.

Аналіз досліджень і публікацій з даної проблематики

В останні роки питання тріщиностійкості і деформативності залізобетонних конструкцій набули першорядного значення для інженерної практики в будівництві. Вирішення цієї проблеми значною мірою визначає подальший прогрес у будівельній галузі, зокрема, розширення сфери застосувань залізобетонних конструкцій, в тому числі для споруд, що експлуатуються в агресивному середовищі та умовах підвищених температур.

Значного успіху в цьому напрямі досягли вітчизняні вчені, які створили найбільш обґрунтовану теорію тріщиностійкості [1 – 4], на основі якої для інженерної практики розроблено достатньо адекватні методики розрахунку за деформаціями, а також зародження і розкриття тріщин [5 – 11]. В представлених роботах пропонується враховувати роботу розтягнутого бетону в зоні між тріщинами за допомогою деяких коефіцієнтів, залежно від марки бетону, проценту армування, величини напружень і характеру дії навантажень. Дальшим продовженням розвитку цієї моделі є трактування критерію тріщиностійкості, як досягнення деформаціями на границі певного значення, причому розкриття тріщини трактується як результат зміцнення арматури і бетону в перерізах, де зародилась і розвивається тріщина. Вихідна модель приймається у вигляді однорідного ізотропного деформівного тіла, що містить дефекти типу пор, включень, тріщин. Напружений стан представляється як сума напружень у тілі з тріщиною і напружень в суцільному середовищі.

Недоліком наданих підходів є те, що міцність, деформації і розкриття тріщини пов'язані з низкою коефіцієнтів, що не повністю враховують властивості матеріалу, зчеплення арматури з бетоном, отримані з даних випробувань, а не шляхом теоретичних розрахунків.

Подальший розвиток механіки руйнування стимулює зростання робіт стосовно проблематики моделювання і розрахунку залізобетонних конструктивних елементів балкового типу з дефектами типу тріщин.

Постановка завдання

Внаслідок недостатньої вивченості проблеми процесу зародження, розвитку і поширення тріщин в деформівних середовищах деякі принципові положення теорії не є прозорими і мають значною мірою емпіричний характер, внаслідок чого виникає потреба розвитку нових підходів до вивчення тріщиностійкості залізобетонних елементів конструкцій із застосуванням теорії пружності.

Розрахункову схему приймемо у вигляді таврової балки, підкріпленої знизу смуговою арматурою. Система складається з двох пружних пластин, в перерізі має тавровий профіль, шарнірно оперта на кінцях і знаходиться під дією довільного симетрично-розподіленого відносно середини прогону навантаження.

Виклад основного матеріалу досліджень

В роботі [12] подано підхід до розв'язання задачі про визначення напружено-деформованого стану залізобетонної балки таврового профілю з тріщиною. В цій роботі даються формули для компонент тензора напружень в балці у довільному перерізі, в тому числі й там, де знаходиться тріщина.

Аналогічно результатам роботи [13] представимо напруження в залізобетонній балці у вигляді двох складових σ'_x і σ_x, причому σ_x – напруження, обумовлені навантаженням від виникаючих напружень в стінці [12]; σ'_x – напруження в балці, обумовлені розклинюванням, і визначаються на основі формул Колосова-Мусхелішвілі [14]:

$$\sigma'_x = \int_0^l K(y,t)\mu(t)\,dt, \qquad (1)$$

де l – довжина тріщини; $\mu(t)$ – невідома функція, яка описує форму тріщини; ядро в інтегральному представленні (1) має вигляд

$$K(y,t) = -\frac{E_a}{4\pi}\left[\frac{1}{t+y} + \frac{1}{t-y} - \frac{2t(t-y)}{(t+y)^3}\right]. \quad (2)$$

Враховуючи, що береги тріщини вільні від навантаження, то має місце

$$\sigma'_x + \sigma_x = 0 \text{ при } x = 0,\ 0 < y < l. \qquad (3)$$

Підставляючи вираз (1) в умову (2), та врахувавши вираз (3), матимемо

$$\frac{E_a}{4\pi}\int_0^l\left[\frac{1}{t+y} + \frac{1}{t-y} - \frac{2t(t-y)}{(t+y)^3}\right]\mu(t)\,dt = \sigma_x(0,y), \quad (4)$$

звідки, беручи до уваги вираз для $\sigma_x(0,y)$, наданий у роботі [12], дістанемо

$$\frac{E_a}{4\pi}\int_0^l\left[\frac{1}{t+y} + \frac{1}{t-y} - \frac{2t(t-y)}{(t+y)^3}\right]\mu(t)\,dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\Big[c_{2k}\left(2\mathrm{sh}\alpha_k y + \alpha_k y\mathrm{ch}\alpha_k y\right) + c_{3k}\alpha_k\mathrm{sh}\alpha_k y +$$

$$+ c_{4k}\left(2\mathrm{ch}\alpha_k y + \alpha_k y\mathrm{sh}\alpha_k y\right)\Big]\alpha_k. \qquad (5)$$

Коефіцієнти у формулі (5) визначаються з групи основних граничних умов для полиці (плити) та додаткових на стику стінки з арматурою [12].

Виконавши заміну змінних

$$t = \frac{1}{2}l(\xi+1);\ y = \frac{1}{2}l(\eta+1);$$

$$\mu\left[\frac{1}{2}l(\xi+1)\right] = \varphi(\xi);$$

$$\sigma_x\left[\frac{1}{2}l(\eta+1)\right] = \sigma_{x1}(\eta),$$

причому

$$\sigma_{x1}(\eta) = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\left\{c_{2k}\left[2\mathrm{sh}\frac{\alpha_k}{2}l(\eta+1) + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{\alpha_k}{2}l(\eta+1)\mathrm{ch}\frac{\alpha_k}{2}l(\eta+1)\right] + c_{3k}\alpha_k\mathrm{sh}\frac{\alpha_k}{2}l(\eta+1) +$$

$$\left. + c_{4k}\left[2\mathrm{ch}\frac{\alpha_k}{2}l(\eta+1) + \frac{\alpha_k}{2}l(\eta+1)\mathrm{sh}\frac{\alpha_k}{2}l(\eta+1)\right]\right\},$$

отримаємо вираз (5) у вигляді:

$$\frac{E_a}{4\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\xi-\eta}+K(\xi,\eta)\right]\varphi(\xi)\,dt=\sigma_{x1}(\eta), \quad (6)$$

тобто, дістаємо сингулярне інтегральне рівняння з ядром

$$K(\xi,\eta)=\frac{2\xi-\xi^2+4\xi\eta+\eta^2+6\eta+4}{(\xi+\eta+2)^3}.$$

Відзначимо, що ядро $K(\xi,\eta)$ та права частина $\sigma_{x1}(\eta)$ рівняння (6) є заданими на відрізку [–1;1] і неперервними функціями своїх аргументів.

Представимо функцію $\varphi(\xi)$ у вигляді

$$\varphi(\xi)=\frac{u(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}, \quad (7)$$

де $u(\xi)$ – нова невідома функція, неперервна на відрізку [–1;1].

Розв'язок інтегрального рівняння (6), придатного для чисельного аналізу, будемо будувати на основі квадратурних формул Гаусса. Зокрема, для сингулярного інтеграла маємо формулу

$$\int_{-1}^{1}\frac{u(\xi)d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}(\xi-\eta)}=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{u(\xi_k)}{\xi_k-\eta}+\pi u(\eta)\frac{U_{n-1}(\eta)}{T_n(\xi)}, \quad (8)$$

в якій $T_n(\eta)$ – многочлени Чебишева 1-го роду, $U_{n-1}(\eta)$ – многочлени Чебишева 1-го роду [15].

Вузли $\xi_k=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi$ ($k=1,2,3,...,n$) є нулями многочлена $T_n(\xi)$, а у точках $\eta_m=\cos\frac{\pi m}{n}$ ($m=1,2,3,...,n-1$), які є коренями рівняння $U_{n-1}(\eta)=0$, формула (8) набуває простішого вигляду:

$$\int_{-1}^{1}\frac{u(\xi)d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}(\xi-\eta)}=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{u(\xi_k)}{\xi_k-\eta_m}. \quad (9)$$

Звичайна квадратурна формула Гаусса для деякої функції $u(\xi)$ має вигляд

$$\int_{-1}^{1}\frac{u(\xi)d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}u(\xi_k). \quad (10)$$

Співставляючи залежності (9) і (10), бачимо, що формула для обчислення сингулярного інтеграла з ядром типу Коші, яка справджується на дискретній множині точок $\eta=\eta_m$, співпадає з квадратурною формулою Гаусса, якщо підінтегральна функція є поліномом степеня не вище $2n$.

Наведені залежності (8) – (10) застосуємо при розв'язуванні інтегрального рівняння (6). Використавши інтерполяційні формули Лагранжа для шуканої функції $u(\xi)$ по вузлах $\xi_k=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi$, дістанемо

$$u(\xi)=\frac{T_n(\xi)\sqrt{1-\xi_k^2}}{\xi-\xi_k}. \quad (11)$$

Згідно залежності $u(-1)=0$, маємо особливість, яка вказує на те, що функція $\varphi(\xi)$ має в точці $\xi=-1$ особливість меншого порядку, ніж коренева $\frac{1}{\sqrt{1+\xi}}$.

Таким чином, на основі формул (9) – (11) і залежності (6) дістаємо систему n лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\frac{E_a}{4\pi n}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{\xi_k-\eta_m}+K(\xi_k,\eta_m)\right]\varphi(\xi_k)=\sigma_{x1}(\eta_n);$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k u(\xi_k)\,\mathrm{tg}\left(\frac{2k-1}{4n}\pi\right)=0, \quad (12)$$

з яких визначаються n шуканих значень $u(\xi_k)$ ($k=1,2,3,...,n$).

Коефіцієнт інтенсивності напружень знаходимо на основі формули, яка виражена через знайдені значення $u(\xi_k)$

$$K_1=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{l}{2}}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k u(\xi_k)\,\mathrm{ctg}\left(\frac{2k-1}{4n}\pi\right).$$

У відповідності до критерія Ірвіна-Баренблатта [1, 2], тріщина буде розвиватись при виконанні умови

$$K_1=K_{1c},$$

в якій параметр K_{1c} представляє коефіцієнт інтенсивності напружень для конкретного матеріалу, в даному випадку бетону. Зазвичай, він визначається експериментальним шляхом і залежить від виду і класу бетону за міцністю. Зокрема, в роботі [16] дано формулу для визначення K_{1c} залежно від міцності бетону на розтяг:

$$K_{1c} = 4R_{bt}\sqrt{d_s}\,, \tag{12}$$

в якій R_{bt} – розрахунковий опір бетону розтягу; d_s – максимальний діаметр гранул заповнювача (щебінь, гравій), причому $d_s = 1,2\,...\,2$ см.

Визначивши значення функції $u(\xi_k)$ з наведених формул (12). тим самим обчислимо значення функції $\varphi(\xi_k)$, яка визначає форму і розмір тріщини. Оскільки на інтервалі $(0;l)$ проекція вектора переміщень на вісь абсцис терпить розрив, то

$$u(+0,y) - u(-0,y) = \int_y^l \varphi(\xi)\,d\xi\,. \tag{14}$$

Врахувавши залежності (7), (9), подамо формулу (15) у вигляді:

$$u(+0,y) - u(-0,y) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} u(\xi_k)\,. \tag{15}$$

Отримана формула (15) є основною залежністю, з якої визначається розкриття тріщини на рівні арматури (при $y = 0$).

Як приклад, співставимо дані чисельного розрахунку згідно отриманої залежності (14) на основі розвинутої методики та експериментальні результати згідно норм і правил залізобетонних конструкцій «СНиП 2.03.01-84» за таких параметрів конструкції:

- модулі пружності та коефіцієнти Пуассона для пластин $\nu = 0,11$; $E = 21\cdot 10^3$ МПа і арматури відповідно $\nu_a = 0,25$; $E_a = 21\cdot 10^4$ МПа;
- ширина балки $B = 0,25$ м та її висота $H = 0,6$ м;
- товщина стінки $d = 0,1$ м;
- довжина прогону $L = 0,2$ м.

Деякі результати чисельного аналізу показано в табл. 1 – 4.

При отриманні чисельних результатів необхідно задаватись таким значенням довжини тріщини, щоб задовольнялось критеріальне співвідношення (12).

Висновки

Розроблено методику визначення ширини розкриття тріщини в залізобетонній балці таврового профілю залежно від геометричних параметрів, величини зовнішнього навантаження і проценту армування.

Таблиця 1

Розкриття тріщини залежно від величини зовнішнього навантаження

Величина навантаження, т	СНиП 2.03.01-84, мм	Дослідні дані		Аналітичні результати	Похибка, %
		Середнє	Максимальне		
1	0,01236	0,0108	0,013	0,0132	18
2	0,0258	0,0245	0,027	0,026	5,7
3	0,041	0,04	0,043	0,0413	3,1
4	0,058	0,059	0,064	0,0576	–2,4
5	0,0785	0,08	0,086	0,0769	–4,03
6	0,107	0,1	0,12	0,099	–1,0
7	0,138	0,139	0,141	0,1385	–0,36
8	–	0,174	0,18	0,176	–2,0
9	–	0,203	0,219	0,201	–1,3
10	–	0,241	0,248	0,2406	–0,6

Таблиця 2

Розкриття тріщини залежно від прогону балки

Довжина прогону, м	СНиП 2.03.01-84, мм	Дослідні дані		Аналітичні результати-	Похибка, %
		Середнє	Максимальне		
4	0,0123	0,0108	0,013	0,0132	18
5	0,0197	–	–	0,0197	–
6	0,0297	0,0293	0,031	0,0305	3,1
7	0,042	–	–	0,0416	–
8	0,0585	–	–	0,0576	–
9	0,080	–	–	0,089	–
10	0,123	–	–	0,133	–
11	–	–	–	0,2171	–
12	–	–	–	0,375	–

Як показують отримані результати числових розрахунків і їх порівняння з відповідними експериментальними даними, при дослідженні залізобетонних балок на розкриття тріщини, нормальної до поздовжньої осі, використання СНиП 2.03.01-84 є виправданим для балок із процентом армування не більше за 2 %, тоді як розроблена аналітична методика гарантовано може використовуватись для значень значно більшого проценту армування.

Результати, розвинені в роботі, можуть використовуватись в інженерній практиці для визначення ширини розкриття тріщини в балці, яка перебуває під дією рівномірно-розподіленого навантаження з можливістю одночасного варіювання такими параметрами, як довжина прогону, висота балки та процент армування.

Таблиця 3

Розкриття тріщини залежно від висоти перерізу балки

Висота, м	СНиП 2.03.01-84, мм	Дослідні дані		Аналітичні результати-	Похибка, %
		Середнє	Максимальне		
0,3	–	0,104	0,143	0,104	0
0,4	–	–	–	0,86	–
0,5	0,0603	–	–	0,0617	–
0,6	0,0425	–	–	0,047	–
0,7	0,034	–	–	0,0363	–
0,8	0,028	–	–	0,029	–
0,9	0,0248	–	–	0,025	–
1,0	0,020	–	–	0,021	–
1,1	0,0158	–	–	0,0149	–
1,2	0,0093	–	–	0,0101	–

Таблиця 4

Розкриття тріщини залежно від проценту (площі) армування

Площа арматури, см^2	СНиП 2.03.01-84, мм	Дослідні дані		Аналітичні результати	Похибка, %
		Середнє	Максимальне		
2	0,928	1,03	1,15	0,978	–5,3
4	0,517	0,60	0,69	0,583	–2,5
6	0,329	0,301	0,341	0,351	14,2
8	0,231	0,25	0,258	0,273	8,4
10	0,165	0,161	0,169	0,170	5,3
12	0,110	0,113	0,12	0,131	13,7
14	0,0903	0,099	0,1	0,1	1,0
16	0,0432	0,044	0,048	0,04	4,3
18	0,025	0,027	0,0285	0,0273	1,1
20	0,01	0,013	0,045	0,013	1,13

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Панасюк, В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами [Текст] / В. В. Панасюк. – К.: Наук. думка, 1968. – 246 с.
2. Панасюк, В. В. Механика квазихрупкого разрушения материалов [Текст] / В. В. Панасюк. – К.: Наук. думка, 1991. – 415 с.
3. Панасюк, В. В. О важнейших исследованиях по физико-химической механике материалов [Текст] / В. В. Панасюк // Физ.-хим. механика материалов. – 1974. – № 4. – С.3-13.
4. Ковчик, С. Е. Характеристики кратковременной трещиностойкости материалов и методы их определения. Механика разрушения и прочность материалов [Текст]: справ. пособие / С. Е. Ковчик, Е. М. Морозов. – Т. 3. – К.: Наук. думка, 1988. – 436 с.
5. Лучко, Й. Й. Методи оцінки несучої здатності і підвищення тріщиностійкості залізобетонних елементів конструкцій [Текст] / Й. Й. Лучко. – Львів: Слово і комерція, 1997. – 435 с.
6. Кудзис, А. П. Оценка надежности железобетонных конструкций [Текст] / А. П. Кудзис. – Вильнюс: Маклас, 1985. – 156 с.
7. Холмянский, М. М. К использованию расширенной информации при расчете железобетонных элементов на чистый изгиб [Текст] / М. М. Холмянский // Строительная механика и расчет сооружений. – 1978. – № 2. – С.38-42.
8. Зайцев, Ю. В. Моделирование деформаций и прочности бетона методами механики разрушения [Текст] / Ю. В. Зайцев. – М.: Стройиздат, 1982. – 196 с.
9. Зайцев, Ю. В. Моделирование деформаций и прочности бетона методами механики разрушения [Текст] / Ю. В. Зайцев, К. А. Дараган, Б. Ф. Туроколов // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1984. – № 9. – С. 1-4.
10. Иваницкий, Я. Л. Методика определения трещиностойкости бетона при сложном напряженном состоянии [Текст] / Я. Л. Иваницкий, Й. Й. Лучко // Бетон и железобетон. – 1986. – № 10. – С. 30-31.
11. Яйцева, А. Г. К вопросу о теории трещин железобетона [Текст] / А. Г. Яйцева // Бетон и железобетон. – 1984. – № 4. – С.17-24.
12. Лучко, Й. Й. Методика розрахунку напружено-деформованого стану залізобетонної балки таврового профілю з тріщиною [Текст] / Й. Й. Лучко, Є. Г. Іваник, М. І. Ігнатишин // Вісник ОДАБА. – Одеса: Місто майстрів, 2009. – Вип. 35. – С. 219-226.
13. Лучко, И. И. Распределение касательных напряжений между арматурой и бетоном [Текст] / И. И. Лучко, В. В. Лотыш // Бетон и железобетон. – 1990. – № 2. – С. 38-39.
14. Мусхелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости [Текст] / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1968. – 245 с.
15. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров [Текст] / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1975. – 831 с.
16. Пересыпкин, Е. Н. Коэффициенты интенсивности напряжений: раскрытие трещины в железобетонных элементах [Текст] / Е. Н. Пересыпкин // Бетон и железобетон. – 1978. – № 3. – С. 27-29.

Надійшла до редколегії 15.09.2009.
Прийнята до друку 22.09.2009.