УДК 330.322

А. А. БОСОВ, Х. В. ДРЕБОТ (ДІІТ)

ВИЗНАЧЕННЯ РАЦІОНАЛЬНОГО ІНВЕСТУВАННЯ

Запропоновано алгоритм та програма розв’язку завдання раціонального інвестування.

Предложены алгоритм и программа решения задачи рационального инвестирования.

The algorithm and computer software for solution of a problem of rational investment are proposed.

У розрахунку основних характеристик господарювання важливе місце займають параметри зовнішньої дії.

Реалізація зовнішніх дій здійснюється через певний набір заходів.

Позначимо через $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ набір заходів, назви яких позначаємо символами ω_i, $i = \overline{1, n}$.

Реалізація кожного заходу вимагає певних витрат засобів (фінансів) $z(\omega_i)$ і витрат часу $t(\omega_i)$, $i = \overline{1, n}$.

Вважаємо, що якщо захід ω_i буде упроваджено (реалізовано), то це приведе до отримання прибутку в розмірі $p(\omega_i)$.

Можливості особи (органу), що ухвалює рішення, є, як правило, обмеженими у фінансовому сенсі; останнє означає, що витрати засобів не повинні перевершувати наперед заданої величини D.

1. Постановка задачі раціонального інвестування

Нехай $A \subset \Omega$ – деякий набір заходів, тоді прибуток може бути розрахований за формулою:

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega). \qquad (1)$$

Якщо всі заходи з множини A починають реалізовуватися одночасно, тоді час повної реалізації заходів з набору A обчислюється як

$$T(A) = \max_{\omega \in A} \{t(\omega)\}. \qquad (2)$$

Фінансові витрати на реалізацію заходів із множини A складають

$$Z(A) = \sum_{\omega \in A} z(\omega). \qquad (3)$$

І оскільки ми обмежені у фінансах, то значення $Z(A)$, обчислюване за формулою (3), повинне задовольняти нерівності:

$$Z(A) \le D. \qquad (4)$$

Щодо множини A припускаємо, що це може бути будь-яка підмножина множини Ω. Іншими словами, якщо $\Re(\Omega)$ – набір всіх підмножин множини Ω, то до обмеження (4) приєднаємо умову:

$$A \in \Re(\Omega). \qquad (5)$$

Таким чином, приходимо до задачі визначення такого набору заходів, що задовольняє обмеженням (4) і (5), щоб прибуток $P(A)$ був би якомога більше, а час $T(A)$ був би якомога менше.

Сформульована задача є задачею векторної оптимізації за двома показниками [1] і формально може бути записана у вигляді:

$$\begin{pmatrix} -P(A) \\ T(A) \end{pmatrix} \to \min \qquad (6)$$

за умов (4) і (5).

Відзначимо, що задача (6) сформульована з використанням поняття функції множини [2], що накладає певні труднощі при її рішенні.

Перш за все дамо визначення понять рішення задачі векторної оптимізації (6).

Вирішення 1. Набір заходів A називатимемо *ефективним*, якщо будь-яка зміна (варіація) його приводить до зменшення $P(A)$ – прибутків – або до збільшення часу $T(A)$, а може бути і те й інше.

Вирішення 2. Два набори заходів A_1 і A_2 називаються *незрівняними*, якщо у одного з них прибуток більш ніж у іншого, але час менше у іншого.

Вирішення 3. Вирішити задачу векторної оптимізації означає знайти таку множину

$$X_* = \{A_i : i = \overline{1,m}\},\qquad (7)$$

де всі A_i, що входять в X_*, є ефективними і незрівняними між собою.

Вирішивши задачу векторної оптимізації, дістаємо можливість побудови залежності прибутків P від часу реалізації T.

У даній задачі (6) якісний характер залежності $P(T)$ представлений на рис. 1.

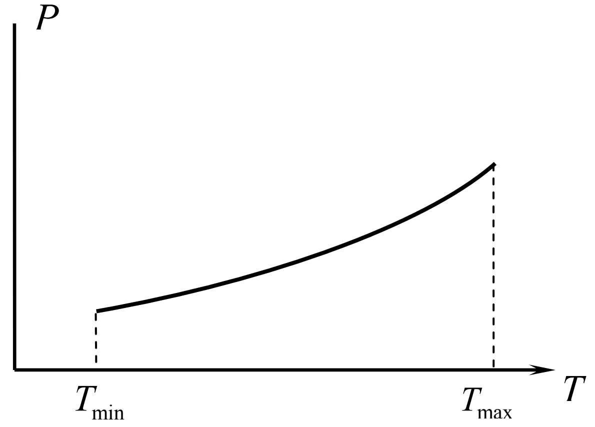

Рис. 1. Якісний характер залежності $P(T)$

Очевидно, що дана крива дозволяє оцінювати пропоновані заходи і необхідне фінансування для створення і оновлення засобів виробництва, боротьби з екологічними наслідками і впливу на основний соціальний показник (заробітну плату).

2. Алгоритм рішення задачі вибору раціональних заходів

Відмітимо, що якщо n – число заходів, то всього варіантів формування множини A дорівнює $2^n - 1$. Так, наприклад, коли $n = 5$, то необхідно розглянути 31 варіант і серед них відібрати ефективні і незрівняні варіанти безпосереднім перебором.

При розробці алгоритму рішення задачі (6) використовувалася необхідна умова ефективності множини A:

$$\frac{-dP(A)}{d\mu} + \lambda \frac{dT(A)}{d\mu} = 0,\qquad (8)$$

де похідні беруться по мірі μ, а множник $\lambda \geq 0$ [2].

Основні елементи алгоритму є:

П1. Множина заходів Ω упорядковуємо за часом, так щоб

$$t(\omega_i) \leq t(\omega_{i+1}),\quad i = \overline{1,n-1}.\qquad (9)$$

П2. Формуємо множину $\tilde{X}_*$, елементами якої є

$$A_k = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k\},\quad k = \overline{1,n}.$$

П3. Визначаємо такий номер k^*, що

$$Z(A_{k^*}) \leq D < Z(A_{k^*+1}).$$

П4. Якщо $Z(A_{k^*}) = D$, то множина

$$X_* = \left\{A_k : k = \overline{1,k^*}\right\},\qquad (10)$$

інакше виконуємо П.5.

П5. Уточнюємо множину A_{k^*+1}, так щоб

$$Z(A_{k^*}) < Z(\tilde{A}_{k+1}) \leq D.\qquad (11)$$

П6. Поповнюємо множину X_* уточненими $\tilde{A}_{k^*+1}$ і будуємо залежність $P(T)$.

3. Чисельний приклад рішення задачі векторної оптимізації

Нехай набір заходів $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ характеризуються витратами $z(\omega_i)$, прибутком $p(\omega_i)$ і часом $t(\omega_i)$, які наведені в табл. 1.

Таблиця 1

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$z(\omega_i)$	6	8	5	2	7
$p(\omega_i)$	8	9	6	4	12
$t(\omega_i)$	3	4	2	1	5

Відповідно до наведеного алгоритму, упорядкувавши заходи за часом, приходимо до наступної табл. 2.

Таблиця 2

	ω_4	ω_3	ω_1	ω_2	ω_5
z	2	5	6	8	7
p	4	6	8	9	12
t	1	2	3	4	5

Формуємо ефективні і незрівняні множини A_k (табл. 3). За даними цієї таблиці будуємо графіки залежностей $P(T)$ і $Z(T)$ (рис. 2).

На підставі табл. 3 виникає можливість побудувати залежність прибутку P від витрат Z (рис. 3).

Таблиця 3

k	A_k	$Z(A_k)$	$P(A_k)$	$T(A_k)$
1	ω_4	2	4	1
2	ω_4, ω_3	7	10	2
3	$\omega_4, \omega_3, \omega_1$	13	18	3
4	$\omega_4, \omega_3, \omega_1, \omega_2$	21	27	4
6	$\omega_4, \omega_3, \omega_1, \omega_2, \omega_5$	28	39	5

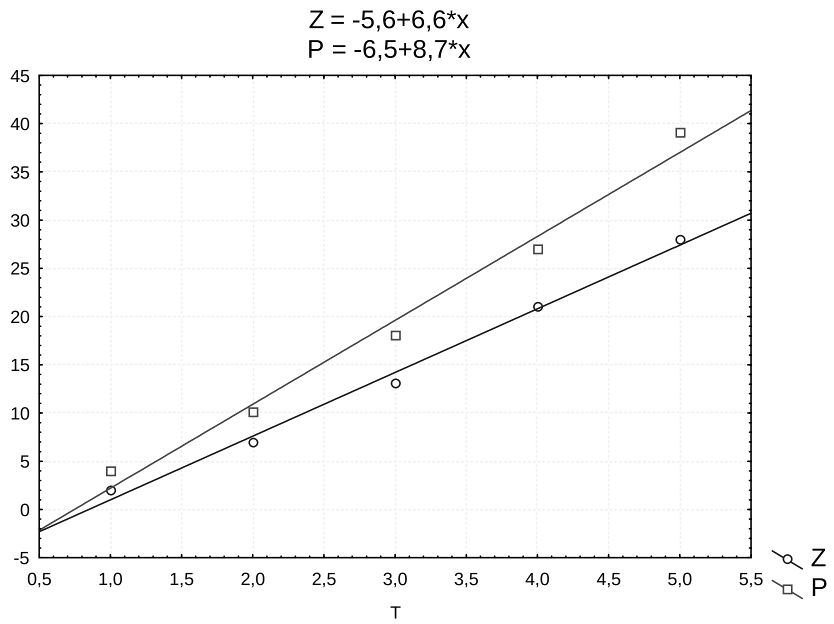

Рис. 2. Графічне уявлення $P(T)$ і $Z(T)$

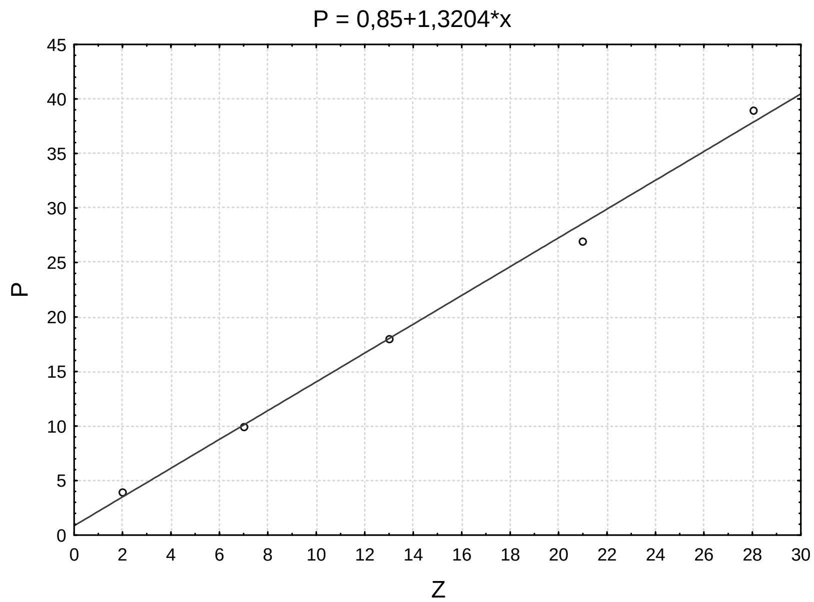

Рис. 3. Залежність прибутків P від витрат Z

Дана залежність дозволяє вирішувати задачу визначення прибутку від наявних фінансів D, оскільки маємо залежність:

$$P = 0,85 + 1,3204 \cdot Z . \quad (11)$$

Так, наприклад, при $D = 18$ прибуток буде рівним

$$P = 0,85 + 1,3204 \cdot 18 = 24,98 . \quad (12)$$

Можна вирішувати і зворотну задачу – за бажаним прибутком визначати необхідні фінанси.

Оскільки в розглянутому прикладі $n = 5$, то всіляких варіантів множин типу $A \subset \Omega$ буде $2^5 - 1 = 31$.

Розрахунки наведені у табл. 4.

Таблиця 4

№	ω_5	ω_4	ω_3	ω_2	ω_1	Витрати Z	Прибуток P	$T(A)$
1	0	0	0	0	ω_1	6	8	3
2	0	0	0	ω_2	0	8	9	4
3	0	0	0	ω_2	ω_1	14	17	4
4	0	0	ω_3	0	0	5	6	2
5	0	0	ω_3	0	ω_1	11	15	3
6	0	0	ω_3	ω_2	0	13	15	4
7	0	0	ω_3	ω_2	ω_1	19	23	4
8	0	ω_4	0	0	0	2	4	1
9	0	ω_4	0	0	ω_1	8	12	3
10	0	ω_4	0	ω_2	0	10	13	4
11	0	ω_4	0	ω_2	ω_1	16	21	4
12	0	ω_4	ω_3	0	0	7	10	2
13	0	ω_4	ω_3	0	ω_1	15	18	3
14	0	ω_4	ω_3	ω_2	0	15	19	4
15	0	ω_4	ω_3	ω_2	ω_1	21	27	4
16	ω_5	0	0	0	0	7	12	5
17	ω_5	0	0	0	ω_1	13	20	5
18	ω_5	0	0	ω_2	0	15	21	5
19	ω_5	0	0	ω_2	ω_1	21	29	5
20	ω_5	0	ω_3	0	0	12	16	5
21	ω_5	0	ω_3	0	ω_1	18	24	5
22	ω_5	0	ω_3	ω_2	0	20	37	5
23	ω_5	0	ω_3	ω_2	ω_1	26	35	5
24	ω_5	ω_4	0	0	0	9	16	5
25	ω_5	ω_4	0	0	ω_1	15	24	5
26	ω_5	ω_4	0	ω_2	0	17	25	5
27	ω_5	ω_4	0	ω_2	ω_1	23	33	5
28	ω_5	ω_4	ω_3	0	0	14	22	5
29	ω_5	ω_4	ω_3	0	ω_1	20	30	5
30	ω_5	ω_4	ω_3	ω_2	0	22	29	5
31	ω_5	ω_4	ω_3	ω_2	ω_1	28	37	5

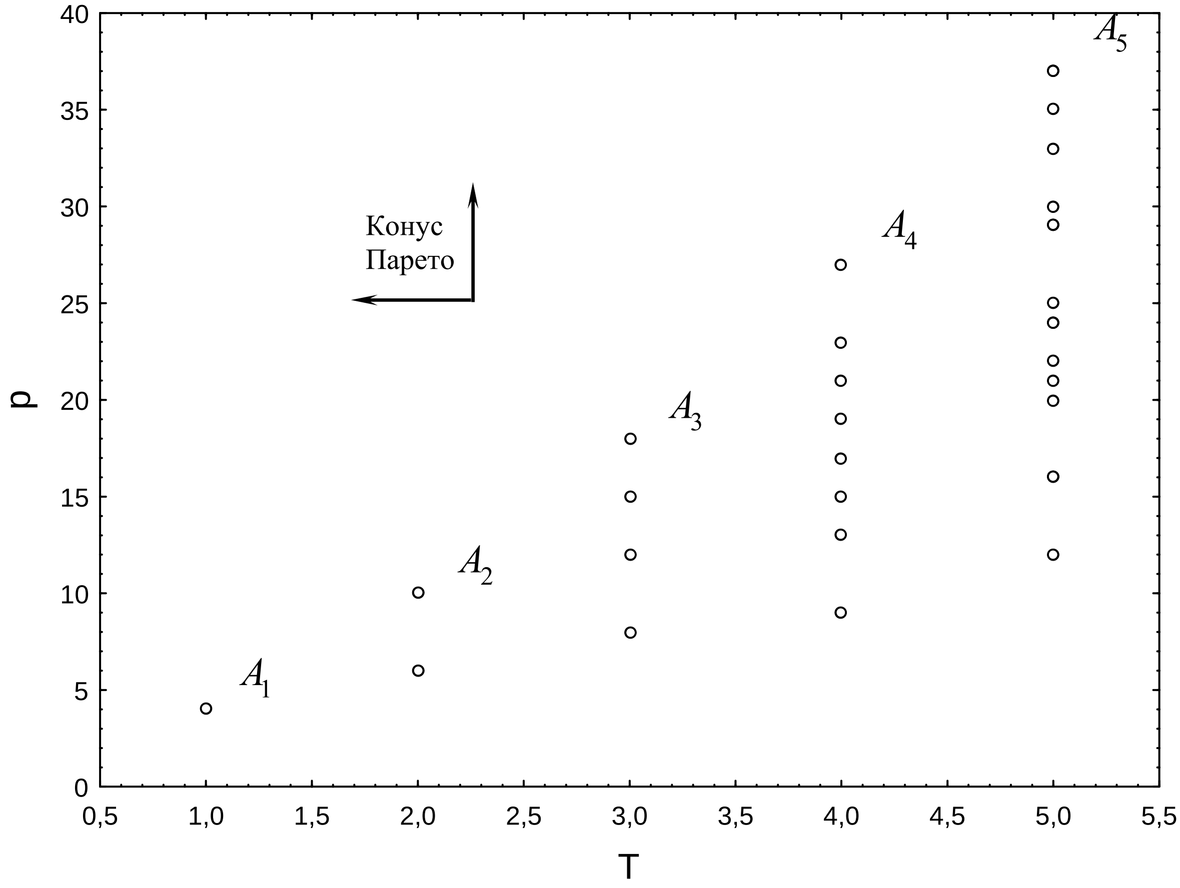

Рис. 4. Відображення всіх варіантів табл. 4 в просторі функціоналів T і P

Якщо відобразити дані табл. 4 в простір функціоналів $T(A)$ і $P(A)$, то отримаємо набір точок (див. рис. 4), серед яких відберемо точки за допомогою конуса Парето. Ці точки помічені як A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, тобто точка, над якою вказано A_i, означає, що значення T і P відповідають множині A_i.

Відзначимо, що найбільші витрати часу необхідні при впорядкуванні множини Ω по $t(\omega)$.

Ця процедура містить в собі не більше ніж $\frac{n(n-1)}{2}$ операцій порівняння.

Звідки витікає, що витрати часу запропонованого алгоритму будуть порядку $O\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)$, що цілком реалізовується на сучасних обчислювальних машинах.

Далі наведено програму розрахунку раціонального інвестування заходів.

```
> restart:with(plots):
> n:=5;Кількість заходів.
                    n := 5
> z:=vector(n,[6,8,5,2,7]); Витрати фінансів.
                    z := [6, 8, 5, 2, 7]
> p:=vector(n,[8,9,6,4,12]);Прибуток
                    p := [8, 9, 6, 4, 12]
> t:=[3,4,2,1,5]; Витрати часу.
                    t := [3, 4, 2, 1, 5]
> ts:=sort(t);
                    ts := [1, 2, 3, 4, 5]
> K:=vector(n,[]):
```

```
> for i from 1 to n do for j from 1 to n do if ts[i]=t[j] then K[i]:=j: end if: end do: end do;print(`K=`,K);
```
Визначення порядку формування множин A [k].

$$K=, [4, 3, 1, 2, 5]$$

```
>A:={}:P:=0:Z:=0:PP:=vector(n,[]):ZZ:=vector(n,[]):T:=vector(n,[]):
```
Рішення задачі векторної оптимізації.

```
> for i1 from 1 to n do A:=A union {w[K[i1]]}:P:=P+p[K[i1]]:PP[i1]:=P:Z:=Z+z[K[i1]]:ZZ[i1]:=Z:T[i1]:=t[K[i1]]:print(A,`P=`,P,`Z=`,Z,`T=`,t[K[i1]]):  end do:
```

$$\{w_4\}, P=, 4, Z=, 2, T=, 1$$

$$\{w_4, w_3\}, P=, 10, Z=, 7, T=, 2$$

$$\{w_4, w_1, w_3\}, P=, 18, Z=, 13, T=, 3$$

$$\{w_4, w_2, w_1, w_3\}, P=, 27, Z=, 21, T=, 4$$

$$\{w_4, w_5, w_2, w_1, w_3\}, P=, 39, Z=, 28, T=, 5$$

```
>p1:=plot([T[i2],PP[i2],i2=1..n],style=line,thickness=3,labels=["t"," p "]):p1;
```

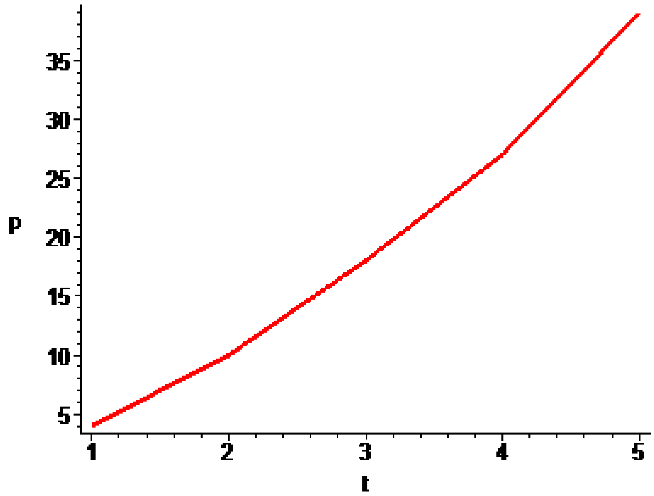

Рис. 5

```
>p2:=plot([T[i2],ZZ[i2],i2=1..n],style=line,thickness=3,labels=["t"," Z "],color=blue):p2;
```

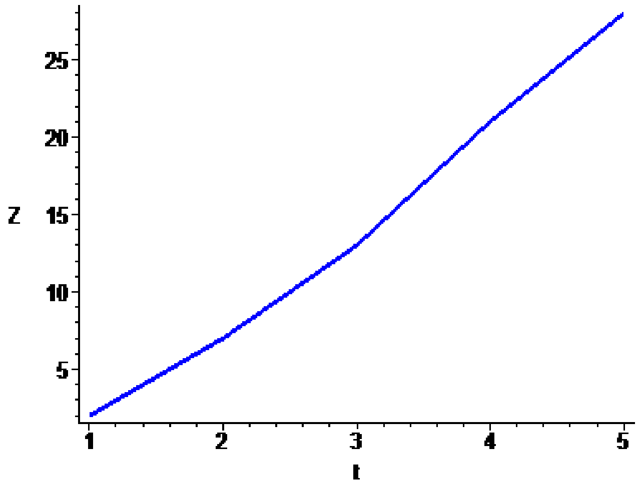

Рис. 6

```
>p3:=plot([T[i2],ZZ[i2],i2=1..n],style=line,thickness=3,labels=["t","
Z P "],color=blue):
>p4:=plot([T[i2],PP[i2],i2=1..n],style=line,thickness=3,labels=["t","
z p "]):
> display({p3,p4});
```

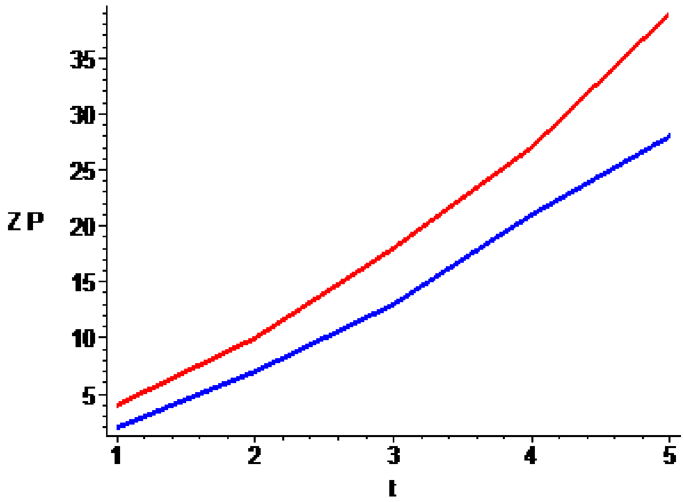

Рис. 7

```
>p5:=plot([ZZ[i2],PP[i2],i2=1..n],style=line,thickness=3,labels=["Z","
P "],color=red):p5;
```

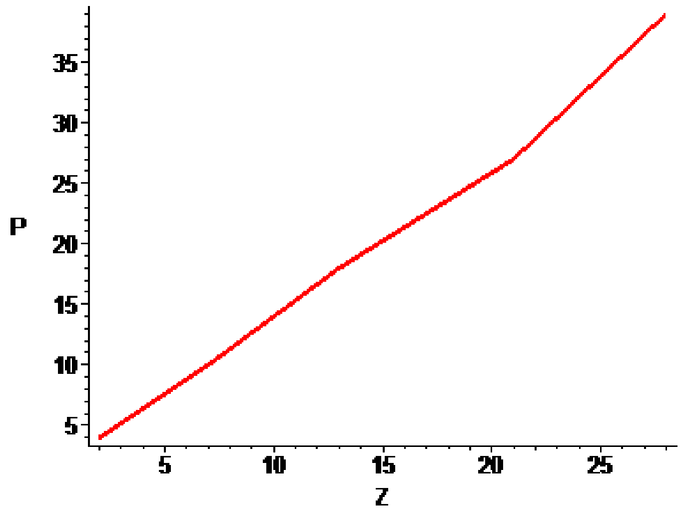

Рис. 8

4. Обґрунтування алгоритму розв'язання задачі векторної оптимізації

Вважаємо, що множина заходів $\Omega = \left\{\omega_i : i = \overline{1, n}\right\}$ упорядкована за часом, тобто має місце

$$t(\omega_i) \le t(\omega_j) \quad \text{для} \quad i < j .$$

Позначимо через A_k множину, що складається із заходів $\left\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k\right\}$, $k = \overline{1, n}$.

Якщо $\Re\left(\Omega\right)$ є набором всіх підмножин множини Ω, то мають місце наступні твердження:

Будь-яка множина $A_k \in \Re\left(\Omega\right)$ є *ефективною.*

Доведення

Нагадаємо, що множина A є ефективною, якщо будь-яка його варіація призводить до зменшення прибутку або збільшення часу, тобто до погіршення хоча б одного з показників.

Візьмемо деяку множину $B \in \Re\left(\Omega\right)$, яку можна представити у вигляді:

$$B = B_1 \cup B_2,$$

причому $B_1 \subset A_k$ і $B_2 \not\subset A_k$, природно $B_1 \cap B_2 = \varnothing$. Тоді варіація множини A_k за допомогою множини B являє собою

$$A_k \Delta B = (A_k \setminus B_1) \cup B_2,$$

де Δ – операція симетричної різниці.

У силу адитивності функції множини $P(A)$ маємо:

$$P(A_k \Delta B) = P(A) + P(B_2) - P(B_1),$$

а приріст прибутку становить

$$P(A_k \Delta B) - P(A) = P(B_2) - P(B_1).$$

Розглянемо випадок, коли $P(B_2) - P(B_1) > 0$, тобто при варіації прибуток збільшується.

Але оскільки

$$T(A_k \Delta B) = \\ = \max\left\{ \max_{\omega \in A \setminus B_1} (t(\omega)),\ \max_{\omega \in B_2} (t(\omega)) \right\}, \quad (13)$$

то і час погіршується.

Отже, множина A_k є ефективною.

Зауважимо, що якщо $B_2 = \varnothing$, то зменшується прибуток, у разі коли $B_1 = \varnothing$, то збільшується час, тобто A_k – ефективна, що і доводить твердження.

Дві множини A_i і A_j, якщо $i \neq j$, є *незрівняними*.

Доведення

Визначеності заради вважаємо, що $i < j$, тоді:

$$P(A_i) < P(A_j);$$

$$T(A_i) < T(A_j),$$

що говорить про незрівнянність за Парето множин A_i і A_j.

Твердження 1. Якщо множина A відмінна за своєю структурою від множини типу A_k, то можна вказати деяку множину A_ν, яка краща ніж A.

Доведення

Нехай ν є номером самого старшого $\omega \in A$, тоді $T(A) = t(\omega_\nu)$. Оскільки A можна поповнювати елементами $A_\nu \setminus A$, то множина A_ν має прибуток більше, ніж $P(A)$, а час такий же. Отже, множина A_ν краще множини A.

З наведених тверджень випливає, що множини типу A_k і тільки вони є рішеннями задачі векторної оптимізації (6), якщо не звертати увагу на фінансові обмеження. Облік фінансових обмежень закладений у пунктах П.4 і П.5 викладеного алгоритму.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Ногин, В. Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход [Текст] / В. Д. Ногин. – М.: Физматлит, 2002. – 144 с.
2. Босов, А. А. Функции множества и их применения [Текст] / А. А. Босов. – Днепродзержинск: Изд. дом «Андрий», 2007. – 182 с.

Надійшла до редакції 12.01.2010.
Прийнята до друку 18.01.2010.