УДК 624.044

И. К. БАДАЛАХА (ДИИТ)

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА, НАГРУЖЕННОГО РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКОЙ ПО ПЛОЩАДИ ПРЯМОУГОЛЬНИКА И ПО БЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСЕ

У статті наведено результат рішення задач про напружено-деформований стан пружного напівпростору від дії навантаження, рівномірно розподіленого по стрічці постійної ширини кінцевої і нескінченної довжини, з використанням нетрадиційної лінійної залежності деформацій від напруженого стану, відмінної від узагальненого Закону Гука.

В статье приведен результат решения задач о напряженно-деформированном состоянии упругого полупространства от действия нагрузки, равномерно распределенной по полосе постоянной ширины конечной и бесконечной длины, с использованием нетрадиционной линейной зависимости деформаций от напряженного состояния, отличной от обобщенного Закона Гука.

The article shows the result of solving the problem on the stressed-and-strained state of an elastic semi-space because of the load action, which is uniformly distributed over the strip of constantly width and final or infinite length, with the use of non-traditional linear dependence of strains on the stressed state that differs from the generalized Hooke's law.

В [1, 2] автором изложены основные принципы определения напряженно-деформированного состояния упругой среды в нетрадиционной постановке, суть которой состоит в том, что относительные деформации в упругой среде делятся на два тензора: тензор деформаций чистого сдвига и тензор объемных деформаций. Полный же тензор деформаций представляет алгебраическую сумму этих двух тензоров:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^{c} + \varepsilon_x^{0}; \tag{1}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_y^{c} + \varepsilon_y^{0}; \tag{2}$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_z^{c} + \varepsilon_z^{0}; \tag{3}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^{c} + \gamma_{xy}^{0}; \tag{4}$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{yz}^{c} + \gamma_{yz}^{0}; \tag{5}$$

$$\gamma_{zx} = \gamma_{zx}^{c} + \gamma_{zx}^{0}. \tag{6}$$

Компоненты перемещений точек среды вдоль координат также определяются раздельно для сдвиговых и объемных деформаций, а полные проекции перемещений представляют алгебраическую сумму таких перемещений соответственно координатным осям x, y, z:

$$U = U^{c} + U^{0}; \tag{7}$$

$$V = V^{c} + V^{0}; \tag{8}$$

$$W = W^{c} + W^{0}. \tag{9}$$

Оба тензора деформации вызваны действием одного и того же напряженного состояния, но различными сторонами его проявления: сдвиговые смещения вызваны разностью давлений в различных точках среды, а объемные относительные деформации вызваны его величиной. При этом напряженное состояние полностью характеризует потенциальная, гармоническая функция давления, представляющая собой одну треть первого инварианта напряженного состояния:

$$\sigma = \frac{1}{3}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right), \tag{10}$$

где σ_x, σ_y и σ_z – нормальные напряжения по трем ортогональным площадкам для данной точки.

Таким образом, для решения любой задачи по определению напряженно-деформированного состояния следует задаться граничными условиями для гармонической функции давления и определить её. Дальнейшие операции не представляют особых сложностей.

В решаемой задаче граничными условиями для функции давления (рис. 1) будут: на поверхности, под нагрузкой, $\sigma = p$; за её пределами – $\sigma = 0$; функция должна монотонно убывать с удалением от площадки загружения. Такая функция совпадает с функцией для мгновенных напоров в водонасыщенном грунте при быстром нагружении и получена Мачеретом [3] в виде:

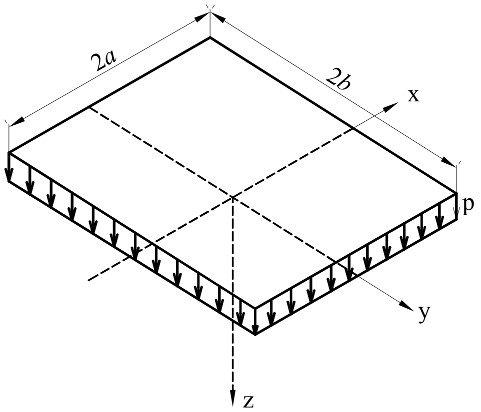

Рис. 1. Схема загружения полупространства равномерной нагрузкой по площади прямоугольника

$$\sigma_{\square} = \frac{p}{2\pi}\left[-\text{arctg}\frac{z\left[(x+a)^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}}{(x+a)(y+b)} + \right.$$

$$+ \text{arctg}\frac{z\left[(x+a)^2+(y-b)^2+z^2\right]^{1/2}}{(x+a)(y-b)} +$$

$$+ \text{arctg}\frac{z\left[(x-a)^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}}{(x-a)(y+b)} -$$

$$\left. - \text{arctg}\frac{z\left[(x-a)^2+(y-b)^2+z^2\right]^{1/2}}{(x-a)(y-b)} \right]. \quad (11)$$

Эту же функцию можно получить путем интегрирования функции давления для сосредоточенной силы, полученной в [2]:

$$\sigma_{\square} = \frac{p}{2\pi}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\frac{z\cdot d\varepsilon d\xi}{\left[(x-\varepsilon)^2+(y-\xi)^2+z^2\right]^{3/2}} =$$

$$= \frac{p\cdot z}{2\pi}\int_{-b}^{b}\frac{(x-\varepsilon)zd\xi}{\left[(y-\xi)^2+z^2\right]\left[(x-\varepsilon)^2+(y-\xi)^2+z^2\right]^{1/2}}\Bigg|_{-a}^{a} =$$

$$= \frac{p}{2\pi}\text{arctg}\frac{(x-\varepsilon)(y-\xi)}{z\left[(x-\varepsilon)^2+(y-\xi)^2+z^2\right]}\Bigg|_{-a}^{a}\Bigg|_{-b}^{b}, \quad (12)$$

а после подстановки пределов интегрирования получаем:

$$\sigma_{\square} = \frac{p}{2\pi}\left[\text{arctg}\frac{(x-a)+(y-b)}{z\left[(x-a)^2+(y-b)^2+z^2\right]^{1/2}} - \right.$$

$$- \text{arctg}\frac{(x+a)(y-b)}{z\left[(x+a)^2+(y-b)^2+z^2\right]^{1/2}} -$$

$$- \text{arctg}\frac{(x-a)(y+b)}{z\left[(x-a)^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}} -$$

$$\left. - \text{arctg}\frac{(x+a)(y+b)}{z\left[(x+a)^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}} \right]. \quad (13)$$

Здесь и в дальнейшем для сокращения записей функцию давления при действии нагрузки, равномерно распределенной на поверхности полупространства по площади прямоугольника, будем обозначать $\sigma_{\square}$. Путем несложных преобразований можно показать, что функции (13) и (11) тождественны.

Для определения компонентов напряжений в этой задаче есть два пути.

1. Можно воспользоваться соотношениями В. А. Флорина [4] для пространственных задач с плоской поверхностью при действии на них нормальной нагрузки:

$$\sigma_x = -z\int\frac{\partial^2\sigma_{\square}}{\partial x^2}dz + \sigma_{\square}; \quad (14)$$

$$\sigma_y = -z\int\frac{\partial^2\sigma_{\square}}{\partial y^2}dz + \sigma_{\square}; \quad (15)$$

$$\sigma_z = -z\frac{\partial\sigma_{\square}}{\partial z} + \sigma_{\square}; \quad (16)$$

$$\tau_{xy} = -z\int\frac{\partial^2\sigma_{\square}}{\partial x\partial y}; \quad (17)$$

$$\tau_{yz} = -z\frac{\partial\sigma_{\square}}{\partial y}; \quad (18)$$

$$\tau_{zx} = -z\frac{\partial\sigma_{\square}}{\partial y}. \quad (19)$$

2. Можно интегрировать компоненты напряжений, полученные для полупространства при действии сосредоточенной силы, направленной по нормали к его поверхности [2].

Однако поскольку в традиционной постановке эта задача была решена [5], то воспользуемся этим решением для определения напряженного состояния среды в рассматриваемой задаче, приняв в нем коэффициент бокового расширения $\mu = 0{,}5$. В результате получим:

$$\sigma_x = \frac{p}{2\pi}\left[\frac{(x+a)(y-b)\cdot z}{\left[(x+a)^2+z^2\right]\left[(x+a)^2+(y-b)^2+z^2\right]^{1/2}} - \right.$$

$$-\frac{(x-a)(y-b)\cdot z}{\left[(x-a)^2+z^2\right]\left[(x-a)^2+(y-b)^2+z^2\right]^{1/2}} -$$

$$-\frac{(x+a)(y+b)\cdot z}{\left[(x+a)^2+z^2\right]\left[(x+a)^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}} +$$

$$+\frac{(x-a)(y+b)\cdot z}{\left[(x-a)^2+z^2\right]\left[(x-a)^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}} -$$

$$-\operatorname{arctg}\frac{z\left[(x-a)^2+(y-b)^2+z^2\right]^{1/2}}{(x-a)(y-b)} +$$

$$+\operatorname{arctg}\frac{z\left[(x-a)^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}}{(x-a)(y+b)} -$$

$$-\operatorname{arctg}\frac{z\left[(x+a)^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}}{(x+a)(y+b)} + ;$$

$$\left. +\operatorname{arctg}\frac{z\left[(x+a)^2+(y-b)^2+z^2\right]^{1/2}}{(x+a)(y-b)}\right]; \quad (20)$$

$$\sigma_y = \frac{p}{2\pi}\left[\frac{(x+a)(y-b)\cdot z}{\left[(y-b)^2+z^2\right]\left[(x+a)^2+(y-b)^2+z^2\right]^{1/2}} - \right.$$

$$-\frac{(x+a)(y+b)\cdot z}{\left[(y+b)^2+z^2\right]\left[(x+a)^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}} -$$

$$-\frac{(x-a)(y-b)\cdot z}{\left[(y-b)^2+z^2\right]\left[(x-a)^2+(y-b)^2+z^2\right]^{1/2}} +$$

$$+\frac{(x-a)(y+b)\cdot z}{\left[(y+b)^2+z^2\right]\left[(x-a)^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}} -$$

$$-\operatorname{arctg}\frac{z\left[(x-a)^2+(y-b)^2+z^2\right]^{1/2}}{(x-a)(y-b)} +$$

$$+\operatorname{arctg}\frac{z\left[(x-a)^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}}{(x-a)(y+b)} -$$

$$-\operatorname{arctg}\frac{z\left[(x+a)^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}}{(x+a)(y+b)} +$$

$$\left. +\operatorname{arctg}\frac{z\left[(x+a)^2+(y-b)^2+z^2\right]^{1/2}}{(x+a)(y-b)}\right]; \quad (21)$$

$$\sigma_z = \frac{p}{2\pi}\left[\frac{z(x-a)(y-b)}{\left[(x-a)^2+z^2\right]\left[(y-b)^2+z^2\right]} \times \right.$$

$$\times\frac{\left[(x-a)^2+(y-b)^2+2z^2\right]}{\left[(x-a)^2+(y-b)^2+z^2\right]^{1/2}} -$$

$$-\frac{z(x-a)(y+b)}{\left[(x-a)^2+z^2\right]\left[(y+b)^2+z^2\right]} \times$$

$$\times\frac{\left[(x-a)^2+(y+b)^2+2z^2\right]}{\left[(x-a)^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}} -$$

$$-\frac{z(x+a)(y-b)}{\left[(x+a)^2+z^2\right]\left[(y-b)^2+z^2\right]} \times$$

$$\times\frac{\left[(x+a)^2+(y-b)^2+2z^2\right]}{\left[(x+a)^2+(y-b)^2+z^2\right]^{1/2}} +$$

$$+\frac{z(x+a)(y+b)}{\left[(x+a)^2+z^2\right]\left[(y+b)^2+z^2\right]} \times$$

$$\times\frac{\left[(x+a)^2+(y+b)^2+2z^2\right]}{\left[(x+a)^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}}-$$

$$-\operatorname{arctg}\frac{z\left[(x-a)^2+(y-b)^2+z^2\right]^{1/2}}{(x-a)(y-b)}+$$

$$+\operatorname{arctg}\frac{z\left[(x-a)^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}}{(x-a)(y+b)}+$$

$$+\operatorname{arctg}\frac{z\left[(x+a)^2+(y-b)^2+z^2\right]^{1/2}}{(x+a)(y-b)}-$$

$$\left.-\operatorname{arctg}\frac{z\left[(x+a)^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}}{(x+a)(y+b)}\right]; \quad (22)$$

$$\tau_{xy}=\frac{p}{2\pi}\left[\frac{z}{\left[(x+a)^2+(y-b)^2+z^2\right]^{1/2}}-\right.$$

$$-\frac{z}{\left[(x-a)^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}}-$$

$$-\frac{z}{\left[(x+a)^2+(y-b)^2+z^2\right]^{1/2}}+$$

$$\left.+\frac{z}{\left[(x+a)^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}}\right]; \quad (23)$$

$$\tau_{yz}=\frac{pz^2}{2\pi}\left[\frac{(x+a)}{\left[(y-b)^2+z^2\right]}\times\right.$$

$$\times\frac{1}{\left[(x+a)^2+(y-b)^2+z^2\right]^{1/2}}-\frac{(x-a)}{\left[(y-b)^2+z^2\right]}\times$$

$$\times\frac{1}{\left[(x-a)^2+(y-b)^2+z^2\right]^{1/2}}-\frac{(x+a)}{\left[(y+b)^2+z^2\right]}\times$$

$$\times\frac{1}{\left[(x+a)^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}}+\frac{(x-a)}{\left[(y+b)^2+z^2\right]}\times$$

$$\times\frac{1}{\left[(x-a)^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}}; \quad (24)$$

$$\tau_{zx}=\frac{pz^2}{2\pi}\left[\frac{(y+b)}{\left[(x-a)^2+z^2\right]}\times\right.$$

$$\times\frac{1}{\left[(x-a)^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}}-\frac{(y-b)}{\left[(x+a)^2+z^2\right]}\times$$

$$\times\frac{1}{\left[(x+a)^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}}-$$

$$-\frac{(y+b)}{\left[(x+a)^2+z^2\right]\left[(x+a)^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}}+$$

$$\left.-\frac{(y-b)}{\left[(x+a)^2+z^2\right]\left[(x+a)^2+(y-b)^2+z^2\right]^{1/2}}\right]. \quad (25)$$

Для определения компонентов перемещений, вызванных чистым сдвигом в упругой среде, определяются частные производные функции давления (13). В результате имеем:

$$\frac{\partial\sigma_{\square}}{\partial x}=\frac{p}{2\pi}\left[\frac{(y+b)^2z\left[(y+b)^2+z^2\right]}{\left[(x+a)^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}}\times\right.$$

$$\times\frac{1}{\left\{(x+a)^2\cdot(y+b)^2+z^2\left[(x+a)^2+(y+b)^2+z^2\right]\right\}}-$$

$$-\frac{(y-b)^2z\left[(y-b)^2+z^2\right]}{\left[(x+a)^2+(y-b)^2+z^2\right]^{1/2}}\times$$

$$\times\frac{1}{\left\{(x+a)^2\cdot(y-b)^2+z^2\left[(x+a)^2+(y-b)^2+z^2\right]\right\}}-$$

$$-\frac{(y+b)z\left[(y+b)^2+z^2\right]}{\left[(x-a)^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}}\times$$

$$\times\frac{1}{\left\{(x-a)^2\cdot(y+b)^2+z^2\left[(x-a)^2+(y+b)^2+z^2\right]\right\}}+$$

$$+\frac{1}{\left\{(x-a)^2\cdot(y-b)^2+z^2\left[(x-a)^2+(y-b)^2+z^2\right]\right\}}\times$$

$$\left.\times\frac{(y-b)z\left[(y-b)^2+z^2\right]}{\left[(x-a)^2+(y-b)^2+z^2\right]^{1/2}}\right]; \quad (26)$$

$$\frac{\partial\sigma_{\square}}{\partial y}=\frac{p}{2\pi}\left[\frac{(x+a)\cdot z\cdot\left[(x+a)^2+z^2\right]}{\left[(x+a)^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}}\times\right.$$

$$\times\frac{1}{\left\{(x+a)^2\cdot(y+b)^2+z^2\left[(x+a)^2+(y+b)^2+z^2\right]\right\}}-$$

$$-\frac{(x+a)\cdot z\cdot\left[(x+a)^2+z^2\right]}{\left[(x+a)^2+(y-b)^2+z^2\right]^{1/2}}\times$$

$$\times\frac{1}{\left\{(x+a)^2\cdot(y-b)^2+z^2\left[(x+a)^2+(y-b)^2+z^2\right]\right\}}-$$

$$-\frac{(x-a)\cdot z\cdot\left[(x-a)^2+z^2\right]}{\left[(x-a)^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}}\times$$

$$\times\frac{1}{\left\{(x-a)^2\cdot(y+b)^2+z^2\left[(x-a)^2+(y+b)^2+z^2\right]\right\}}+$$

$$-\frac{1}{\left\{(x-a)^2\cdot(y-b)^2+z^2\left[(x-a)^2+(y-b)^2+z^2\right]\right\}}\times$$

$$\left.\times\frac{(x-a)\cdot z\cdot\left[(x-a)^2+z^2\right]}{\left[(x-a)^2+(y-b)^2+z^2\right]^{1/2}}\right]; \qquad (27)$$

$$\frac{\partial\sigma_{\square}}{\partial z}=\frac{p}{2\pi}\left[\frac{(x+a)(y+b)\left[(x+a)^2+(y+b)^2+2z^2\right]}{\left[(x+a)^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}}\times\right.$$

$$\times\frac{1}{\left\{(x+a)^2\cdot(y+b)^2+z^2\left[(x+a)^2+(y+b)^2+z^2\right]\right\}}+$$

$$+\frac{(x+a)(y-b)\left[(x+a)^2+(y-b)^2+2z^2\right]}{\left[(x+a)^2+(y-b)^2+z^2\right]^{1/2}}\times$$

$$\times\frac{1}{\left\{(x+a)^2\cdot(y-b)^2+z^2\left[(x+a)^2+(y-b)^2+z^2\right]\right\}}+$$

$$+\frac{(x-a)(y+b)\left[(x-a)^2+(y+b)^2+2z^2\right]}{\left[(x-a)^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}}\times$$

$$\times\frac{1}{\left\{(x-a)^2\cdot(y+b)^2+z^2\left[(x-a)^2+(y+b)^2+z^2\right]\right\}}-$$

$$-\frac{1}{\left\{(x-a)^2\cdot(y-b)^2+z^2\left[(x-a)^2+(y-b)^2+z^2\right]\right\}}\times$$

$$\left.\times\frac{(x-a)(y-b)\left[(x-a)^2+(y-b)^2+z^2\right]}{\left[(x-a)^2+(y-b)^2+z^2\right]^{1/2}}\right]. \qquad (28)$$

Теперь перемещения точек среды, вызванные чистым сдвигом (в сокращенной форме записи), будут:

$$U^{c}=-\kappa^{c}\cdot\frac{\partial\sigma_{\square}}{\partial x}; \qquad (29)$$

$$V^{c}=-\kappa^{c}\cdot\frac{\partial\sigma_{\square}}{\partial y}; \qquad (30)$$

$$W^{c}=-\kappa^{c}\cdot\frac{\partial\sigma_{\square}}{\partial z}. \qquad (31)$$

В формулах (29) – (31) κ^{c} (м^4/н) – модуль деформации чистого сдвига, т.е. коэффициент пропорциональности между градиентом давления и смещением точки в результате чистого сдвига.

Перемещения точек, вызванные изменением плотности среды, согласно [1, 2], будут протекать только по вертикали, т.е.

$$U^0=V^0=0; \qquad (32)$$

$$\varepsilon_z^0=k^0\cdot\sigma_{\square}; \qquad (33)$$

$$W^0=\int_{\infty}^{z}\kappa^0\cdot\varepsilon_z dz=\kappa^0\cdot\int_{\infty}^{z}\sigma_{\square}\cdot dz. \qquad (34)$$

В формулах (33) и (34) κ^0(м^2/н) – модуль объемной деформации, т.е. коэффициент пропорциональности между давлением и относительной объемной деформацией.

Интегрирование функции (13) соответственно (34) в полных записях довольно трудоемкое, поэтому мы будем интегрировать один член этой формулы, записав его сокращенно:

$$F=\int\operatorname{arctg}\frac{z\left(x^2+y^2+z^2\right)dz}{x\cdot y}, \qquad (35)$$

а затем запишем результат в развернутом виде.

Интегрирование (35) выполняется по частям:

$$u=\operatorname{arctg}\frac{1}{x\cdot y}\left[z^2\left(x^2+y^2+z^2\right)\right];$$

$$du = \frac{1}{1+\frac{z^2\left(x^2+y^2+z^2\right)}{x^2y^2}} \times \frac{1}{x\cdot y} \times$$

$$\times \frac{2z\left(x^2+y^2\right)+4z^3}{2\left[z^2\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]^{1/2}} dz\,;$$

$$du = \frac{xy\left(x^2+y^2+2z^2\right)}{\left[x^2y^2+z^2\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}} dz\,;$$

$$dv = dz\,;\ v=z;$$

$$F = u\cdot v - \int v\,du = z\cdot \operatorname{arctg}\frac{z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}{x\cdot y} -$$

$$-\int z \frac{x\cdot y\left(x^2+y^2+2z^2\right)}{\left[x^2y^2+z^2\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}} dz.$$

Вводится новый аргумент:

$$t^2 = \left(x^2+y^2+z^2\right),$$

при этом $2tdt = 2zdz$; $tdt = zdz$, тогда:

$$\int z \frac{x\cdot y\left(x^2+y^2+2z^2\right)}{\left[x^2y^2+z^2\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]\left(x^2+y^2+z^2\right)} dz =$$

$$= \int \frac{x\cdot y\left(2t^2-x^2-y^2\right)tdt}{\left[x^2y^2+t^2\left(t^2-x^2-y^2\right)t^2\right]t} =$$

$$= \int \frac{x\cdot y\left(2t^2-x^2-y^2\right)}{t^4-t^2\left(x^2+y^2\right)+x^2y^2} dt =$$

$$= x\cdot y\int \frac{\left(t^2-x^2\right)+\left(t^2-y^2\right)}{\left(t^2-x^2\right)\cdot\left(t^2-y^2\right)} dt = x\cdot y \times$$

$$\times\left[\int \frac{\left(t^2-x^2\right)}{\left(t^2-x^2\right)\cdot\left(t^2-y^2\right)}dt + \int \frac{\left(t^2-y^2\right)dt}{\left(t^2-x^2\right)\cdot\left(t^2-y^2\right)}\right] =$$

$$= x\cdot y\int \frac{dt}{\left(t^2-y^2\right)} + x\cdot y\int \frac{dt}{\left(t^2-x^2\right)} =$$

$$= -\frac{x\cdot y}{y^2}\int \frac{dt}{\left(1+\frac{t^2}{y^2}\right)} - \frac{x\cdot y}{x^2}\int \frac{dt}{\left(1-\frac{t^2}{x^2}\right)} =$$

$$= x\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\left(1+\frac{t}{y}\right)}{\left(1-\frac{t}{y}\right)}\right| - y\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\left(1+\frac{t}{x}\right)}{\left(1-\frac{t}{x}\right)}\right| =$$

$$= -\frac{x}{2}\ln\left|\frac{(y+t)}{(y-t)}\right| - \frac{y}{2}\ln\left|\frac{(x+t)}{(x-t)}\right|.$$

Возвращаясь к аргументу z, окончательно имеем:

$$F = z\cdot\operatorname{arctg}\frac{z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}{x\cdot y} +$$

$$+\frac{x}{2}\ln\left|\frac{y+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}{y-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}\right| +$$

$$+\frac{y}{2}\ln\left|\frac{x+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}{x-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}\right|. \qquad (36)$$

Теперь запишем результат интегрирования (34) в развернутом виде:

$$W^0 = \frac{p}{2\pi}\left[-z\cdot\operatorname{arctg}\frac{z\left[(x+a)^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}}{(x+a)(y+b)} -\right.$$

$$-\frac{(x+a)}{2}\ln\left|\frac{(y+b)+\left[(x+a)^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}}{(y+b)-\left[(x+a)^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}}\right| -$$

$$-\frac{(y+b)}{2}\ln\left|\frac{(x+a)+\left[(x+a)^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}}{(x+a)-\left[(x+a)^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}}\right| +$$

$$+z\cdot\operatorname{arctg}\frac{z\left[(x+a)^2+(y-b)^2+z^2\right]^{1/2}}{(x+a)(y-b)} +$$

$$+\frac{(x+a)}{2}\ln\left|\frac{(y-b)+\left[(x+a)^2+(y-b)^2+z^2\right]^{1/2}}{(y-b)-\left[(x+a)^2+(y-b)^2+z^2\right]^{1/2}}\right| +$$

$$+\frac{(y-b)}{2}\ln\left|\frac{(x+a)+\left[(x+a)^2+(y-b)^2+z^2\right]^{1/2}}{(x+a)-\left[(x+a)^2+(y-b)^2+z^2\right]^{1/2}}\right| +$$

$$+z\cdot\operatorname{arctg}\frac{z\left[(x-a)^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}}{(x-a)(y+b)} +$$

$$+\frac{(x-a)}{2}\ln\left|\frac{(y+b)+\left[(x-a)^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}}{(y+b)-\left[(x-a)^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}}\right|+$$

$$-\frac{(y+b)}{2}\ln\left|\frac{(x-a)+\left[(x-a)^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}}{(x-a)-\left[(x-a)^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}}\right|-$$

$$-z\cdot\operatorname{arctg}\frac{z\left[(x-a)^2+(y-b)^2+z^2\right]^{1/2}}{(x-a)(y-b)}-\frac{(x-a)}{2}-$$

$$-\ln\left|\frac{(y-b)+\left[(x-a)^2+(y-b)^2+z^2\right]^{1/2}}{(y-b)-\left[(x-a)^2+(y-b)^2+z^2\right]^{1/2}}\right|-\frac{(y-b)}{2}-$$

$$\left.-\ln\left|-\frac{(x-a)+\left[(x-a)^2+(y-b)^2+z^2\right]^{1/2}}{(x-a)-\left[(x-a)^2+(y-b)^2+z^2\right]^{1/2}}\right|\right]. \quad (37)$$

Предельный переход из (13) путем –∞ b +∞ даёт функцию давления для задачи плоского деформирования полупространства равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью p (н/м^2) по бесконечной полосе шириной $2a$ (рис. 2):

$$\sigma=\frac{p}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{x+a}{z}-\operatorname{arctg}\frac{x-a}{z}\right]. \quad (38)$$

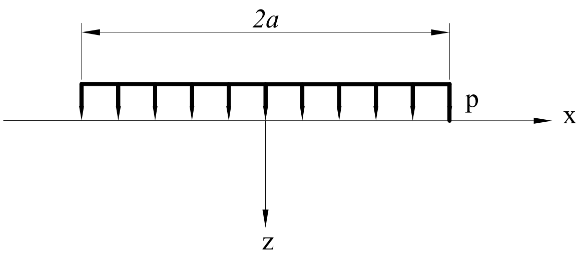

Рис. 2. Схема полупространства, равномерно нагруженного полосовой нагрузкой

Как показано В. А. Флориным [4], при плоском деформировании полупространства нормальной к его поверхности нагрузкой компоненты напряжений в плоскости деформации могут быть получены с использованием функции давления:

$$\sigma_x=\sigma+z\frac{\partial\sigma}{\partial z}; \quad (39)$$

$$\sigma_z=\sigma-z\frac{\partial\sigma}{\partial z}; \quad (40)$$

$$\tau_{xy}=-z\frac{\partial\sigma}{\partial x}, \quad (41)$$

при этом третья компоненты нормального напряжения будет равна функции давления (38).

Производные (38) будут:

$$\frac{d}{dx}\frac{p}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{x+a}{z}-\operatorname{arctg}\frac{x-a}{z}\right]=$$

$$=-\frac{p}{\pi}\frac{4axz}{\left[\left(x^2+z^2-a^2\right)^2+4a^2z^2\right]}; \quad (42)$$

$$\frac{d}{dz}\frac{p}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{x+a}{z}-\operatorname{arctg}\frac{x-a}{z}\right]=$$

$$=-\frac{p}{\pi}\frac{2a\left(x^2-a^2-z^2\right)}{\left[\left(x^2+z^2-a^2\right)^2+4a^2z^2\right]}. \quad (43)$$

Окончательно компоненты напряженного состояния при плоском деформировании полупространства равномерно распределенной нагрузкой по бесконечной полосе шириной $2a$ будут иметь вид:

$$\sigma_x=\frac{p}{\pi}\left\{\left[\operatorname{arctg}\frac{x+a}{z}-\operatorname{arctg}\frac{x-a}{z}\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{2a\left(x^2-a^2-z^2\right)}{\left[\left(x^2+z^2-a^2\right)^2+4a^2z^2\right]}\right\}; \quad (44)$$

$$\sigma_z=\frac{p}{\pi}\left\{\left[\operatorname{arctg}\frac{x+a}{z}-\operatorname{arctg}\frac{x-a}{z}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{2a\left(x^2-a^2-z^2\right)}{\left[\left(x^2+z^2-a^2\right)^2+4a^2z^2\right]}\right\}; \quad (45)$$

$$\sigma_y=\frac{p}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{x+a}{z}-\operatorname{arctg}\frac{x-a}{z}\right]; \quad (46)$$

$$\tau_{xz}=\frac{p}{\pi}\frac{4axz^2}{\left[\left(x^2+z^2-a^2\right)^2+4a^2z^2\right]}. \quad (47)$$

Компоненты сдвиговых смещений, согласно [1, 2], будут:

$$U^{c} = -\kappa^{c}\frac{\partial\sigma}{\partial x} = \kappa^{c}\frac{p}{\pi}\frac{4axz}{\left[\left(x^2+z^2-a^2\right)^2+4a^2z^2\right]}; \quad (48)$$

$$W^{c} = -\kappa^{c}\frac{\partial\sigma}{\partial z} = \kappa^{c}\frac{p}{\pi}\frac{2a\left(x^2-a^2-z^2\right)}{\left[\left(x^2+z^2-a^2\right)^2+4a^2z^2\right]}. \quad (49)$$

Компонента перемещения, вызванная объёмным деформированием, определяется интегрированием выражения:

$$W^{0} = \kappa^{0}\int_{\infty}^{z}\varepsilon_z^0 dz\,. \quad (50)$$

$$W^{0} = \kappa^{0}\frac{p}{\pi}\left[\int_{z_1}^{z}\operatorname{arctg}\frac{x+a}{z}dz - \int_{z_1}^{z}\operatorname{arctg}\frac{x-a}{z}dz\right] =$$

$$= \kappa^{0}\frac{p}{\pi}\left[\int_{z_1}^{z}\operatorname{arcctg}\frac{z}{x+a}dz - \int_{z_1}^{z}\operatorname{arcctg}\frac{z}{x-a}dz\right];$$

$$W^{0} = \kappa^{0}\frac{p}{\pi}\left[z\cdot\operatorname{arcctg}\frac{z}{x+a} + \frac{x+a}{2}\ln\left[\left(x+a\right)^2+z^2\right] - \right.$$
$$\left. - z\cdot\operatorname{arcctg}\frac{z}{x-a} - \frac{x-a}{2}\ln\left[\left(x-a\right)^2+z^2\right]\right]\Bigg|_{z_1}^{z}. \quad (51)$$

В выражении (51) нижний предел $z \to \infty$ брать не следует, поскольку осадка от изменения плотности среды будет неограниченно возрастать, поэтому следует определять величину сжатия конкретного упругого слоя.

Выводы

Представлено полное решение задач о напряженно-деформированном состоянии упругого полупространства при его нагружении равномерно распределенной нагрузкой по полосе постоянной ширины конечной и бесконечной длины. В полученных решениях напряженное состояние любого элемента упругой среды удовлетворяет системе дифференциальных уравнений равновесия, а компоненты относительных деформаций и перемещений – условиям сплошности, поэтому оно является строгим и единственным. Характерной особенностью решения задач теории упругости с разделением деформаций по их происхождению на чисто сдвиговые и объемные является то, что эти деформации определяются не от отдельных компонентов напряжений, а от обобщенной интегральной характеристики напряженного состояния упругой среды – давления в точке, которая представляет собой гармоническую потенциальную функцию.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бадалаха, И. К. Постановка и решение задач теории упругости с использованием потенциала [Текст] / И. К. Бадалаха // Дніпропетр. держ. техн. ун-т залізн. трансп. Зб. наук. пр. Будівництво. – Вип. 6. – Д., 1999. – С. 173-184.
2. Бадалаха, И. К. Определение напряженно-деформированного состояния упругих массивов путем выделения объемных и сдвиговых деформаций [Текст] / И. К. Бадалаха // Ин-т геотехнической механики НАН Украины, межведомственный сб. науч. тр. – Вып. 18. – Д.: Поліграфіст, 2000. – С. 119-127.
3. Мачерет, Я. А. Распределение мгновенных напоров и давлений в грунтовой массе, вызванных мгновенной нагрузкой [Текст] / Я. А. Мачерет // Тр. ВИОС. Основания и фундаменты. Сб.
4. Флорин, В. А. Основы механики грунтов [Текст]. – т. I / В. А. Флорин. – Л.-М.: Госиздательство литературы по строительству, архитектуре и строительным матеріалам, 1959. – 359 с.
5. Короткин, В. Г. Объемная задача для упруго-изотропного полупространства [Текст] / В. Г. Короткин / НКТП СССР, Главгидроэнергострой. Гос. всесоюзн. трест по изысканиям и проектированию гидроэлектростанций и гидроэнергоузлов, Гидроэнергопроект, Ленинград. отделение. – 1938. – Сб. № 4, изыскательский вып. – С. 52-85.

Поступила в редколлегию 24.06.2009.
Принята к печати 01.07.2009.